Математика

УДК 517.965 DOI: 10.14529/mmph230401

СВОЙСТВА И ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОСТОЙ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

В.Л. Дильман
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Аннотация. Исследуются линейные функциональные уравнения, заданные в поле комплексных чисел на простых гладких кривых, с функцией сдвига бесконечного порядка. Функция сдвига имеет ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и неподвижные точки только на концах кривой. В статье дано полное описание множеств решений таких уравнений в классах непрерывных, гельдеровских и первообразных от лебеговских функций с коэффициентом и правой частью из таких же классов в зависимости от значений коэффициента уравнения на концах кривой. Установлены достаточные условия принадлежности решений указанным функциональным классам.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения со сдвигом; линейные функциональные уравнения от одной переменной; гельдеровы классы функций, классы первообразных от лебеговских функций.

Восьмидесятилетнему юбилею
ЮУрГУ посвящается

Введение

В работах [1, 2] изучались свойства решений сингулярных интегральных уравнений с двумя логарифмическими особенностями. Ядрами таких уравнений являются интегралы типа Коши с переменными верхним и нижним пределами. Эти пределы находятся в заданной функциональной зависимости (обозначим ее α). Такие уравнения связаны с теорией краевых задач и сингулярных интегральных уравнений со сдвигом [3–5]. Схема решения таких уравнений на одном из шагов заключается в решении (и, следовательно, в исследовании) линейных функциональных уравнений (ЛФУ)

$$\left(F_g\left(\psi\right)\right)(t) \equiv \psi\left(\alpha(t)\right) - g(t)\psi(t) = h(t), \qquad (1)$$

заданных на гладких кривых $\Gamma = [ab]$ комплексной плоскости. Наибольший интерес с точки зрения [1, 2] представляют вопросы инвариантности оператора, обратного к $\left(F_g\left(\psi\right)\right)$, относительно гельдеровских и лебеговских классов функций, а также классов первообразных от функций указанных классов. При этом важно понять, как меняются параметры, характеризующие эти классы, при переходе от правой части уравнения к его решению.

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (1) и его обобщениями. В них изучались вопросы существования решений, условий единственности, описания общих решений в основном в классах непрерывных функций [6–13]. В работах [11–13] рассматривались ЛФУ с функциями сдвига α, порождающими конечную группу относительно суперпозиции. Такие ЛФУ появляются при математическом моделировании методов защиты человека и окружающей среды при процессах переноса заряженных частиц и ионизированных излучений. Ряд работ посвящен функциональному уравнению со сдвигом на числовой прямой (уравнению Коши) и его обобщениям [14–18] в основном в классах непрерывных функций. В гельдеровских, лебеговских классах функций, а также в классах, первообразных от них, исследования проводились в работах [19–21]. В этих работах установлено, что существование, единственность, размерность пространства решений в случае отсутствия единственности зависят от значений коэффициента $g(t)$ уравнения (1) в неподвижных точках, как правило, от знаков величин $\left|g(a)\right|-1,\ \left|g(b)\right|-1$.

Естественной областью определения функций из (1) (областью задания уравнения (1)) является кривая, содержащая один из концов и не содержащая другой: $[a;b)$ или $(a;b]$. Тогда можно построить решение (или бесконечный класс решений) с непрерывным продолжением на этот конец. Непрерывное продолжение на другой конец не всегда возможно. В работе исследуются свойства решений уравнения (1), заданных на кривой, содержащей оба конца, что требуется с точки зрения приложений. Цель статьи – дать полное описание множеств решений на $[a;b]$, исчерпывающе сформулировать критерии существования и единственности решений таких уравнений в классах непрерывных, гельдеровских и первообразных от лебеговских функций A_p с коэффициентом и правой частью из таких же классов в зависимости от значений коэффициента уравнения на концах кривой.

С точки зрения приложений к сингулярным интегральным уравнениям [2, 19] специальный интерес представляют решения уравнения (1) такие, что $\psi(b)=0$ (и тогда должно выполняться условие $h(b)=0$). Действительно, в сингулярных интегральных уравнениях с двумя подвижными логарифмическими особенностями в ядре уравнению (1) удовлетворяет функция

$$\psi(t)=\int_t^b \varphi(\tau)\,d\tau,$$

где φ – искомая функция. В работе рассмотрен этот случай. Заметим, что рассмотрение этого случая не сужает общей ситуации, так как общий случай легко сводится к данному заменой искомой функции по формуле $\nu(t)=\psi(t)-\psi(b)$.

