

ТЕЧЕНИЕ ГАРТМАНА В СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Р.С. Окатьев^{1,2}, П.Г. Фрик^{1,2}, И.В. Колесниченко¹

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Российская Федерация

² Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация

E-mail: okatev.r@icmm.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о течении пространственно неоднородной электропроводной жидкости между параллельными плоскостями, перпендикулярно которым наложено магнитное поле. Распределения электропроводности и вязкости жидкости задаются линейными по толщине слоя функциями. Угловой коэффициент распределений характеризует максимальное отклонение свойств жидкости от соответствующих средних значений. Показано, что наличие неоднородности свойств жидкости приводит к искажению профилей скорости. Полученные профили характеризуются асимметрией и наличием точек перегиба. В качестве количественной меры асимметрии введена величина, равная отношению расходов в верхней и нижней половинах слоя. Определена зависимость этой величины от среднего числа Гартмана и параметров распределений неоднородности свойств. Показано, что начиная с некоторого относительно небольшого значения среднего числа Гартмана точки перегиба в профилях скорости появляются при любых значениях параметров распределений. Приведены оценки характерных перепадов температур и концентраций непроводящей примеси для жидкого натрия, при которых проявляются описанные эффекты.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика; течение Гартмана; неоднородные свойства; электропроводность.

Введение

Магнитное поле оказывает существенное воздействие на течения проводящих сред. Классическим примером изменения профиля скорости потока под действием магнитного поля является задача Гартмана о течении проводящей жидкости между параллельными плоскостями, перпендикулярно которым наложено магнитное поле [1]. Важно, что магнитное поле не только уплощает профиль скорости, концентрируя вязкие напряжения в пограничных слоях, которые становятся все уже по мере роста магнитного поля, но и существенно сдвигает порог устойчивости, что было обнаружено в первом же экспериментальном исследовании течения ртути в поперечном магнитном поле [2]. Систематические исследования зависимости границы устойчивости при течении ртути в каналах прямоугольного сечения в поперечном магнитном поле показали, что критическое число Рейнольдса Re^* ($Re = Uh/\nu$, где U – средняя скорость потока, h – полуширина слоя, а ν – кинематическая вязкость жидкости) растет линейно с ростом числа Гартмана ($Ha = Bh\sqrt{\sigma/\eta}$, где B – индукция наложенного магнитного поля, σ – электрическая проводимость, η – динамическая вязкость жидкости), то есть $Re^*/Ha = C$, и константа C при увеличении отношения размера канала поперек поля к размеру вдоль поля (то есть при приближении к случаю неограниченного слоя) $C \approx 215$ [3]. Отметим, что число Рейнольдса, отнесенное к числу Гартмана, является, по сути, числом Рейнольдса, в котором в качестве масштаба использована толщина гартмановского пограничного слоя. Таким образом, полученный результат означает, что устойчивость всего течения определяется устойчивостью пограничного слоя.

Дальнейшие эксперименты с различными металлами и каналами, выполненные в различных диапазонах значений индукции магнитного поля, позволили принять, что для широкого класса течений и $Ha > 20$ можно пользоваться оценкой $200 < C < 400$ [4, 5]. Эта оценка указывает на то,

что в сильных магнитных полях течения металла могут оставаться ламинарными даже при очень больших значениях числа Рейнольдса. Так, в проектируемых жидкометаллических элементах охлаждения токамаков ожидаемые числа Гартмана достигают 10^4 , что сдвигает границу устойчивости до $Re \sim 10^6$ и выше. Однако именно исследования течений жидкого металла в контексте возможности их использования в охлаждающих системах термоядерных установок показали, что влияние магнитного поля не столь однозначно и в течениях с большими перепадами температуры возникают пульсации температуры (и скорости), значительно превосходящие даже те, что могли бы быть в отсутствие магнитного поля [6, 7]. Так, в случае опускного течения ртути в подогреваемом с одной стороны вертикальном канале колебания температуры при сильном нагреве подавляются только при $Ha > Re/10$ [8], то есть для ламинаризации потока магнитное поле должно быть на порядок сильнее, чем в отсутствие нагрева. Эти пульсации температуры получили название магнитоconvективных, и их возникновение было объяснено тем, что в результате действия электромагнитных сил и сил плавучести происходит трансформация профиля скорости, в котором появляются точки перегиба, способствующие развитию неустойчивости (см. обзор [5]).

