

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

В.В. Чупин, Д.Е. Черногубов

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: v.v.chupin@urfu.ru, d.e.chernogubov@urfu.ru

Аннотация. Разработан алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния упругих тонкостенных оболочечных систем, состоящих из оболочек вращения. Для решения нелинейной задачи сильного изгиба тонкой изотропной оболочки вращения, в которой не накладывается никаких ограничений на величины углов поворота нормали к исходной координатной поверхности, а относительная линейная деформация мала по сравнению с единицей, использовался метод Ньютона–Канторовича, сводящий нелинейную краевую задачу к итерационной последовательности линейных краевых задач. При решении линейных краевых задач применялся метод сведения их к ряду задач Коши, которые интегрировались численно, методом Рунге–Кутты. Для обеспечения устойчивости решения жестких задач Коши применен метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова. На основе данного алгоритма написана программа для ЭВМ, позволяющая определять параметры напряженно-деформированного состояния оболочек в широком диапазоне изменения геометрических, физических, силовых параметров и граничных условий. Исследовано напряженно-деформированное состояние пологих сферических панелей постоянной толщины с защемлением на внешнем контуре под действием равномерного внешнего давления. Исследован процесс формирования петель на кривой деформирования в зависимости от высоты оболочки. Изменение высоты оболочки при неизменном радиусе опорного контура моделирует начальную неправильность в ее изготовлении.

Ключевые слова: оболочка; деформация; сильный изгиб.

Введение

Тонкостенные оболочечные конструкции применяются в различных областях современной техники. В таких конструкциях под действием нагрузок могут возникать перемещения, не укладывающиеся в рамки линейной теории, что приводит к необходимости учета геометрической нелинейности [1–3]. Использование нелинейной теории позволяет определять напряженно-деформированное состояние (НДС) различного вида оболочек как в случае малых, так и больших прогибов. Однако с помощью этих уравнений значения критических нагрузок оказываются значительно больше значений, получаемых в результате экспериментов. Так, для сферических оболочек теоретически полученные значения критических нагрузок почти в 4 раза больше экспериментальных [4, 5]. Причин такого несоответствия результатов несколько. Это наличие у оболочки начальных неправильностей, начальных напряжений, отличие условий нагружения и закрепления от учитываемых в математической модели, неоднородность свойств материала, несимметричность деформирования и т. п. [4, 6]. Применение современных пакетов прикладных программ, основанных на методе конечных элементов [6], позволяет определять НДС и проводить сравнение с полученными решениями [7], но решение задач с высокой нелинейностью даже при использовании таких программ вызывает определенные трудности при получении решения. Таким образом, развитие методов расчета оболочек и учет их начальных несовершенств является актуальным и имеет важное прикладное значение.

Задача исследования сильного изгиба упругой оболочки вращения

Рассматривается геометрически нелинейная задача сильного изгиба тонкой изотропной оболочки вращения, в которой не накладывается никаких ограничений на величины углов поворота нормали к исходной координатной поверхности, а относительная линейная деформация мала по сравнению с единицей. Нагрузка, действующая на оболочку, осесимметричная.

Для оболочки, испытывающей осесимметричную деформацию, уравнения равновесия в координатах деформированной поверхности имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{r}\tilde{N}_s)}{d\tilde{s}} - \tilde{N}_\theta \cos \tilde{\varphi} + \tilde{r} \frac{\tilde{Q}_s}{\tilde{R}_s} + \tilde{r}\tilde{q}_s &= 0; \\ \frac{d(\tilde{r}\tilde{Q}_s)}{d\tilde{s}} - \tilde{r} \left(\frac{\tilde{N}_s}{\tilde{R}_s} + \frac{\tilde{N}_\theta}{\tilde{R}_\theta} \right) + \tilde{r}\tilde{q}_\zeta &= 0; \\ \frac{d(\tilde{r}\tilde{M}_s)}{d\tilde{s}} - \tilde{M}_\theta \cos \tilde{\varphi} - \tilde{r}\tilde{Q}_s - \tilde{m}_s &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь N_s, Q_s, M_s – продольные, поперечные силы и изгибающие моменты в меридиональном направлении, N_θ, M_θ – усилия в окружном направлении, R_s, R_θ – радиусы главных кривизн в меридиональном и окружном направлениях, r – радиус параллельного круга, s – длина дуги меридиана, q_s – касательная и q_ζ – нормальная составляющие распределенных нагрузок, m_s – внешний распределенный момент. Тильдами сверху отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию оболочечного элемента.