Тогда (1) приобретает вид:

$$\nu(\alpha(t))=g(t)\nu(t)+h_1(t), \tag{2}$$

где $h_1(t)=g(t)\psi(b)+h(b)$, причем решение уравнения (2) удовлетворяет, в силу сделанной замены, условию $\nu(b)=0$, и $h_1(b)=0$. Ясно, что функции $\nu(t)=\psi(t)-\psi(b)$ и $\nu(t)=\psi(t)-\psi(b)$ одновременно принадлежат рассмотренным ниже классам функций, поэтому все результаты, относящиеся к уравнениям (1) с условием $h(b)=0$, выполняются и в общем случае.

Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\Gamma=[a;b]$ – гладкая разомкнутая кривая на комплексной плоскости. Класс непрерывных на Γ комплексных комплекснозначных функций обозначим C^{Γ} или просто C. Класс функций φ с условием Гельдера на Γ:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<K|t_1-t_2|^{\mu}, \quad t_1,t_2\in\Gamma,\ 0<\mu\le 1.$$

Обозначим $H_{\mu}^{\Gamma}(K)$, или чаще более коротко $H_{\mu}(K)$ или H_{μ}; положим $H_{\mu}^{\Gamma}=\bigcap\limits_{0<\nu<\mu} H_{\nu}^{\Gamma}$.

Очевидно, $H_{\mu}\subseteq H_{\mu}$. Класс функций, абсолютно интегрируемых на Γ со степенью p, обозначим L_p^{Γ}, или L_p. Класс первообразных от L_p обозначим A_p; положим $A_p^{\Gamma}=\bigcap\limits_{1\le q<p} A_q^{\Gamma}$, $p>1$. Очевидно, $A_p\subseteq A_p$.

В качестве функции «сдвига» $\alpha=\alpha(t)$, $t\in\Gamma$, в ЛФУ (1) примем отображение кривой Γ на себя, удовлетворяющее свойствам:

1) α – непрерывная биекция кривой Γ на себя с сохранением ориентации;
2) на Γ точки a и b, и только они являются неподвижными относительно биекции α;
3) $\forall t\in\Gamma\ \exists\alpha'(t)\ne 0$ с условием $\alpha'\in H_{\theta}$ на Γ, $\theta\in(0;1]$;
4) $|\alpha'(a)|\ne 1$, $|\alpha'(b)|\ne 1$.

Целочисленные нижние индексы у α понимаем в смысле: $\alpha_0(t)\equiv t$, $\alpha_1(t)\equiv\alpha(t)$, $\alpha_n(t)\equiv\alpha(\alpha_{n-1}(t))$, $\alpha_{-1}(t)$ – обратно к α, $\alpha_{-n}(t)\equiv\alpha_{-1}(\alpha_{-n+1}(t))$, $n=\overline{1,\infty}$. Заметим: $\alpha_n(\alpha_{-n}(t))\equiv\alpha_{-n}(\alpha_n(t))\equiv t$.

Если $\forall t\in(a;b)$ $\alpha(t)\in(a;t)$, точку a назовем *притягивающей неподвижной точкой* (п. н. т.). Если же $\alpha(t)\in(t;b)$, то точку b назовем *отталкивающей неподвижной точкой* (о. н. т.). Всегда либо точка a – п. н. т., а точка b – о. н. т., либо наоборот, a – о. н. т., а точка b – п. н. т.

Не ограничивая общности результатов работы, всюду полагаем, что a – п. н. т., а b – о. н. т. Тогда условие 4 приобретает вид:

4*. $|\alpha'(a)|<1$, $|\alpha'(b)|>1$.

Введем обозначения.