Цель данной работы состоит в том, чтобы выяснить, насколько неоднородности свойств жидкого металла в слое могут исказить гартмановский профиль скорости и могут ли эти искажения сопровождаться появлением точек перегиба. Точки перегиба не являются достаточным условием возникновения неустойчивости, но могут способствовать ей. Ниже будет рассмотрена стандартная задача Гартмана о течении жидкости в поперечном магнитном поле с учетом возможных вариаций проводимости и вязкости жидкости поперек слоя.

Неоднородность свойств жидкости может быть вызвана, к примеру, вариациями температуры или наличием примесей. В данной работе вопрос о причинах возникновения неоднородности не обсуждается и не рассматриваются эффекты, связанные с изменением плотности и появлением сил плавучести. Это сделано сознательно, чтобы разобраться с изолированным эффектом. Однако стоит отметить, что мотивацией для изучения этой задачи послужили разработки различных систем МГД-перемешивания [9, 10] и МГД-сепарации металлов с примесями [11, 12], в которых возникают потребности как в интенсификации перемешивания потока в магнитном поле (турбулизации потока в режимах, когда он остается ламинарным под действием поля), так и, наоборот, в подавлении интенсивного перемешивания примеси.

Задача Гартмана

Рассматривается одномерное течение жидкости $\mathbf{v} = \{V(z), 0, 0\}$ в плоском слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $2h$ друг от друга в поперечном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ (рис. 1). Движение жидкости вызвано перепадом давления, имеющим заданный градиент ∇p .

В отсутствие внешнего электрического поля выражение для электромагнитной силы принимает вид

$$\mathbf{F}^{em} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma B^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

что позволяет записать безразмерные уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = Pe \mathbf{e}_x + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \frac{Ha^2}{Re} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

В качестве единиц измерения длины, скорости, времени, давления и индукции магнитного поля выбраны соответственно величины h , U , h/U , ρU^2 и B , где U – средняя скорость течения, ρ – плотность жидкости. В уравнения входят безразмерный приложенный градиент давления P и два безразмерных параметра – число Гартмана

$$Ha = Bh \sqrt{\sigma/\eta}, \quad (3)$$

квадрат которого определяет отношение электромагнитных сил к силам вязкости и число Рейнольдса

$$Re = \frac{Uh\rho}{\eta}. \quad (4)$$

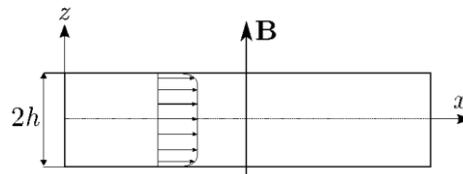


Рис. 1. Задача Гартмана с характерным профилем скорости для однородной среды

В стационарном случае задача (2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$V'' = -\text{Re} P + \text{Ha}^2 V. \quad (5)$$

Здесь штрихом сверху обозначена производная по координате z . Решение этого уравнения с учетом граничных условий $V(-1) = V(1) = 0$ было получено Гартманом [1] и имеет вид

$$V(z) = \frac{\text{Re} P}{\text{Ha}^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(\text{Ha}z)}{\text{ch}(\text{Ha})} \right). \quad (6)$$

Интегрирование этого решения с учетом нормировки расхода

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 V(z) dz = 1 \quad (7)$$

позволяет избавиться от градиента давления и дает окончательный профиль скорости в виде

$$V(z) = \frac{\text{Ha}}{\text{Ha} - \text{th}(\text{Ha})} \left(1 - \frac{\text{ch}(\text{Ha}z)}{\text{ch}(\text{Ha})} \right), \quad (8)$$

откуда следует, что число Рейнольдса не влияет на профиль скорости.

Неоднородное распределение свойств жидкости

Неоднородность свойств жидкости (конкретно, вязкости и проводимости) поперек слоя может существенно влиять на профиль скорости течения. Неоднородность может быть вызвана, к примеру, вариациями температуры или наличием примесей. В данной работе вопрос о причинах возникновения неоднородности не обсуждается, но рассматриваются эффекты, которые такая неоднородность может вызвать.

