

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА ОТ ГРАНИЦЫ ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА

Ю.В. Мухин<sup>1,2</sup>, Ю.Р. Гамауллина<sup>1</sup>, Н.Д. Кундикова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

<sup>2</sup>Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

e-mail: mukhin@susu.ru

**Аннотация.** Получены и исследованы граничные условия для плоских электромагнитных волн на границе раздела изотропной среды с одноосным кристаллом. Получены элементы матрицы отражения, связывающей компоненты электрического поля в отраженной волне с компонентами электрического поля в падающей волне. Показана возможность сохранения поляризации при отражении от границы с анизотропной средой. Получены условия сохранения векторов Джонса при отражении от поверхности одноосного кристалла. Исследована возможность существования эффекта Брюстера на границе с такой анизотропной средой. Брюстеровские поляризации оказываются близкими к  $p$ -поляризациям с небольшой примесью  $s$ -поляризации.

*Ключевые слова:* граница раздела с анизотропной средой; вектор Джонса; угол Брюстера.

### Введение

Отражение электромагнитных волн от границы с анизотропной средой рассматривалось неоднократно (см. например [1]). Тем не менее детальные исследования поляризационных эффектов при отражении света от таких границ не проводились. Данная работа восполняет частично этот пробел. При отражении от границы двух изотропных сред поляризация волны никогда не сохраняется (за исключением двух тривиальных случаев  $s$ - или  $p$ -поляризованной падающей волны). Плоскость поляризации после отражения всегда прижимается ближе к границе раздела сред [2]. В случае анизотропных сред в отраженной волне всегда присутствуют обе  $s$ - и  $p$ -поляризации, что допускает возможность сохранения векторов Джонса при отражении. Чтобы определить, при каких условиях это выполняется, были получены и исследованы граничные условия для плоских электромагнитных волн в случае одноосного кристалла с осью, параллельной границе раздела кристалла и изотропной среды.

### Граничные условия

Пусть электромагнитная волна падает под углом падения  $\theta$  на границу раздела изотропной среды и одноосного кристалла, как показано на рис. 1. На рис. 2 показаны направления волновых векторов в плоскости падения  $OXZ$  для волн в изотропной среде (обозначены как  $E$ ) и для обыкновенной и необыкновенной волн в анизотропной среде (обозначены как  $D$ ). Для волн, распространяющихся «сверху вниз», используется индекс «+», а для бегущих «снизу вверх» используется индекс «-».

Запишем проекции векторов напряженности электрического поля  $E$  и напряженности магнитного  $H$  на границу раздела в изотропной среде. Направления векторов для разных поляризаций выбираются так, как показано на рис. 3 и 4, таким образом, чтобы при нормальном падении направления напряженностей электрических полей в падающей и отраженной волнах совпадали.

Суммарные проекции полей записываются отдельно для каждой составляющей: для падающей  $p$ -поляризованной волны (см. рис. 3) и  $s$ -поляризованной волны (см. рис. 4).

$$\begin{array}{llll} E_{px} = \cos \theta (E_p^+ + E_p^-) & H_{px} = 0 & E_{sx} = 0 & H_{sx} = n \cos \theta (E_s^+ - E_s^-) \\ E_{py} = 0 & H_{py} = -n(E_p^+ - E_p^-) & E_{sy} = (E_s^+ - E_s^-) & H_{sy} = 0 \\ E_{pz} = \sin \theta (E_p^+ - E_p^-) & H_{pz} = 0 & E_{sz} = 0 & H_{sz} = n \sin \theta (E_s^+ + E_s^-) \end{array}$$

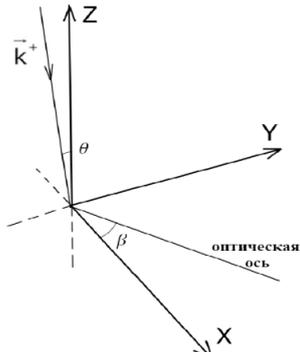


Рис. 1. Граница раздела OXY содержит оптическую ось кристалла, расположенную под углом  $\beta$  к оси OX