Геометрические соотношения для оболочки в предположении осесимметричной деформации

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_x}{d\tilde{s}} &= \tilde{\varepsilon}_s \cos \tilde{\varphi} + \cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi; \\ \frac{d\tilde{u}_z}{d\tilde{s}} &= \tilde{\varepsilon}_s \sin \tilde{\varphi} + \sin \tilde{\varphi} - \sin \varphi; \\ \frac{d\tilde{\theta}_s}{d\tilde{s}} &= \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tilde{s}} - \frac{d\varphi}{d\tilde{s}} = (1 + \tilde{\varepsilon}_s)\tilde{\chi}_s + \frac{\tilde{\varepsilon}_s}{R_s}; \\ \tilde{\varepsilon}_\theta &= \frac{\tilde{u}_x}{r}; \quad \tilde{\chi}_\theta = \frac{\sin \tilde{\varphi}}{\tilde{r}} - \frac{\sin \varphi}{r}; \\ \tilde{\chi}_s &= \frac{1}{\tilde{R}_s} - \frac{1}{R_s}; \quad \tilde{\varepsilon}_s = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{s}} + \frac{\tilde{w}}{R_s} + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_s)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \chi_s, \chi_\theta$ – относительные деформации удлинения и изменения кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях.

Соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с компонентами полной деформации с учетом гипотезы недеформируемых нормалей, имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_s &= C_{11}\tilde{\varepsilon}_s + C_{12}\tilde{\varepsilon}_\theta + K_{11}\tilde{\chi}_s + K_{12}\tilde{\chi}_\theta; \quad \tilde{N}_\theta = C_{21}\tilde{\varepsilon}_s + C_{22}\tilde{\varepsilon}_\theta + K_{21}\tilde{\chi}_s + K_{22}\tilde{\chi}_\theta; \\ \tilde{S} &= C_{66}\tilde{\varepsilon}_{s\theta} + 2K_{66}\tilde{\chi}_{s\theta}; \quad \tilde{M}_s = K_{11}\tilde{\varepsilon}_s + K_{12}\tilde{\varepsilon}_\theta + D_{11}\tilde{\chi}_s + D_{12}\tilde{\chi}_\theta; \\ \tilde{M}_\theta &= K_{21}\tilde{\varepsilon}_s + K_{22}\tilde{\varepsilon}_\theta + D_{21}\tilde{\chi}_s + D_{22}\tilde{\chi}_\theta; \quad \tilde{H} = K_{66}\tilde{\varepsilon}_{s\theta} + D_{66}\tilde{\chi}_{s\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N_s, N_θ, S – мембранные усилия, M_s, M_θ, H – изгибающие и крутящий моменты, $\varepsilon_{s\theta}$ – относительная деформация сдвига, $\chi_{s\theta}$ – кручение координатной поверхности, C_{mp}, K_{mp}, D_{mp} ($m, p = 1, 2$) – коэффициенты упругости.

Для изотропных оболочек

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}; \quad C_{12} = \nu C_{11}; \quad C_{66} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}; \quad D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \\ D_{12} &= \nu D_{11}; \quad D_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}; \quad K_{11} = K_{12} = K_{22} = K_{66} = 0, \end{aligned}$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки.

Для получения разрешающей системы уравнений уравнения (1)–(3) необходимо дополнить граничными условиями.

Например, для жестко защемленного левого края и свободного правого

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x = \tilde{u}_z = \tilde{\theta}_s &= 0, \quad \text{при } s = s_0, \\ \tilde{N}_x = \tilde{N}_z = \tilde{M}_s &= 0, \quad \text{при } s = s_N. \end{aligned}$$

Для решения задачи использовался метод Ньютона–Канторовича, сводящий нелинейную краевую задачу к итерационной последовательности линейных краевых задач. При решении линейных краевых задач применялся метод сведения их к ряду задач Коши, которые интегрировались численно методом Рунге–Кутты. Для обеспечения устойчивости решения жестких задач Коши применен метод дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Основные результаты

Исследовано напряженно-деформированное состояние пологих сферических панелей постоянной толщины с защемлением на внешнем контуре под действием равномерного внешнего давления (рис. 1).