В случае пространственно неоднородных вязкости и проводимости уравнение Навье–Стокса (2) переписывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = P \mathbf{e}_x + \frac{1}{\text{Re}_0} \xi \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\text{Re}_0} \nabla \xi \cdot \nabla \mathbf{v} + \phi \frac{\text{Ha}_0^2}{\text{Re}_0} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Здесь $\xi = \eta(\mathbf{r})/\eta_0$ и $\phi = \sigma(\mathbf{r})/\sigma_0$ – безразмерные вязкость и проводимость соответственно, а нижний индекс у чисел Гартмана и Рейнольдса означает, что они определяются по средней проводимости σ_0 и средней вязкости η_0 .

Уравнение для определения стационарного профиля скорости в задаче Гартмана с учетом неоднородных свойств жидкости запишется в виде

$$V'' = -\frac{\text{Re}_0 P}{\xi} + \text{Ha}_0^2 \left(\frac{\phi}{\xi} \right) V - \frac{d \ln \xi}{dz} V'. \quad (10)$$

Для решения уравнения (10) необходимо задать вид распределений свойств жидкости поперек потока $\xi(z)$ и $\phi(z)$. Одним из наиболее простых вариантов неоднородного распределения свойств в потоке является линейная зависимость проводимости и вязкости от поперечной координаты. Выберем эту зависимость в таком виде, что при $z=0$ значения обеих характеристик совпадают со средними значениями

$$\phi(z) = 1 + k_\sigma z, \quad (11)$$

$$\xi(z) = 1 + k_\eta z. \quad (12)$$

Параметры k_σ и k_η характеризуют степень отклонения соответствующей величины от ее среднего значения. К примеру, при $k_\eta = 0,1$ вязкость вблизи верхней стенки канала будет на 10 % больше среднего значения, а вблизи нижней стенки – на 10 % меньше.

При подстановке (11) и (12) в (10) получим

$$V'' = -\frac{\text{Re}_0 P}{1 + k_\eta z} + \text{Ha}_0^2 \left(\frac{1 + k_\sigma z}{1 + k_\eta z} \right) V - \frac{k_\eta}{1 + k_\eta z} V'. \quad (13)$$

В силу симметрии (уравнение инвариантно к преобразованию $\{z \rightarrow -z, k_\sigma \rightarrow -k_\sigma, k_\eta \rightarrow -k_\eta\}$) достаточно рассмотреть лишь положительные значения одного из параметров, а профили скорости для отрицательных значений этого параметра можно получить отражением относительно оси $z = 0$.

На рис. 2 приведены профили скорости для значений среднего числа Гартмана 5 и 25. При отсутствии неоднородности проводимости жидкости (случай а) отклонение от обычного гартмановского профиля определяется неоднородностью вязкости. С локальным увеличением числа Гартмана градиенты скорости в ядре течения уменьшаются, в связи с чем уменьшается влияние неоднородности вязкости на профиль скорости, и поэтому отклонения от профиля течения однофазной жидкости оказываются заметными лишь в пограничных слоях.