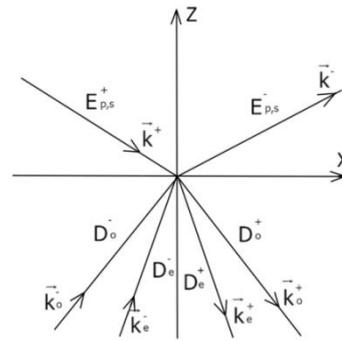


Рис. 2. Расположение направлений волновых векторов в плоскости падения OXZ

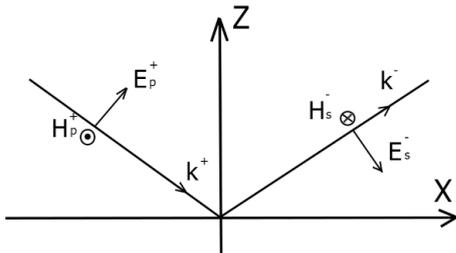


Рис. 3. Падающая р-поляризация

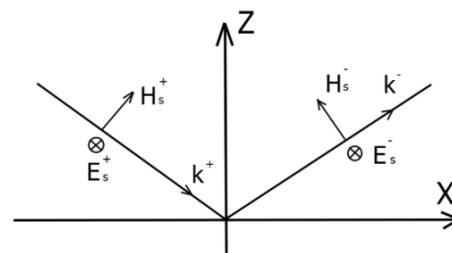


Рис. 4. Падающая s-поляризация

Для записи проекций полей в одноосном кристалле удобно пользоваться индукцией электрического поля вместо напряженности. Это обусловлено поперечностью поля  $D$  по отношению к волновому вектору. Введём также обозначения углов, связанных с ориентацией полей и волновых векторов, упрощающие вид формул:

$$\begin{aligned} \sin \theta_e &= n \sin \theta / n_e & \cos \gamma_e &= \cos \beta \sin \theta_e & \cos \alpha_e &= \sin \beta \sin \theta_e \\ \sin \theta_o &= n \sin \theta / \sqrt{\epsilon_{\perp}} & \cos \gamma_o &= \cos \beta \sin \theta_o & \cos \alpha_o &= \sin \beta \sin \theta_o \end{aligned}$$

Перпендикулярные и параллельные оптической оси составляющие электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей необыкновенной и обыкновенной волн выражаются тогда через индукцию электрического поля  $D$  следующим образом.

Для необыкновенной волны:

$$\begin{aligned} E_{e\parallel} &= \frac{\sin \gamma_e}{\epsilon_{\parallel}} D_e^+ & E_{e\perp} &= \frac{\cos \gamma_e}{\epsilon_{\perp}} D_e^+ & E_{e\parallel} &= \frac{\sin \gamma_e}{\epsilon_{\parallel}} D_e^- & E_{e\perp} &= \frac{-\cos \gamma_e}{\epsilon_{\perp}} D_e^- \\ H_{e\parallel} &= 0 & H_{e\perp} &= -\frac{D_e^+}{n_e} & H_{e\parallel} &= 0 & H_{e\perp} &= \frac{D_e^-}{n_e} \end{aligned}$$

Для обыкновенной волны:

$$\begin{aligned} E_{o\parallel} &= 0 & E_{o\perp} &= \frac{D_o^+}{\epsilon_{\perp}} & E_{o\parallel} &= 0 & E_{o\perp} &= \frac{D_o^-}{\epsilon_{\perp}} \\ H_{o\parallel} &= \sin \gamma_o \frac{D_o^+}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}} & H_{o\perp} &= \cos \gamma_o \frac{D_o^+}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}} & H_{o\parallel} &= -\sin \gamma_o \frac{D_o^-}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}} & H_{o\perp} &= \cos \gamma_o \frac{D_o^-}{\sqrt{\epsilon_{\perp}}} \end{aligned}$$

Индексы «e» и «o» обозначают компоненты необыкновенной и обыкновенной волн, которые

имеют показатели преломления  $n_e = \sqrt{\epsilon_{\parallel} \left( 1 - n^2 \left( \frac{\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \beta \right)}$  и  $n_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}}$ . Здесь  $n$  – показатель преломления изотропной среды.