Для $\forall c\in(a;b)$ положим $I_n(c)=[\alpha_n(c);\alpha_{n-1}(c)]$, $n=\overline{1,\infty}$. Пусть

$$G_n(t)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)},\ G_0(t)\equiv 1,\ \ G_\infty(t)=\prod_{j=0}^{\infty}\frac{g(\alpha_j(t))}{g(a)},\ \ G_{-n}(t)=\prod_{j=1}^{n}\frac{g(b)}{g(\alpha_{-j}(t))},\ \ n=\overline{1,\infty}. \quad (3)$$

Из любого утверждения, относящегося к о. н. т., автоматически выводится аналогичное утверждение для п. н. т., и наоборот. Другими словами, имеются пары двойственных утверждений, получаемых друг из друга перестановкой букв a и b и заменой неравенств с участием этих букв на противоположные.

Основные результаты

Сформулируем результаты, относящиеся к вопросам существования, количества и свойств решений ЛФУ (1), определенного на кривой $\Gamma=[a;b]$. Большая часть сформулированных ниже теорем следует из результатов работ [19–21], доказанных в основном для кривых, не содержащих одну из концевых точек. В окрестности этой точки решение, как и функции $g(t)$ и $h(t)$, может не иметь непрерывного продолжения. Рассмотрение уравнения (1) на кривой, содержащей оба конца, может принципиально изменить результаты.

Заметим, что если $|g(b)|>1$, то ЛФУ (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе $C^{(a;b]}$ (следует из [20], теорема 2), или двойственное утверждение, если $|g(a)|<1$, то ЛФУ (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе $C^{[a;b)}$ (следует из [21], теорема 1).

Если $|g(a)|\ge 1$ (кроме случая $g(a)=1$), то уравнение (1) имеет единственное решение в классе $C^{[a;b)}$ (следует из [19], теоремы 2 и 4). Двойственное утверждение имеет вид: если $|g(b)|\le 1$ (кроме случая $g(b)=1$), то уравнение (1) имеет единственное решение в классе $C^{(a;b]}$.

Переход к $\Gamma=[a;b]$ от $[a;b)$ или $(a;b]$ существенно усложняет ситуацию, особенно с точки зрения свойств решений. В этом случае решений может не быть вообще (см. теорему 5 ниже). Приведем формулировки соответствующих теорем и двойственных к ним в тех случаях, когда эти двойственные теоремы имеются. Свойства решений, приведенные в этих теоремах, получены из теорем работ [19–21] как конъюнкции свойств решений в случаях рассмотрения этих уравнений на $[a;b)$ и $(a;b]$.

Во всех теоремах предполагается $h(b)=0$. Как было замечено выше, это ограничение не снижает общности сформулированных ниже теорем. Будем обозначать значком ∃! существование единственного решения уравнения (1) в указанном классе.

Теорема 1. Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\ne 0$, $t\in[a;b]$. Пусть $|g(a)|>1$, $|g(b)|>1$. Тогда ∃! решение (1) в $C^{[a;b]}$, определяемое формулами:

$$\psi(a)=\frac{h(a)}{1-g(a)};\ \psi(b)=0;\ ,\ \psi(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{(g(a))^{k+1}G_{k+1}(t)},\ t\in(a;b). \tag{4}$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\frac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in A_p^{[a;b]}$.

Замечание 1. Значения $\psi(a)$ и $\psi(b)$ в (4) могут быть вычислены по последней формуле (4). Они выписаны явно для большей наглядности.

Замечание 2. Ограничения на μ и p в заключении теоремы связаны с поведением решения в окрестности о. н. т. b. Если рассматривать уравнение (1) только на $[a;b)$, то верны более сильные утверждения: $\psi\in H_\mu^{[a;b)}$; если $g,h\in A_p^{[a;b)}$, $p>1$, то $\psi\in A_p^{[a;b)}$.

Теорема 1' (двойственная к теореме 1). Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in[a;b]$. Пусть $|g(a)|<1$, $|g(b)|<1$. Тогда $\exists!$ решение (1) в $C^{[a;b]}$, определяемое формулами:

$$\psi(a)=\frac{h(a)}{1-g(a)};\ \psi(b)=0;\ ,\ \psi(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h(\alpha_{-k}(t))(g(b))^{k-1}}{G_{-k+1}(t)},\ t\in(a;b). \tag{5}$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\frac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in A_p^{[a;b]}$.