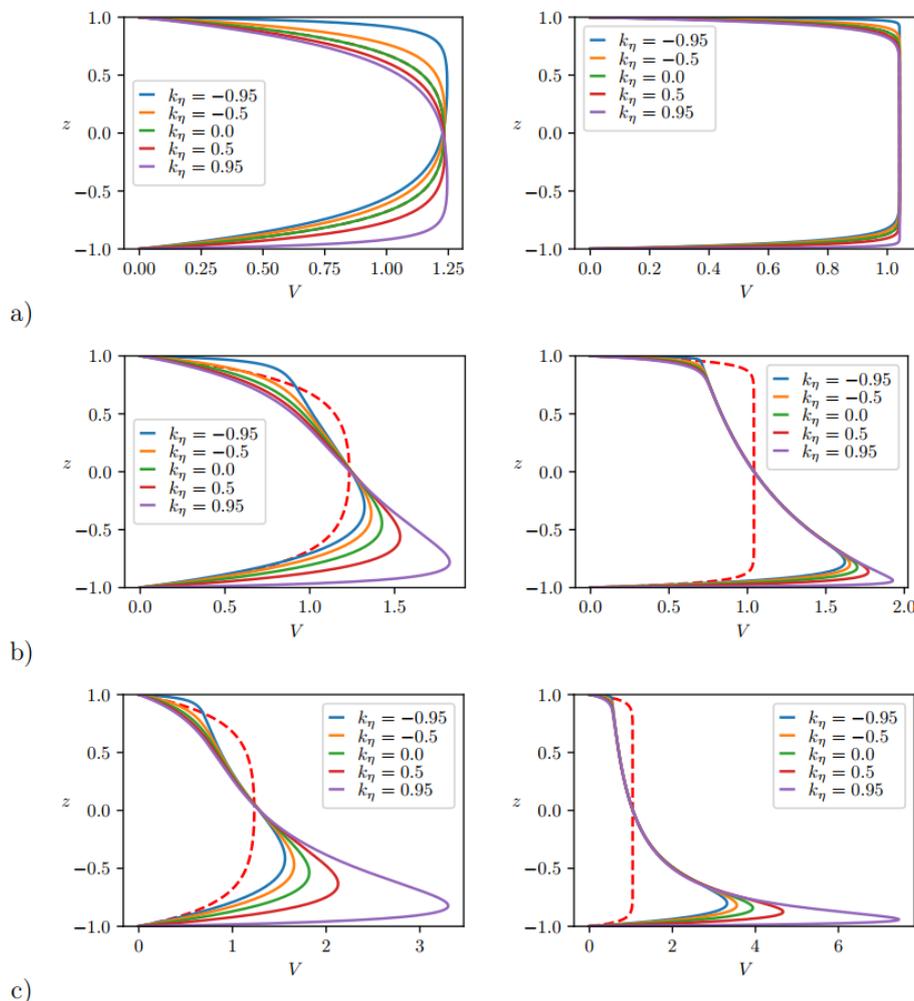


Рис. 2. Профили скорости при $\text{Ha} = 5$ (слева) и $\text{Ha} = 25$ (справа); а) $k_\sigma = 0$, б) $k_\sigma = 0,5$, в) $k_\sigma = 0,95$; красной пунктирной линией обозначен профиль скорости для течения Гартмана в случае жидкости с однородными свойствами

Представленные профили иллюстрируют появление несимметрии течения относительно центра канала. В качестве количественной характеристики отклонения от симметрии можно выбрать отношение расходов в верхней и нижней половинах канала

$$Q = \frac{\int_0^1 V(z) dz}{\int_{-1}^0 V(z) dz}, \quad (14)$$

распределение которого на плоскости параметров (k_σ, k_η) для различных значений числа Гартмана представлено на рис. 3. Белая линия на этих распределениях соответствует симметрии профиля скорости относительно центра канала. Показательными являются два предельных случая. В отсутствие внешнего поля неоднородность проводимости, очевидно, никак не влияет на течение жидкости и искажение профиля скорости определяется лишь неоднородностью вязкости. Напротив, при течении в сильном магнитном поле электромагнитные силы существенно превосходят вязкие силы и несимметрия профиля определяется неоднородностью электропроводности и практически не зависит от вязкости.

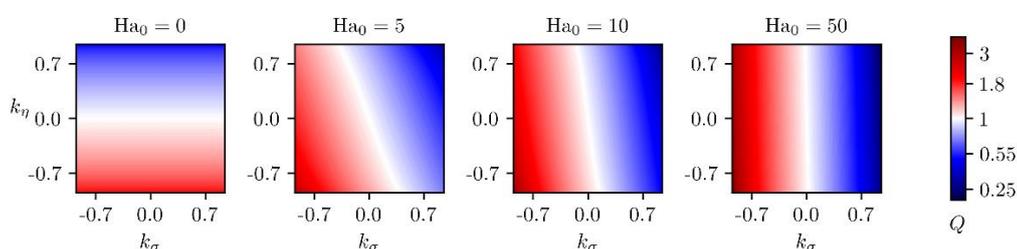


Рис. 3. Распределение относительного расхода Q на плоскости параметров неоднородности свойств жидкости (k_σ, k_η) при различных значениях среднего числа Гартмана. Цветовая шкала представлена в логарифмическом масштабе