Граничные условия заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела. Остается только «сшить» все полученные выражения в четыре граничных условия:

Для электрического поля, параллельного оптической оси:

$$\cos \beta \cos \theta (E_p^+ + E_p^-) + \sin \beta (E_s^+ + E_s^-) = \frac{\sin \gamma_e}{\varepsilon_{\parallel}} (D_e^+ + D_e^-) \quad (1)$$

Для магнитного поля, параллельного оптической оси:

$$-n \sin \beta (E_p^+ - E_p^-) + n \cos \beta \cos \theta (E_s^+ - E_s^-) = \frac{\sin \gamma_o}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} (D_o^+ + D_o^-) \quad (2)$$

Для электрического поля, перпендикулярного оптической оси:

$$-\sin \beta \cos \theta (E_p^+ + E_p^-) + \cos \beta (E_s^+ + E_s^-) = \frac{\cos \gamma_e \sin \alpha_e}{\varepsilon_{\perp}} (D_e^+ + D_e^-) + \frac{\cos \alpha_o}{\varepsilon_{\perp}} (D_o^+ + D_o^-) \quad (3)$$

Для магнитного поля, перпендикулярного оптической оси:

$$n \cos \beta (E_p^+ - E_p^-) + n \sin \beta \cos \theta (E_s^+ - E_s^-) = \frac{\cos \alpha_e}{n_e} (D_e^+ - D_e^-) - \frac{\cos \gamma_o \sin \alpha_o}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}} (D_o^+ - D_o^-) \quad (4)$$

### Матрица отражения

Полученная выше алгебраическая система уравнений позволяет вычислить различные амплитудные коэффициенты отражения для разных поляризаций. В уравнениях (1)–(4) можно избавиться от компонент индукции электрического поля  $D$  и получить элементы матрицы отражения  $M$ , связывающей компоненты электрического поля в отраженной волне с компонентами электрического поля в падающей:

$$\begin{pmatrix} E_p^- \\ E_s^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p^+ \\ E_s^+ \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_p^+ \\ E_s^+ \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы матрицы отражения  $M$  даются выражениями:

$$r_{pp} = \frac{E_p^-}{E_p^+} = \frac{A_{1p}C_2 - A_{2p}C_1}{B_{2p}C_1 - B_{1p}C_2}, \text{ при } E_s^+ = 0; \quad r_{sp} = \frac{E_p^-}{E_s^+} = \frac{B_{2s}C_1 - B_{1s}C_2}{A_{1s}C_2 - A_{2s}C_1}, \text{ при } E_p^+ = 0;$$

$$r_{ps} = \frac{E_s^-}{E_p^+} = \frac{A_{1p}B_{2p} - A_{2p}B_{1p}}{B_{1p}C_2 - B_{2p}C_1}, \text{ при } E_s^+ = 0; \quad r_{ss} = \frac{E_s^-}{E_s^+} = \frac{B_{1s}A_{2s} - B_{2s}A_{1s}}{A_{1s}C_2 - A_{2s}C_1}, \text{ при } E_p^+ = 0.$$

Где введены следующие обозначения:

$$A_{1p,s} = a_{3p,s}d_1e_2 - a_{1p,s}d_3e_2 - a_{2p,s}d_1e_3 \quad B_{1p,s} = b_{3p,s}d_1e_2 - b_{1p,s}d_3e_2 - b_{2p,s}d_1e_3$$

$$A_{2p,s} = a_{4p,s}d_1e_2 - a_{1p,s}d_4e_2 - a_{2p,s}d_1e_4 \quad B_{1p,s} = b_{3p,s}d_1e_2 - b_{1p,s}d_3e_2 - b_{2p,s}d_1e_3$$

$$C_1 = c_3d_1e_2 - c_1d_3e_2 - c_2d_1e_3 \quad C_2 = c_4d_1e_2 - c_1d_4e_2 - c_2d_1e_4$$