Перед доказательством теоремы 1 введем обозначения. Пусть $c\in(a;b)$ – любая точка; обозначим через $C_{c,g,h}$ класс функций f, определенных и непрерывных на $I_0(c)=[\alpha(c);c]$ и удовлетворяющих условию:

$$f(\alpha(c))-g(c)f(c)=h(c). \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Из теорем 2 и 4 работы [19] следует, что при условии $|g(a)|>1$ на $[a;b)$ $\exists!$ решение ψ^*, и оно имеет вид (4). Пусть $c\in(a;b)$ – любая точка. Тогда для ψ^*, как и для любого решения (1) на $I_0(c)=[\alpha(c);c]$, выполняется условие (6). Поэтому из доказательства теоремы 2 [20] следует, что $\exists!$ решение ψ^{**} ЛФУ на $(a;b]$, сужение которого на $I_0(c)$ совпадает с ψ^*. Тогда ψ^* и ψ^{**} совпадают на $(a;b)$. Поэтому функция

$$\psi=\begin{cases}\psi^*,\ t\in[a;b),\\ \psi^{**},\ t\in(a;b]\end{cases}$$

является единственным непрерывным решением ЛФУ (1) на $[a;b]$. Принадлежность этого решения указанным в формулировке теоремы функциональным классам непосредственно следует из результатов работ [19, 20].

Теорема 2. Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in(a;b]$. Пусть $|g(a)|<1$, $|g(b)|>1$. Тогда уравнение (1) имеет континуум линейно независимых решений в классе $C^{[a;b]}$, которые имеют вид:

$$\psi(a)=\frac{h(a)}{1-g(a)};\ \psi(b)=0;$$

$$\psi(t)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{n-1} g\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-n}(t)\right)+\sum\limits_{k=0}^{n-1} h\left(\alpha_{k-n}(t)\right)\prod\limits_{j=k+1}^{n-1} g\left(\alpha_{j-n}(t)\right),\ t\in I_n(c),\ n=2;3;...\\ g\left(\alpha_{-1}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-1}(t)\right)+h\left(\alpha_{-1}(t)\right),\ t\in I_1(c),\\ \psi_0(t),\ t\in I_0(c),\\ \prod\limits_{j=1}^{n-1} g^{-1}\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_n(t)\right)-\sum\limits_{k=1}^{n} h\left(\alpha_{n-k}(t)\right)\prod\limits_{j=k}^{n} g^{-1}\left(\alpha_{n-j}(t)\right),\ t\in I_{-n}(c),\ n=1;2;...\end{cases} \tag{7}$$

где функция $\psi_0\in C_{c,g,h}$ – произвольна.

Если $\mu<\min\left\{\log_{|\alpha'(a)|}\left|g(a)\right|;\ \log_{|\alpha'(b)|}\left|g(b)\right|\right\}$, и $\psi_0\in H_\mu$, то $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\dfrac{p-1}{p}<\min\left\{\log_{|\alpha'(a)|}\left|g(a)\right|;\ \log_{|\alpha'(b)|}\left|g(b)\right|\right\}$, $\psi_0\in A_{p_0}$, $p_0>1$, то $\psi\in A_{p_1}^{[a;b]}$ для $p_b=\min\{p;p_0;p_1;p_2\}$, $p_1=\left(1-\log_{|\alpha'(a)|}\left|g(a)\right|\right)^{-1}$, если $\left|g(a)\right|>\left|\alpha'(a)\right|$, и $p_2=\left(1-\log_{|\alpha'(b)|}\left|g(b)\right|\right)^{-1}$, если $\left|g(b)\right|<\left|\alpha'(b)\right|$, иначе $p_1=p_2=+\infty$.

Замечание 3. Условие (6) необходимо для того, чтобы в определении (7) функции ψ функция $\psi_0\in C_{c,g,h}$ имела непрерывное продолжение по формуле (7).

Замечание 4. У теоремы 2 двойственная теорема отсутствует.

Теорема 3. Пусть $g,h\in H_\mu$, $g(t)\neq 0$ на $[a;b]$, $|g(a)|=1, g(a)\neq 1$, $\left|g(b)\right|>1$. Тогда ∃! решение (1) в $C^{[a;b]}$, определяемое формулами:

$$\psi(b)=\frac{h(b)}{1-g(b)},\ \psi(t)=\frac{h(a)}{1-g(a)}-\frac{1}{1-g(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1-g(a))h(\alpha_k(t))-h(a)(1-g(\alpha_k(t))))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)},\ t\in[a;b).$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(b)|}\left|g(b)\right|$, то $\psi\in H_{\mu_1}^{[ab]}$, $\mu_1=\dfrac{\mu\theta}{1+\theta}$ (число θ введено в пункте 3 определения функции сдвига α). Если $g,h\in\tilde{A}_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\dfrac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(b)|}\left|g(b)\right|$, то $\psi\in A_{p_1}^{[a;b]}$, $p_1=\dfrac{p(1+\theta)}{p+\theta}$.