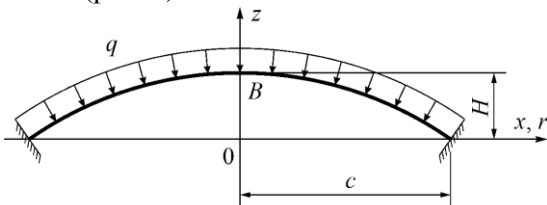


Рис. 1. Расчетная схема оболочки

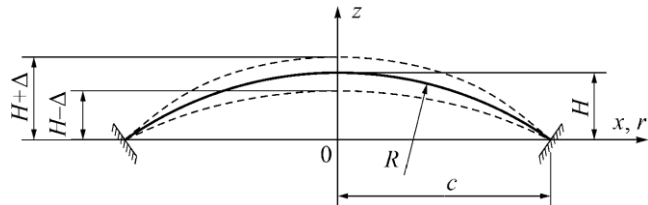


Рис. 2. Схемы сферических оболочек

Оболочки (рис. 2) имеют характеристики: модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 1$ мм, радиус опорного контура $c = 100$ мм. Образующие оболочек очерчены по окружностям, их параметры приведены в табл. 1. Параметр пологости [1] вычислялся по формуле $b = \sqrt[4]{12(1 - \nu^2)} \frac{c}{\sqrt{Rh}}$.

Таблица 1

Параметры исследуемых оболочек			
№	R , мм	Δ , мм	Параметр пологости b
1	516,5	0	8,00
2	543,84	-0,5	7,80
3	574,32	-1,0	7,59
4	608,51	-1,5	7,37
5	647,14	-2,0	7,15
6	491,85	0,5	8,20
7	469,51	1,0	8,39
8	449,17	1,5	8,58
9	430,59	2,0	8,76

На рис. 3 и 4 приведены кривые деформирования оболочек в координатах: внешнее давление – прогиб полюса при разных высотах ($H + \Delta$), где $\Delta = -2 \dots 2$ мм. Номера кривых соответствуют строкам в табл. 1.

При уменьшении высоты оболочки происходит снижение внешней нагрузки в предельных точках, а при увеличении высоты оболочки значение внешнего давления в первой предельной точке существенно не изменяется.

Кривая 6 имеет петли, а на кривых 7, 8, 9 петли пропадают и остается одна предельная точка.

Для отыскания момента исчезновения петли получены две кривые, приведенные на рис. 5. Параметры оболочек, соответствующие этим кривым, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры оболочек			
№	R , мм	Δ , мм	Параметр пологости b
1	501,41	0,3	8,12
2	496,58	0,4	8,16
3	480,41	0,75	8,29
4	479,97	0,76	8,30