Важной особенностью полученных профилей является появление точек перегиба, начиная с некоторых значений параметров, характеризующих неоднородность свойств. На рис. 4 показан пример для небольшого значения магнитного поля ($Ha_0 = 5$), при котором точки перегиба возникают только при значительной неоднородности проводимости среды. При малых Ha_0 существует диапазон значений параметров k_σ и k_η , в рамках которого точки перегиба в профиле скорости не появляются. С увеличением Ha_0 этот диапазон существенно снижается и при $Ha_0 \approx 10$ точки перегиба появляются при любых значениях параметров. Рис. 5 иллюстрирует рост второй производной с ростом параметра неоднородности k_η (левая панель), справа представлены границы появления точек перегиба на плоскости параметров (k_σ, k_η) .

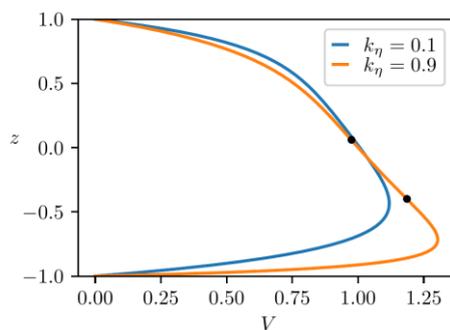


Рис. 4. Профили скорости при различных значениях параметра неоднородности вязкости, $Ha_0 = 5, k_\sigma = 0,4$: синим цветом показан профиль без точек перегиба, оранжевый профиль имеет две точки перегиба (на профиле обозначены черными точками)

Очевидно, что существуют распределения неоднородности свойств жидкости, при которых точки перегиба получаются при сколь угодно малых Ha_0 и любых ненулевых значениях параметров распределения. Такие неоднородности возникают при локальном изменении свойств во

внутренней точке потока. На практике такая ситуация наиболее интересна, так как возникает при впрыске примеси или локальном нагреве жидкости. Простейшей моделью локального изменения свойств может быть гауссово возмущение вида

$$\phi(z) = 1 + k_\sigma \exp\{-\delta z^2\}, \quad \xi(z) = 1 + k_\eta \exp\{-\delta z^2\}, \quad (15)$$

где δ характеризует ширину локализации неоднородности. Профили скорости, соответствующие такому распределению, всегда имеют точки перегиба (рис. б).

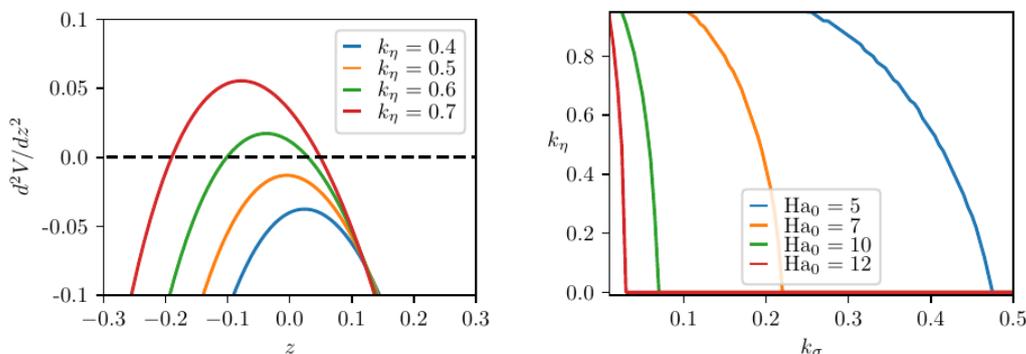


Рис. 5. Вторая производная профиля скорости при различных значениях параметра неоднородности вязкости для $Ha_0 = 5$ и $k_\sigma = 0,4$ (слева) и нейтральные кривые, характеризующие появление точек перегиба в профиле скорости, на плоскости параметров (k_σ, k_η) (справа)

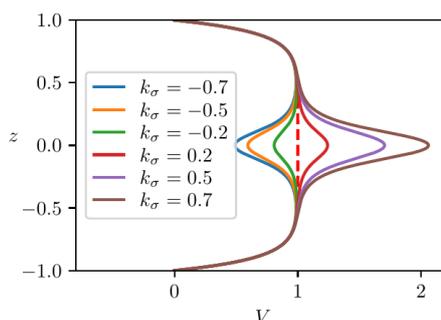


Рис. 6. Профили скорости с гауссовым распределением неоднородности свойств, $k_\eta = 0,1$, $Ha_0 = 10$