$$a_1 = \cos \theta \cos \beta; a_{2p} = -n \sin \beta; a_{2s} = n \sin \beta; a_3 = -a_1; a_{4p} = -n \cos \beta; a_{4s} = -a_{4p};$$

$$b_{1p} = a_1; b_{1s} = \frac{a_{2s}}{n}; b_{2p} = a_{2s}; b_{2s} = -na_1; b_{3p} = -a_1; b_{3s} = \frac{a_{4s}}{n}; b_{4p} = a_{4s};$$

$$b_{4s} = -na_1; c_1 = \sin \beta; c_2 = -na_1; c_3 = \cos \beta; c_4 = na_1; d_1 = \frac{\sin \gamma_e}{\varepsilon_{\parallel}}; e_2 = \frac{\sin \gamma_o}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}};$$

$$d_3 = \frac{\sin \alpha_e \cos \gamma_e}{\varepsilon_{\perp}}; e_3 = \frac{\cos \alpha_o}{\varepsilon_{\perp}}; d_4 = \frac{-\cos \alpha_e}{n_e}; e_4 = \frac{\sin \alpha_o \cos \gamma_o}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}.$$

В отсутствие поглощения и полного внутреннего отражения матрица  $M$  должна обладать определёнными свойствами. Во-первых, она должна быть вещественной матрицей. Помимо этого, по аналогии с линейными эрмитовыми операторами квантовой механики, она обязана быть симметричной. Симметричность  $M$  подтверждалась прямыми выкладками и вычислениями.

### Эффект сохранения поляризации

В изотропных средах поляризация света никогда не сохраняется при отражении от их границ раздела. На границе с анизотропной средой ситуация совсем иная. Представим отраженную в изотропной среде волну в виде

$$\begin{pmatrix} E_p^- \\ E_s^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p^+ \\ E_s^+ \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} E_p^+ \\ E_s^+ \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Алгебраическая система уравнений (5) может иметь нетривиальное решение только в случае равенства нулю детерминанта:

$$\det \begin{pmatrix} r_{pp} - r & r_{sp} \\ r_{ps} & r_{ss} - r \end{pmatrix} = 0$$

Решение системы уравнений (5) и нахождение коэффициентов  $r$  аналогично решению задачи о расщеплении двукратно вырожденного уровня, разобранный в [3].

$$r_{1,2} = 0,5(r_{pp} + r_{ss} \pm w), \quad w = \sqrt{(r_{pp} - r_{ss})^2 + 4|r_{ps}|^2}$$

Выражения для векторов Джонса  $J$  падающей волны имеют при этом следующий вид:

$$J = \begin{pmatrix} E_p^+ \\ E_s^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{0,5 \left(1 \pm \frac{r_{pp} - r_{ss}}{w}\right)} \\ \pm \frac{r_{ps}}{|r_{sp}|} \sqrt{0,5 \left(1 \mp \frac{r_{pp} - r_{ss}}{w}\right)} \end{pmatrix}.$$

Наглядно представить поляризацию электрического поля удобно с помощью годографов нормированных векторов Джонса: точек или линий на поверхности сферы единичного радиуса в используемой системе координат. Волновые векторы при этом будут лежать в плоскости падения перпендикулярно векторам Джонса. В зависимости от угла падения  $\theta$  годограф вектора Джонса для одной из поляризаций прочерчивает на поверхности сферы линию от экватора (нормальное падение) и до полюса, где угол падения света  $\theta = 90^\circ$ . Для различных положений оптической оси, разных углов  $\beta$ , получаются разные линии на сфере. На рис. 5 и 6 приведены годографы векторов Джонса  $J$  для сохраняющихся поляризаций: рис. 5 – для углов  $\beta < 45^\circ$ , рис. 6 – для углов  $45^\circ < \beta < 90^\circ$ .