Теорема 3’ (двойственная к теореме 3). Пусть $g,h\in H_\mu$, $g(t)\neq 0$ на $[a;b]$, $\left|g(a)\right|<1$, $\left|g(b)\right|=1$, $g(b)\neq 1$. Тогда ∃! решение (1) в $C^{[a;b]}$, определяемое формулами:

$$\psi(a)=\frac{h(a)}{1-g(a)},\ \psi(t)=\frac{h(a)}{1-g(a)}-\frac{1}{1-g(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((1-g(a))h(\alpha_k(t))-h(a)(1-g(\alpha_k(t))))}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)},\ t\in[a;b].$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(a)|}\left|g(a)\right|$, то $\psi\in H_{\mu_1}^{[ab]}$, $\mu_1=\dfrac{\mu\theta}{1+\theta}$ (число θ введено в пункте 3 определения функции сдвига α). Если $g,h\in\tilde{A}_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\dfrac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(a)|}\left|g(a)\right|$, то $\psi\in A_{p_1}^{[a;b]}$, $p_1=\dfrac{p(1+\theta)}{p+\theta}$.

Теорема 4. Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in[a;b]$. Пусть $g(b)=1$, $\left|g(a)\right|>1$. Тогда уравнение (1) разрешимо в классе $C^{[a;b]}$ тогда и только тогда, когда $h(a)=0$. В этом случае общее решение является однопараметрическим семейством функций вида:

$$\psi(b)=0;\quad \psi(t)=\frac{C}{G_\infty(t)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)},\ t\in[a;b).$$

Частное решение при $\psi(a)=\psi_0$ имеет вид

$$\psi(t)=\frac{\psi_0}{G_\infty(t)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{G_{k+1}(t)},\ t\in[a;b].$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\frac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(b)|}|g(b)|$, то $\psi\in A_p^{[a;b]}$.

Теорема 4’ (двойственная к теореме 4). Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in[a;b]$. Пусть $g(b)=1$, $|g(a)|>1$. Тогда уравнение (1) разрешимо в классе $C^{[a;b]}$ тогда и только тогда, когда $h(b)=0$. В этом случае общее решение является однопараметрическим семейством функций вида:

$$\psi(a)=0;\ \ \psi(t)=C\prod_{j=1}^{\infty}g(\alpha_{-j}(t))+h(\alpha_{-1}(t))-\sum_{j=2}^{\infty}h(\alpha_{-j}(t))\prod_{k=1}^{j-1}g(\alpha_{-k}(t)),\ t\in(a;b].$$

Частное решение при $\psi(b)=\psi_0$ имеет вид

$$\psi(t)=\psi_0\prod_{j=1}^{\infty}g(\alpha_{-j}(t))+h(\alpha_{-1}(t))-\sum_{j=2}^{\infty}h(\alpha_{-j}(t))\prod_{k=1}^{j-1}g(\alpha_{-k}(t)),\ t\in[a;b].$$

Если $\mu<\log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$, то $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$. Если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, $\frac{p-1}{p}<\log_{|\alpha'(a)|}|g(a)|$, то $\psi\in A_p^{[a;b]}$.

Теорема 5. Пусть $h,g\in H_\mu$, $g(t)\neq 0, t\in[a;b]$. Пусть $|g(a)|\geq 1$, $|g(b)|\leq 1$. Тогда для существования единственного решения уравнения (1) в классе $C^{[a;b]}$ необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\forall t\in(a;b)\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{h(\alpha_k(t))}{(g(a))^{k+1}G_{k+1}(t)}=0,$$

где функция $G_k(t)$ определена в (3). При выполнении этого условия решение уравнения (1) единственно, причем $\psi\in H_\mu^{[a;b]}$; если $g,h\in A_p^{[a;b]}$, $p>1$, то $\psi\in A_p^{[a;b]}$.