Обсуждение и выводы

Рассмотрено влияние неоднородности свойств проводящей жидкости поперек слоя на формирующийся в магнитном поле профиль скорости несжимаемой жидкости. Показано, что даже небольшие неоднородности электропроводности и вязкости могут приводить к существенной трансформации гартмановского профиля скорости, причем, даже простейшее линейное распределение характеристик жидкости поперек слоя может приводить к формированию профиля скорости с точками перегиба. Для линейной зависимости вязкости и электропроводности от поперечной координаты построена граница появления точек перегиба на плоскости параметров, определяющих максимальное отклонение обеих величин от среднего значения.

Представляет интерес оценка, насколько значимы должны быть вариации свойств жидкости, чтобы обсуждаемые эффекты стали заметны. Для определенности рассмотрим поток жидкого натрия при средней температуре 200°C . При такой температуре проводимость жидкого натрия составляет $7,81 \text{ МСм/м}$, а динамическая вязкость $4,52 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$. Примем для определенности, что ширина канала, по которому течет жидкость, составляет 10 см , и оценим перепады температуры поперек слоя, которые могут привести к появлению в профиле скорости точек перегиба. Для этого воспользуемся рис. 5 и проведем оценки для соответствующих значений числа Гартмана. Результаты оценок показаны в таблице, в которой представлены значения индукции магнитного поля, обеспечивающие в таком потоке соответствующие числа Гартмана, значения вариации проводимости, обеспечивающие появление точек перегиба и значения температуры на границах слоя, которые приведут к соответствующей вариации проводимости. По рис. 5 видно, что влияние вариаций вязкости в этом случае слабое и его можно не учитывать. Видно, что в

сильных магнитных полях эффект достигается при достаточно скромных перепадах температуры (при поле порядка 2 мТл точки перегиба возникают при разности температуры порядка 20 °С). Последняя колонка в таблице дает значение объемной доли непроводящей примеси, которая обеспечивает необходимую вариацию проводимости. Для последней оценки использована модель для эффективной проводимости среды с непроводящими частицами [13]

$$\sigma_e = \frac{2 - 2\varphi}{2 + \varphi} \sigma_0, \quad (16)$$

где φ – объемная доля непроводящих частиц. Приведенные оценки показывают, что при полях порядка 2 мТл для появления точек перегиба достаточно объемной доли примеси около 2 %.

Оценки характерных значений параметров для жидкого натрия

| Na_0 | B , мТл | k_σ | T^- , °С | T^+ , °С | φ^* |
|--------|-----------|------------|------------|------------|-------------|
| 7 | 1,0 | 0,22 | 130÷140 | 290÷300 | 0,158 |
| 10 | 1,5 | 0,07 | 180÷190 | 230÷240 | 0,048 |
| 12 | 1,8 | 0,025 | 190 | 210 | 0,017 |

Таким образом, точки перегиба в профиле скорости могут возникнуть при относительно небольших вариациях свойств проводящей жидкости даже при линейном распределении поперек слоя, а локализованные неоднородности (например гауссовы) всегда дают точки перегиба. Однако остается открытым важный вопрос о достаточном условии неустойчивости, то есть вопрос о реальной границе устойчивости таких течений. Ответ на него требует прямого численного решения полной системы уравнений либо лабораторных экспериментов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Пермского края № 22-19-20106, <https://rscf.ru/project/22-19-20106/>.