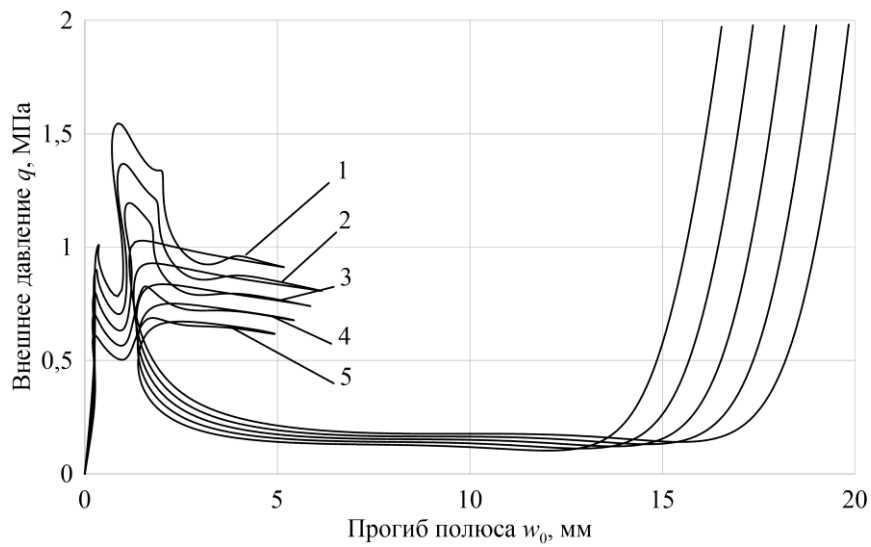


Рис. 3. Кривые деформирования оболочек

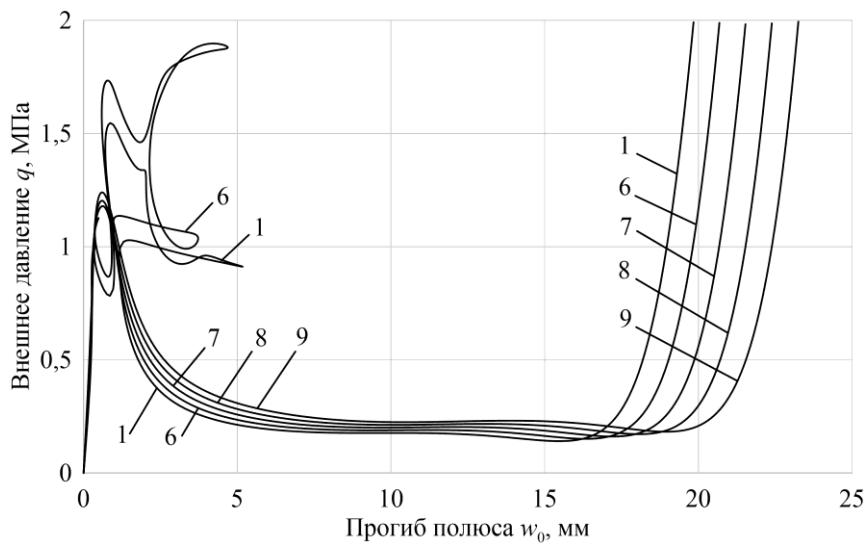


Рис. 4. Кривые деформирования оболочек

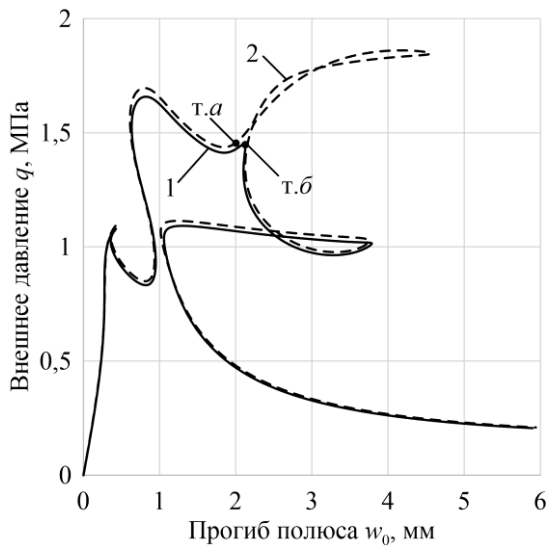


Рис. 5. Кривые деформирования оболочек

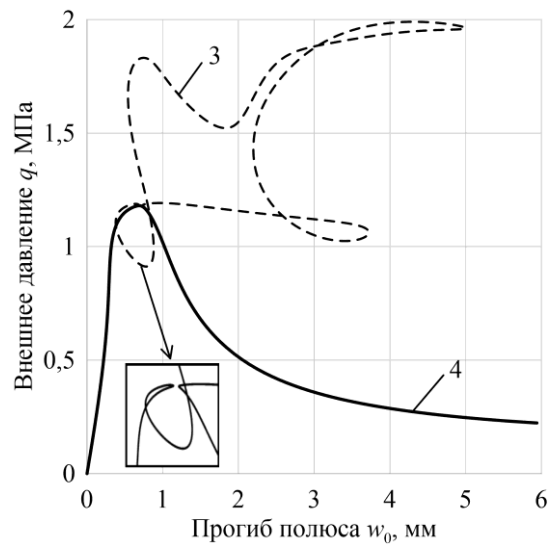


Рис. 6. Кривые деформирования оболочек

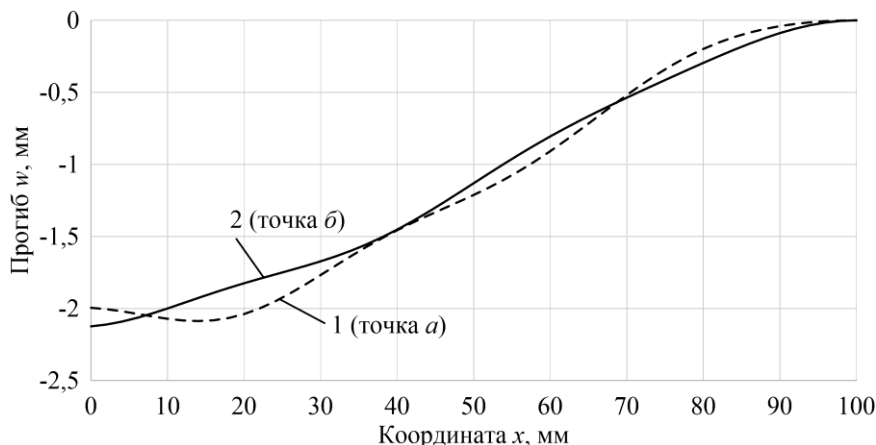


Рис. 7. Кривые прогибов

На рис. 7 приведены кривые прогибов оболочек для точек *a*, *b* (рис. 5). При переходе от точки *a* к *b* происходит «прощелкивание» четырех кольцевых поясов вдоль образующей оболочки.

Для определения момента исчезновения всех петель и перехода к кривой с одной предельной точкой получены две кривые, приведенные на рис. 6. Параметры оболочек, соответствующие этим кривым, приведены в табл. 2.

В окрестности первой предельной точки происходит смыкание двух ветвей петли, в результате получается гладкая кривая с одной предельной точкой.

Все расчеты выполнены по разработанной авторами программе, что подтверждает эффективность использованных алгоритмов.

Литература

1. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
2. Гаврюшин, С.С. Разработка методов расчета и проектирования упругих оболочечных конструкций приборных устройств: дисс. ... д-ра техн. наук / С.С. Гаврюшин. – Москва, 1994. – 316 с.
3. Гаврюшин, С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек / С.С. Гаврюшин // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – Вып. 1. – С. 115–130.
4. Григолюк, Э.И. Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // Известия МГТУ МАМИ. – 2008. – № 1(5). – С. 233–246.
5. Григолюк, Э.И. Несимметричное поведение полой сферической оболочки при конечных прогибах / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // Доклады Академии наук. – 2003. – Т. 388, № 4. – С. 477–481.
6. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек / В.А. Баженов, Н.А. Соловей, О.П. Кривенко, О.А. Мищенко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 5. – С. 14–33.
7. Подкопаев, С.А. Методика исследования закритического поведения осесимметричных мембран, используемых в промышленном интернете вещей / С.А. Подкопаев, С.С. Гаврюшин // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела: Межвузовский сборник научных трудов. Выпуск 3. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2020. – С. 73–83.
8. Чупин, В.В. Сильный изгиб и устойчивость составных оболочек вращения при осесимметричном нагружении с учетом пластических деформаций : монография / В.В. Чупин, Д.Е. Черногубов. – Деп. в ВИНТИ РАН 10.09.2018, № 102-В2018. – 285 с.

Поступила в редакцию 15 марта 2023 г.

Сведения об авторах

Чупин Владимир Васильевич – доктор технических наук, профессор, кафедра строительной механики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: v.v.chupin@urfu.ru.