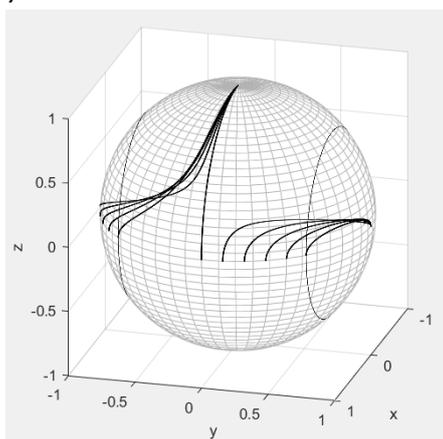


Рис. 5. Годографы вектора Джонса для углов  $\beta$  от  $0^\circ$  до  $45^\circ$  с шагом  $9^\circ$ .  $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1,7; \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1,55$

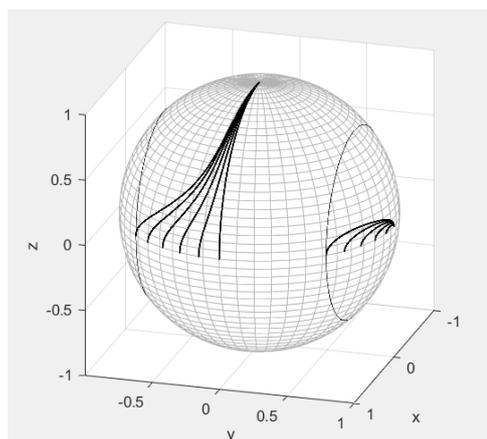


Рис. 6. Годографы вектора Джонса для углов  $\beta$  от  $45^\circ$  до  $90^\circ$  с шагом  $9^\circ$ .  $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1,7; \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1,55$

На рис. 6 видно, что для  $45^\circ < \beta < 90^\circ$  плоскости сохраняющихся поляризаций могут принимать лишь ограниченные положения: ни одна из линий годографов на рис. 6 не пересекает вертикальные окружности на сфере, параллельные плоскости падения, в то время как для углов  $\beta < 45^\circ$  каждая из линий пересекает эти окружности. Вертикальные окружности на рис. 5 и 6 соответствуют плоскостям поляризаций, составляющим угол в  $45^\circ$  с плоскостью падения. Данное

свойство не зависит от оптических параметров кристалла, но может быть пояснено с помощью рис. 7, на котором показаны графики зависимости от угла падения  $\theta$  двух коэффициентов матрицы отражения при  $\beta = 10^\circ$ .

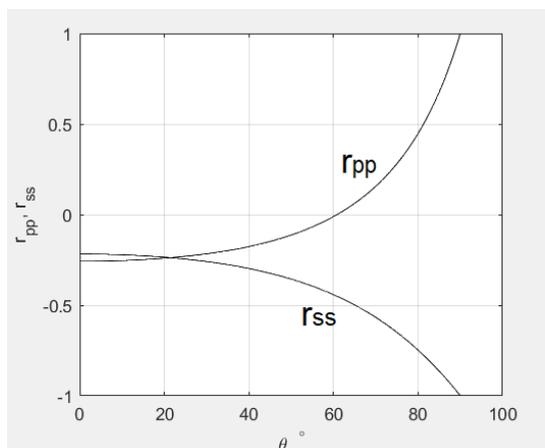


Рис. 7. Графики  $r_{pp}(\theta)$  и  $r_{ss}(\theta)$  при  $\beta = 10^\circ$ .

$$\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1,7, \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1,55$$

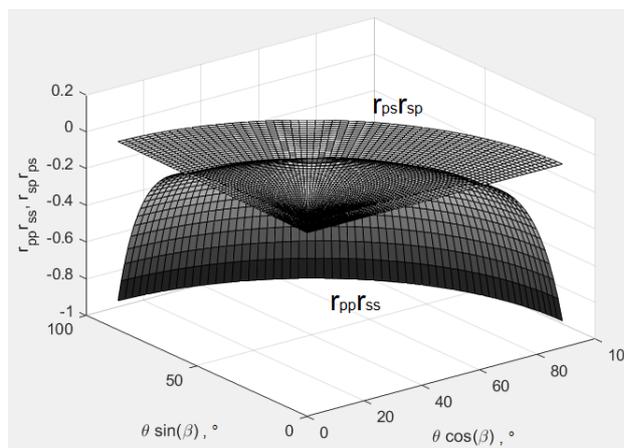


Рис. 8. График зависимости  $r_{pp}r_{ss}$  и  $r_{ps}r_{sp}$  в координа-

тах  $\theta \sin \beta$  и  $\theta \cos \beta$ .  $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1,7, \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1,55$