Литература

1. Hartmann, J. Hg Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field / J. Hartmann. – København: Levin & Munksgaard, Ejnar Munksgaard, 1937. – 28 p.
2. Hartmann, J. Hg Dynamics II. Experimental Investigations on the Flow of Mercury in a Homogeneous Magnetic Field / J. Hartmann, F. Lazarus. – København: Levin & Munksgaard, 1937. – 45 p.
3. Брановер, Г.Г. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Г.Г. Брановер, А.Б. Цинобер. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
4. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows / O. Zikanov, D. Krasnov, T. Boeck *et al.* // Applied Mechanics Reviews. – 2014. – Vol. 66, no. 3. – 030802.
5. Mixed Convection in Pipe and Duct Flows with Strong Magnetic Fields / O. Zikanov, I. Belyaev, Y. Listratov *et al.* // Applied Mechanics Reviews. – 2021. – Vol. 73, no. 1. – 010801.
6. Experimental Investigation of MHD Heat Transfer in a Vertical Round Tube Affected by Transverse Magnetic Field / I.A. Melnikov, E.V. Sviridov, V.G. Sviridov, N.G. Razuvanov // Fusion Engineering and Design. – 2016. – Vol. 112. – P. 505–512.
7. Buoyancy Effects in Vertical Rectangular Duct with Coplanar Magnetic Field and Single Sided Heat Load – Downward and Upward Flow / I.R. Kirillov, D.M. Obukhov, V.G. Sviridov *et al.* // Fusion Engineering and Design. – 2018. – Vol. 127. – P. 226–233.
8. Limits of Strong Magneto-Convective Fluctuations in Liquid Metal Flow in a Heated Vertical Pipe Affected By Transverse Magnetic Field / I. Belyaev, P. Sardov, I. Melnikov, P. Frick // International Journal of Thermal Sciences. – 2021. – Vol. 161. – 106773.
9. The Effect of Traveling and Rotating Magnetic Fields on The Structure of Aluminum Alloy During its Crystallization in a Cylindrical Crucible / S. Denisov, V. Dolgikh, S. Khripchenko *et al.* // Magnetohydrodynamics. – 2014. – Vol. 50, no. 4. – P. 407–422.
10. Liquid Metal Flows Driven by Rotating and Traveling Magnetic Fields / J. Stiller, K. Koal, W.E. Nagel *et al.* // European Physical Journal: Special Topics. – 2013. – Vol. 220, no. 1. – P. 111–122. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01801-8

11. Kolesnichenko, I. Investigation of Electromagnetic Force Action on Two-Phase Electrically Conducting Media in a Flat Layer / I. Kolesnichenko // *Magnetohydrodynamics*. – 2013. – Vol. 49, no. 1–2. – P. 217–222.

12. Application of Electromagnetic (EM) Separation Technology to Metal Refining Processes: A Review / L. Zhang, S. Wang, A. Dong *et al.* // *Metallurgical and Materials Transactions B*. – 2014. – Vol. 45. – P. 2153–2185.

13. Dobychnin, E.I. Force Action of an Electromagnetic Field on the Particles of an Inhomogeneous Medium / E.I. Dobychnin, V.I. Popov // *Magnetohydrodynamics*. – 1971. – Vol. 7, no. 2. – P. 163–166.

Поступила в редакцию 2 мая 2023 г.

Сведения об авторах

Окательев Роман Сергеевич – младший научный сотрудник, лаборатория технологической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Российская Федерация; Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, e-mail: okatev.r@icmm.ru.

Фрик Петр Готлобович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией физической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Российская Федерация; Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, e-mail: frick@icmm.ru.

Колесниченко Илья Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией технологической гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Российская Федерация, e-mail: kiv@icmm.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 3, pp. 34–42

DOI: 10.14529/mmp230304

HARTMANN FLOW IN A FLUID LAYER WITH SPATIALLY INHOMOGENEOUS PROPERTIES

R.S. Okatev^{1,2}, P.G. Frick^{1,2}, I.V. Kolesnichenko¹

¹ *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

² *Perm State University, Perm, Russian Federation*

E-mail: okatev.r@icmm.ru

Abstract. In this study we consider the flow of a spatially-inhomogeneous electrically conductive fluid between parallel planes in a transverse magnetic field. The distributions of electrical conductivity and viscosity of the fluid are given by linear functions. The slopes of these distributions characterize the maximum deviation of the fluid properties from their mean values. We show that inhomogeneity of the fluid properties leads to distortion of the velocity profiles. The resulting profiles are asymmetric and have inflection points. We use a quantity equal to the ratio of flow rates in the upper and lower halves of the layer as a quantitative measure of asymmetry. We determine the relationship between this quantity, the average Hartmann number, and the parameters of the distributions of inhomogeneous properties. We show that starting from a relatively small mean Hartmann number, the inflection points in the velocity profiles appear for any values of the distribution parameters. We provide estimates of characteristic temperatures and concentrations of non-conducting impurity for liquid sodium, at which the described effects appear.

Keywords: magnetohydrodynamics; Hartmann flow; inhomogeneous properties; electric conductivity.

References

1. Hartmann J. *Hg Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field*. København: Levin & Munksgaard, Ejnar Munksgaard, 1937, 28 p.

2. Hartmann, J., Freimut L. *Hg Dynamics II: Experimental Investigations on the Flow of Mercury in a Homogeneous Magnetic Field*. København: Levin & Munksgaard, 1937, 45 p.
3. Branover G.G., Tsynober A.B. *Magnitnaya gidrodinamika neszhimayemykh sred* (Magnetohydrodynamics of Incompressible Media), Moscow, Nauka Publ., 1970, 379 p.
4. Zikanov O., Krasnov D., Boeck T., Thess A., Rossi M. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows. *Applied Mechanics Reviews*, 2014, vol. 66, no. 3, 030802 (17 pages). DOI: 10.1115/1.4027198
5. Zikanov O., Belyaev I., Listratov Y., Frick P., Razuvanov N., Sviridov V. Mixed Convection in Pipe and Duct Flows with Strong Magnetic Fields. *Applied Mechanics Reviews*, 2021, Vol. 73, no. 1, 010801 (35 pages). DOI: 10.1115/1.4049833
6. Melnikov I.A., Sviridov E.V., Sviridov V.G., Razuvanov N.G. Experimental Investigation of MHD Heat Transfer in a Vertical Round Tube Affected by Transverse Magnetic Field, *Fusion Engineering and Design*, 2016, Vol. 112, pp. 505–512. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2016.06.003
7. Kirillov I.R., Obukhov D.M., Sviridov V.G., Razuvanov N.G., Belyaev I.A., Poddubnyi I.I., Kostichev P.I. Buoyancy Effects in Vertical Rectangular Duct with Coplanar Magnetic Field and Single Sided Heat Load – Downward and Upward Flow, *Fusion Engineering and Design*, 2018, Vol. 127, pp. 226–233. DOI: 10.1016/j.fusengdes.2018.01.006
8. Belyaev I., Sardov P., Melnikov I., Frick P. Limits of Strong Magneto-Convective Fluctuations in Liquid Metal Flow in a Heated Vertical Pipe Affected by Transverse Magnetic Field. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021, Vol. 161, 106773. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2020.106773
9. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., Nikulin L. The Effect of Traveling and Rotating Magnetic Fields on The Structure of Aluminum Alloy During its Crystallization in a Cylindrical Crucible. *Magnetohydrodynamics*, 2014, Vol. 50, no. 4, pp. 407–422. DOI: 10.22364/mhd.50.4.8
10. Stiller J., Koal K., Nagel W.E., Pal J., Cramer A. Liquid Metal Flows Driven by Rotating and Traveling Magnetic Fields. *European Physical Journal: Special Topics*, 2013, Vol. 220, no. 1, pp. 111–122. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01801-8
11. Kolesnichenko I. Investigation of Electromagnetic Force Action on Two-Phase Electrically Conducting Media in a Flat Layer. *Magnetohydrodynamics*, 2013, Vol. 49, no. 1–2, pp. 217–222. DOI: 10.22364/mhd.49.1-2.27
12. Zhang L., Wang S., Dong A., Gao J., Damoah L. Application of Electromagnetic (EM) Separation Technology to Metal Refining Processes: A Review. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 2014, Vol. 45, pp. 2153–2185. DOI: 10.1007/s11663-014-0123-y
13. Dobychin E.I., Popov V.I. Force Action of an Electromagnetic Field on the Particles of an Inhomogeneous Medium. *Magnetohydrodynamics*, 1971, Vol. 7, no. 2, pp. 163–166.

Received May 2, 2023

Information about the authors

Okatev Roman Sergeevich is Junior Research Fellow, Laboratory of Technological Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; Perm State University, Perm, Russian Federation, e-mail: okatev.r@icmm.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2741-1531>

Frick Peter Gotlobovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Laboratory of Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; Perm State University, Perm, Russian Federation, e-mail: frick@icmm.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7156-1583>

Kolesnichenko Ilya Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of Technological Hydrodynamics, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation, e-mail: kiv@icmm.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-9378-5334>