Черногубов Дмитрий Евгеньевич – кандидат технических наук, доцент, кафедра строительной механики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: d.e.chernogubov@urfu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 3, pp. 55–61

DOI: 10.14529/mmph230306

STUDYING THE COSTCRITICAL DEFORMATIONS OF SHUTTER SPHERICAL PANELS OF CONSTANT THICKNESS

V.V. Chupin, D.E. Chernogubov

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation
E-mail: v.v.chupin@urfu.ru, d.e.chernogubov@urfu.ru

Abstract. An algorithm for studying the stress-strain state of elastic thin-walled shell systems consisting of shells of revolution has been developed. To solve the nonlinear problem of strong bending of a thin isotropic shell of revolution, in which no restrictions are imposed on the angles of rotation of the normal to the original coordinate surface and the relative linear deformation is small compared to unity, we used the Newton-Kantorovich, which reduces the nonlinear boundary value problem to an iterative sequence of linear boundary value problems. A method was applied to reduce the linear boundary problems to several Cauchy problems, which were integrated numerically using the Runge-Kutta method. To ensure the stability of the solution of stiff Cauchy problems, S.K. Godunov's method of discrete orthogonalization was applied. Based on this algorithm, a computer program was written to determine the parameters of the stress-strain state of shells with a wide range of changes in geometric, physical, and force parameters and boundary conditions. The stress-strain state of sloping spherical panels of constant thickness with pinching on the outer contour under uniform external pressure has been studied. The process of the formation of loops on the deformation curve depending on the height of the shell has been investigated. Changes in the height of the shell with a constant support contour radius simulates the initial irregularity in its manufacture.

Keywords: shell; deformation; strong bending.

References

1. Novozhilov V.V. *Osnovy nelineynoy teorii uprugosti* (Fundamentals of Nonlinear Elasticity). Moscow, Gostehizdat Publ, 1948, 211 p. (in Russ.).
2. Gavryushin S.S. *Razrabotka metodov rascheta i proektirovaniya uprugikh obolocheknykh konstruktivnykh priborov: diss. ... d-ra tekhn. nauk* (Development of Methods for Calculating and Designing Elastic Shell Structures of Instrument Devices: Dissertation. dr. eng. sci.). Moscow, 1994, 316 p. (in Russ.).
3. Gavryushin S.S. Chislennoe modelirovanie protsessov nelineynogo deformirovaniya tonkikh uprugikh obolochek (Numerical Modeling of the Processes of Nonlinear Deformation of Thin Elastic Shells). *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*. 2014, Iss. 1, pp. 115–130. (in Russ.).
4. Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. Vliyaniye osesimmetrichnykh nachal'nykh nepravil'nostey sfericheskoy obolochki na ee kriticheskuyu nagruzku (Influence of Axisymmetric Initial Irregularities of a Spherical Shell on its Critical Load). *Izvestiya MGTU MAMI*, 2008, no. 1(5), pp. 233–246. (in Russ.).
5. Grigolyuk É.I., Lopanitsyn E.A. Asymmetric Behavior of a Sloping Spherical Shell under Finite Deflections. *Doklady Physics*, 2003, Vol. 48, no. 2, pp. 80–83.

6. Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O.A. Modeling of Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneities Shells. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy*, 2014, no. 5, pp. 14–33. (in Russ.).

7. Podkopaev S.A., Gavryushin S.S. Metodika issledovaniya zakriticheskogo povedeniya osesimmetrichnykh membran, ispol'zuemykh v promyshlennom internete veshchey (Methodology for Studying the Supercritical Behavior of Axisymmetric Membranes used in the Industrial Internet of Things). *Matematicheskoe modelirovanie i eksperimental'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela: Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov. Vypusk 3* (Mathematical modeling and experimental mechanics of deformable solids: Interuniversity collection of scientific papers. Issue 3). Tver': Tverskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet Publ., 2020, pp. 73–83. (in Russ.).

8. Chupin V.V., Chernogubov D.E. *Sil'nyy izgib i ustoychivost' sostavnykh obolochek vrashcheniya pri osesimmetrichnom nagruzhении s uchetom plasticheskikh deformatsiy: monografiya* (Strong Bending and Stability of Compound Shells of Revolution under Axisymmetric Loading with Allowance for Plastic Deformations: Monograph). *Dep. v VINITI RAN* 10.09.2018, no. 102-V2018, 285 pp. (in Russ.).

Received March 15, 2023

Information about the authors

Chupin Vladimir Vasilyevich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Department of Structural Mechanics, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: v.v.chupin@urfu.ru.

Chernogubov Dmitry Evgenievich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Department of Structural Mechanics, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, e-mail: d.e.chernogubov@urfu.ru.