Замечание 5. У теоремы 5 двойственная теорема отсутствует.

Выводы

Множество непрерывных решений уравнения (1) зависит исключительно от значений $|g(a)|$ и $|g(b)|$ в сравнении с единицей и может быть пустым (теорема 5), иметь единственное решение (теоремы 1, 1’, 3, 3’), иметь однопараметрическое семейство решений (теоремы 4 и 4’) и иметь бесконечное множество линейно независимых решений (теорема 2). Сохраняется принадлежность решения классу H_μ или классу A_p, которым принадлежат функции $g(t)$ и $h(t)$, но в общем случае с другими параметрами.

Литература

1. Чибрикова, Л.И. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами / Л.И. Чибрикова, Н.Б. Плещинский // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 6. – С. 91–104.

2. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p, $p>1$ / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.

3. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media Dordrecht, 2012. – 378 p.

4. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Science+Business Media, 2012. – 288 p.

5. Карлович, Ю.И. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю.И. Карлович, В.Г. Кравченко, Г.С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.

6. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy’s Equation and Jensen’s Inequality / M. Kuczma // Birkhäuser Basel, 2008. – 595 p.

7. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.

8. Пелюх, Г.П. Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский. – Киев: Инст. мат. НАН, 2013.

9. Бродский, Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – Киев: Вища школа, 1983. – 96 с.

10. Илолов, М. Об одном классе линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами / М. Илолов, Р. Авезов // Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2019. – Т. 177, № 4. – С. 7–12.

11. Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 231 с.

12. Лихтарников, Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – СПб: Лань, 1997. – 156 с.

13. Чернявский, В.П. Однозначность решений при использовании линейного функционального уравнения в модели радиационной защиты / В.П. Чернявский // Глобальная ядерная безопасность. – 2019. – № 4 (33). – С. 18–26.

14. Forti, G.L. Alternative Cauchy Equation in Three Unknown Functions / G.L. Forti // Aequashines Mathematicae. –2021. – Vol. 95, Iss. 6. – P. 1233–1242.

15. Reem, D. Remarks on the Cauchy Functional Equation and Variations of it / D. Reem // Aequashines Mathematicae. – 2017. – Vol. 91, Iss. 2. – P. 237–264.

16. Rätz, J. On the Functional Equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$/ J. Rätz // Aequashines Mathematicae. – 2013. – Vol. 86, Iss. 1-2. – P. 187–200.

17. Balcerowski, M. On the Functional Equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ / M. Balcerowski // Aequashines Mathematicae. – 2008. – Vol. 75, Iss. 3. – P. 297–303.

18. Brzdęk, J. On a Generalization of the Cauchy Functional Equation / J. Brzdęk // Aequashines Mathematicae. – 1993. – Vol. 46, Iss. 1-2. – P. 56–75.

19. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в гельдеровых классах функций на простой гладкой кривой / В.Л. Дильман // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 2. – С. 5–12.

20. Дильман, В.Л. Условия существования и единственности решений линейных функциональных уравнений в классах первообразных от лебеговских функций на простой гладкой кривой / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 13–23.

21. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в классах первообразных от лебеговских функций на отрезках кривых / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Челябинский физико-математический журнал. – 2023. – Т. 13, вып. 4. – С. 5–17.

Поступила в редакцию 12 мая 2023 г.

Сведения об авторах

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 4, pp. 5–13

DOI: 10.14529/mmph230401

PROPERTIES AND DESCRIPTION OF SOLUTION SETS OF LINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS ON A SIMPLE SMOOTH CURVE

V.L. Dilman
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Abstract. The article investigates linear functional equations given in the field of complex numbers on simple smooth curves with a shift function of infinite order. The shift function has a nonzero derivative satisfying the Helder condition, and fixed points only at the ends of the curve. The paper gives a complete description of the sets of solutions of such equations in the classes of continuous, Helder, and primitive Lebesgue functions with a coefficient and the right side of the same classes, depending on the values of the coefficient of the equation at the ends of the curve. Sufficient conditions have been established for the solutions to belong to the specified functional classes.

Keywords: singular integral equations with shift; linear functional equations from one variable; Helder function classes; classes of primitives from Lebesgue functions.