Кривые на графике имеют точку пересечения, которая присутствует для всех углов  $\beta < 45^\circ$ . Это пересечение соответствует равенству модулей компонент векторов Джонса для сохраняющихся поляризаций, и значит, расположению плоскости поляризации под углом  $45^\circ$  к плоскости падения. Для углов  $45^\circ < \beta < 90^\circ$  такое пересечение кривых отсутствует, именно поэтому положение плоскостей сохраняющихся поляризаций в этом случае ограничено областями, показанными на рис. 6.

### Угол Брюстера

Для границы двух изотропных сред угол Брюстера соответствует нулевому отражению р-поляризованного света. На границе с анизотропной средой р-поляризованный свет всегда будет давать s-поляризованную составляющую в отраженной волне. Поэтому сам термин и условия «Брюстера» следует относить здесь уже к другой поляризации, которая, очевидно, будет определяться углом  $\beta$  оптической оси к плоскости падения. Если условия Брюстера выполнены для одной поляризации, то ортогональная ей поляризация должна сохраняться.

Таким образом, условия Брюстера являются частным случаем сохраняющихся поляризаций с нулевым коэффициентом  $r$  в системе уравнений (5). Чтобы это было возможным, необходимо равенство нулю детерминанта матрицы отражения в (5):  $r_{pp}r_{ss} - r_{ps}r_{sp} = 0$ .

На рис. 8 показаны зависимости  $r_{pp}r_{ss}$  и  $r_{ps}r_{sp}$  от угла падения  $\theta$  и угла  $\beta$ , взятых в полярных для этих переменных координатах:  $\theta \sin \beta$  и  $\theta \cos \beta$ . Пересечение двух поверхностей как раз и соответствует выполнению условий Брюстера. При выполнении условия вектор Джонса падающей волны приобретает вид

$$J \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -r_{ps}/r_{ss} \end{pmatrix}.$$

Условия Брюстера являются частным случаем сохранения поляризации при отражении. Другими словами, на линиях, изображенных на рис. 5 и 6, должны быть точки, соответствующие Брюстеровским поляризациям.

На рис. 9 показана макушка сферы единичного радиуса со следами годографов сохраняющихся векторов Джонса, на которых отмечены точки, соответствующие условиям Брюстера. Оказывается, что эти условия реализуются между углами Брюстера для

коэффициентов преломления  $n_e(\beta=0) = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \left( 1 - n^2 \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \right) \sin^2 \theta \right)}$  и  $n_o = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Брюстеровская

поляризация оказывается при этом близкой к  $p$ -поляризации с небольшой примесью  $s$ -поляризации на уровне нескольких процентов, но которая зависит уже от параметров кристалла.

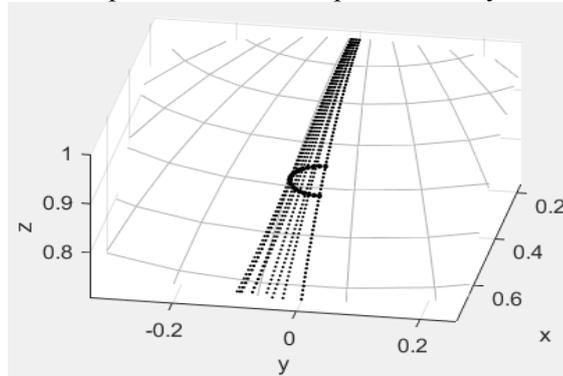


Рис. 9. Годограф векторов Джонса для углов Брюстера.  $\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 1,7, \sqrt{\varepsilon_{\perp}} = 1,55$

### Заключение

В настоящей работе были получены и исследованы граничные условия для плоских электромагнитных волн на границе раздела изотропной среды с одноосным кристаллом. Получены элементы матрицы отражения связывающей компоненты электрического поля в отраженной волне с компонентами электрического поля в падающей волне. Показана возможность сохранения поляризации при отражении от границы с анизотропной средой и получены условия для реализации этого эффекта. Исследована возможность существования эффекта Брюстера на границе с такой анизотропной средой. Брюстеровские поляризации оказываются близкими к  $p$ -поляризациям с небольшой примесью  $s$ -поляризаций.

### Литература

1. Игнатович, Ф.В. Оптика анизотропных сред / Ф.В. Игнатович, В.К. Игнатович // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, № 7. – С. 759–771.
2. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие для студентов физических специальностей университетов. В 10 т. Том VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит: МАИК Наука, 2005. – 651 с.
3. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие для студентов физических специальностей университетов. В 10 т. Том 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит: МАИК Наука, 2001. – 803 с.

Поступила в редакцию 25 апреля 2023 г.

### Сведения об авторах

Мухин Юрий Викторович – кандидат физико-математических наук, Ph.D., доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация; Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: mukhinvy@susu.ru

Гатауллина Юлия Рауфовна – студент, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: gataullinaju@gmail.com

Кундикова Наталия Дмитриевна – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация; Институт электрофизики УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: kundikovand@susu.ru

## THE POLARISATION EFFECTS OF LIGHT REFLECTION FROM THE INTERFACE WITH A UNIAXIAL CRYSTAL

Y.V. Mukhin<sup>1,2</sup>, Y.R. Gataullina<sup>1</sup>, N.D. Kundikova<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute of Electrophysics, Ural Division of the RAS, Ekaterinburg, Russian Federation  
e-mail: mukhinyv@susu.ru

**Abstract.** In this paper, the boundary conditions for plane electromagnetic waves at the interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal have been obtained and analyzed. Elements of the reflection matrix that relates components of the electric field of the reflected wave back to those of the incident electromagnetic wave have been determined. Using the elements of the reflection matrix, we show that the possibility exists for polarization of light to be preserved upon reflection at the interface with anisotropic media. The conditions for the Jones vectors conservation upon reflection from the surface of a uniaxial crystal are obtained. The existence of the Brewster effect at the interface with such an anisotropic medium has been studied and verified. The Brewster's polarizations have been shown to be almost  $p$ -polarizations with just little admixture of  $s$ -polarization.

**Keywords:** interface with anisotropic media, Jones vector, Brewster angle.

### References

1. Ignatovich F.V, Ignatovich V.K. *Optics of anisotropic media*. Physics–Uspekhi, 2012, Vol. 55, Iss. 7, pp. 709–720. DOI: 10.3367/UFNe.0182.201207f.0759
2. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie dlya studentov fizicheskikh spetsial'nostey universitetov. V 10 t. Tom VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred* (Theoretical physics: a textbook for students of physical specialties of universities. In 10 vols. Vol. VIII. Electrodynamics of continuous media), 2005, Moscow, Fizmatlit Publ., MAIK Nauka Publ., 651 p. (in Russ.).
3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: uchebnoe posobie dlya studentov fizicheskikh spetsial'nostey universitetov. V 10 t. Tom 3: Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* (Theoretical physics: a textbook for students of physical specialties of universities. In 10 vols. Vol. III: Quantum Mechanics. Non-relativistic theory, 2001, Moscow, Fizmatlit Publ., MAIK Nauka Publ., 803 p. (in Russ.).

*Received April 25, 2023*

### Information about the authors

Mukhin Yuriy Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Ph.D., Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; Institute of Electrophysics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: mukhinyv@susu.ru

Gataullina Julia Raufovna is student, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: gataullinaju@gmail.com

Kundikova Nataliya Dmitrievna is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; Institute of Electrophysics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: kundikovand@susu.ru