References

1. Chibrikova L.I., Pleshchinskiĭ N.B. Integral Equations with Generalized Logarithmic and Power Kernels. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1976, Vol. 20, no. 6, pp. 80–92.

2. Dil'man V.L., Chibrikova L.I. Solutions of an Integral Equation with Generalized Logarithmic Kernel in L_p, $p > 1$. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.

3. Litvinchuk G.S. Solvability *Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Springer Science+Business Media Dordrecht, 2012, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9

4. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Science+Business Media, 2012, 288 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1180-5

5. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's Theory of Singular Integral Operators with Shift. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika),* 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.

6. Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality.* Birkhäuser Basel, 2008, 595 p. DOI: 10.1007/978-3-7643-8749-5

7. Kravchenko V.G. On a Functional Equation with a Shift in the Space of Continuous Functions. *Mathematical Notes,* 1977,Vol. 22, Iss. 2, pp. 660–665. DOI: 10.1007/BF01780978

8. Pelyuh G.P., Sharkovskiy A.N. *Metod invariantov v teorii funktsional'nyh uravneniy* (Method of Invariants in the Functional Equations Theory). Kiyev: Inst. of Math. NAS, 2013. (in Russ.).

9. Brodskiy Ya.S., Slipenko A.K. *Funktsional'nye uravneniya* (Functional Equations). Kiev, Vishcha shkola, 1983, 96 p. (In Russ.).

10. Ilolov M., Avezov R. On a Class of Linear Functional Equations with Constant Coefficients. *Academy of Sciences of the Republic of Tadjikistan,* 2019, Vol, 177, no. 4, pp. 7–12. (in Russ.).

11. Antonevich A.B. *Lineynye funktsional'nye uravneniya: operatornyy podkhod* (Linear functional equations: an operator approach). Minsk, Izd-vo "Universitetskoe" Publ., 1988, 231 p. (in Russ.).

12. Likhtarnikov L.Ì. *Elementarnoie vvedenie v funktsyonal'nye uravneniya* (An Elementary Introduction to Functional Equations). Sankt-Peterburg, Lan' Publ., 1997, 156 p. (in Russ.).

13. Cherniavsky V.P. Unambiguity of Decisions when using Linear Functional Equation in the Radiation Protection Model. *Global nuclear security,* 2019, no. 4 (33), pp. 18–26. (in Russ.).

14. Forti G.L. Alternative Cauchy Equation in Three Unknown Functions. *Aequashines Mathematicae*, 2021, Vol. 95, Iss. 6, pp. 1233–1242. DOI: 10.1007/s00010-021-00795-w

15. Reem D. Remarks on the Cauchy Functional Equation and Variations of it. *Aequashines Mathematicae*, 2017, Vol. 91, Iss. 2, pp. 237–264. DOI: 10.1007/s00010-016-0463-6

16. Rätz J. On the Functional Equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$. *Aequashines Mathematicae*, 2013, Vol. 86, Iss. 1-2, pp. 187–200. DOI: 10.1007/s00010-013-0188-8

17. On the Functional Equation $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$. *Aequashines Mathematicae*, 2008, Vol. 75, Iss. 3, pp. 297–303. DOI: 10.1007/s00010-007-2905-7

18. Brzdęk J. On a Generalization of the Cauchy Functional Equation. *Aequashines Mathematicae*, 1993, Vol. 46, Iss. 1-2, pp. 56–75.

19. Dil'man V.L. Linear Functional Equations in the Hölder Class Functions on a Simple Smooth Curve. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2020, Vol. 12, no. 2, pp. 5–12. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph200201

20. Dil'man V.L., Komissarova D.A. Existence and Uniqueness Conditions for Solutions of Linear Functional Equations in the Classes of Antiderivatives from Lebesgue Function on a Simple Smooth Curve. *Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2021, Vol. 13, no. 4, pp. 13–23. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph210402

21. Dilman V.L., Komissarova D.A. Linear Functional Equations in the Class of Antiderivatives from the Lebesgue Functions on Curves Segments. *Chelyabinskiy fiziko-matematicheskiy zhurnal*, 2023, Vol. 8, Iss. 1, pp. 5–17. (in Russ.). DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101

Received May 12, 2023

Information about the author

Dilman Valeriy Leyzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru.