УДК 517.928 DOI: 10.14529/mmph230402

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ГОЛЬДШТИКА

***В.Н. Павленко*[1]*, Е.А. Деркунова*[2]**
[1] *Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
[2] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
E-mail: derkunovaea@susu.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной по фазовой переменной нелинейностью, в правую часть которого включен малый параметр. Наряду с этим тот же параметр возникает в записи начальных условий. Это приводит к ситуации, когда исследуемая задача из классической переходит в разряд сингулярно возмущенных. Решить задачу в такой постановке, во-первых, представляется возможным, исходя из понятия точного решения, средствами теории уравнений с разрывными нелинейностями; во-вторых, как сингулярно возмущенную – методом построения асимптотики погранслойного типа. Поскольку точное решение терпит разрыв в начальной точке, что в физическом смысле не оправданно, то производится аппроксимация уравнения с целью получить приближенное сглаженное решение. Для него требуется определенная сходимость к точному решению при стремлении малого параметра к нулю. Уравнение со сглаженной правой частью дает решение в квадратурах. Затем доказывается близость его асимптотики к точному решению. Из экспоненциальной близости асимптотики к приближенному решению следует для последнего требуемое поведение.

Ключевые слова: разрывные нелинейности; задача Гольдштика; сингулярные возмущения; асимптотическое разложение; пограничные функции.

Восьмидесятилетнему юбилею
ЮУрГУ посвящается

1. Постановка задачи. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на числовой прямой R с разрывной по фазовой переменной нелинейностью и малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \begin{cases} 0, & u \ge 0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & u < 0, \end{cases} \tag{1}$$

и двусторонним начальным условием при $x_0 = 0$:

$$\varepsilon \frac{du}{dx}(0-, \varepsilon) = -1, \tag{2}$$

$$\varepsilon^2 \frac{du}{dx}(0+, \varepsilon) = -k, \tag{3}$$

где $k > 0$.

Указанная задача ведет свое происхождение от классической задачи Гольдштика [1], если рассматривать ее в одномерном случае. Сингулярно возмущенные задачи с разрывными правыми частями решаются авторами работ [2–5].

2. Построение решения. Дадим определение решения задачи (1)–(3).

Определение 1. *Решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x,\varepsilon)$ непрерывную на $R \times R_+$, непрерывно дифференцируемую на $(R \setminus \{0\}) \times R_+$ и удовлетворяющую (2)–(3) и уравнению (1) на R за исключением, быть может, конечного числа точек.*

Решение задачи (1)–(3) находится в явном виде. Действительно, в силу условий (2)–(3), уравнения (1) и непрерывности решения $u(x,\varepsilon)$ при $x=0$ получим, что $u(x,\varepsilon)=-\dfrac{x}{\varepsilon}$ при $x\le 0$ $u(x,\varepsilon)=\dfrac{1}{2\varepsilon^2}x(x-x_1)$ при $x\in(0,x_1)$, где $x_1>0$ определяется из условия (3): $-\dfrac{k}{\varepsilon^2}=\dfrac{du}{dx}(0+,\varepsilon)=-\dfrac{1}{2\varepsilon^2}x_1$, то есть $x_1=2k$. Наконец, при $x\ge 2k$ $u(x,\varepsilon)=C_1+C_2x$. Постоянные C_1, C_2 находятся из следующих уравнений: $C_1+C_2x_1=0$ (непрерывность решения), $C_2=\dfrac{du}{dx}(x_1-,\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon^2}-\dfrac{1}{2\varepsilon^2}x_1=\dfrac{k}{\varepsilon^2}$. Таким образом, задача (1)–(3) имеет единственное решение:

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}-x/\varepsilon, & x\le 0,\\ x(x-2k)/2\varepsilon^2, & 0<x<2k,\\ k(x-2k)/\varepsilon^2, & x\ge 2k.\end{cases}$$

Полученное решение удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2}=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ или } x\ge 2k,\\ 1, & x\in(0,2k)\end{cases} \tag{4}$$

и начальным условиям (2)–(3).

Замечание 1. Уравнение (4) с механической точки зрения можно трактовать как уравнение прямолинейного движения материальной точки малой массы ε^2 под действием разрывной силы, принимающей кусочно-постоянные значения, причем такие, что материальная точка до и после нахождения в поле с отличной от нуля силой движется свободно равномерно. При этом сначала на границе между областью равномерного и равноускоренного движений точкой приобретается дополнительный импульс величины $k-\varepsilon$ и, соответственно, в момент $x_0=0$ происходит разрыв ее скорости движения. Затем постоянное поле «выталкивает» точку, и далее ее движение свободное, так что решение (4) в момент x_1 выхода из средней области претерпевает разрыв второй производной, однако гладкое.

Нашей исходной задачей являлось построение закона движения точки, то есть нахождение решения уравнения (1) с начальными условиями (2)–(3), и определение момента выхода $x_1=2k$, после чего задача стала эквивалентной (4), (2)–(3).

3. Исследуемая задача как сингулярно возмущенная

Во-первых, заметим, что вырожденное уравнение, получаемое из (4), если положить параметр $\varepsilon=0$, будет иметь вид:

$$0=\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ или } x\ge 2k,\\ 1, & x\in(0,2k),\end{cases}$$

что не выполняется в области $0<x<2k$. Отметим это обстоятельство как особенность рассматриваемой задачи в отличие от классических сингулярно возмущенных задач, где решение вырожденного уравнения единственно [6] или нет [7], как правило, существует. Итак, регулярной части асимптотики решения не существует, но от решения можно ожидать погранслойный характер поведения его асимптотики в том случае, если будет допускаться введение погранслойной переменной. Действительно, такая переменная может быть введена по формуле: $\xi=x/\varepsilon$. Тогда уравнение (4) и граничные условия (2)–(3) приобретут следующий вид (для искомого решения оставим прежнее обозначение):

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=\begin{cases}0, & \xi\le 0 \text{ или } \xi\ge 2k/\varepsilon,\\ 1, & \xi\in(0,2k/\varepsilon).\end{cases}$$

$$\frac{du}{d\xi}(0-,\varepsilon)=-1,$$

$$\varepsilon \frac{du}{d\xi}(0+,\varepsilon) = -k\ ,\ k > 0\ .$$

Решение последней задачи запишется так:

$$u(\xi) = \begin{cases} -\xi, & \xi \le 0, \\ \xi^2/2 - k\xi/\varepsilon, & 0 < \xi < 2k/\varepsilon, \\ k\xi/\varepsilon - 2k^2/\varepsilon^2, & \xi \ge 2k/\varepsilon. \end{cases}$$

Замечание 2. Итак, получено точное решение задачи, терпящее разрыв производной в момент перехода $x_0 = 0$. Однако так не происходит физически. Действительно, материальная точка пусть и малой массы, каковой является исследуемая нами, не может изменить импульс мгновенно, а следовательно, требуются некоторые иные соображения, позволяющие построить сглаженную модель, соответствующую ускоренному движению точки в окрестности точки перехода. Ниже предлагается произвести аппроксимацию правой части уравнения (2), и таким путем перейти к требуемой ситуации с гладкостью решения.

Теперь построим такое решение.

4. Построение приближенного решения

Рассмотрим следующее уравнение для нахождения функции $U(x,\varepsilon)$:

$$\varepsilon^2 U_{xx} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon T_x(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 R_{xx}(x,\varepsilon)\ ,\ x < 2k\ , \tag{5}$$

где правая часть уравнения (4) заменена на сглаженную, в которой слагаемое $\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}\right)$ призвано вывести значения второй производной при $x < 0$ на режим, равный 0, и при $x > 0$ на значение, равное 1, когда $\varepsilon \to 0$. В правую часть (5) включено также регуляризирующее слагаемое $\varepsilon T_x(x,\varepsilon)$, чтобы функция $\varepsilon U_x(x,\varepsilon)$ равнялась -1 для случая $x < 0$, а $\varepsilon U_x(x,\varepsilon)$ принимала значение $(x-k)/\varepsilon$ при $0 < x \le 2k$, когда $\varepsilon \to 0$. Положим функцию $T(x,\varepsilon) = \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}$. Кроме того, (5) содержит регуляризирующий член $\varepsilon^2 R_{xx}(x,\varepsilon)$ для той цели, чтобы устранить невязку при выборе подходящих постоянных в приближенном решении. Возьмем функцию $R(x,\varepsilon) = -\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}$.

Определение 2. *Под приближенным решением задачи (4), (2)–(3) на промежутках* $(-\infty;0)$ *и* $(0;2k]$ *будем понимать функцию* $U(x,\varepsilon) \in C^2\left((-\infty;2k]\times R_+]\right)$, *удовлетворяющую уравнению (5) и сходящуюся равномерно при* $\varepsilon \to 0$ *к решению задачи (4), (2)–(3).*

Если ввести растянутую переменную $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, то уравнение (5) приобретет вид (оставим прежнее обозначение для искомого решения):

$$U_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{th}\xi) + \tilde{T}_\xi(\xi,\varepsilon) + \tilde{R}_{\xi\xi}(\xi)\ . \tag{6}$$

причем функции $\tilde{T}(\xi,\varepsilon) = \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\operatorname{th}\xi$, $\tilde{R}(\xi) = -\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi$.

Проинтегрировав (6), получим производную общего решения сглаженного уравнения:

$$U_\xi = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}\xi) + \tilde{T}(\xi,\varepsilon) + \tilde{R}_\xi(\xi) + C_1(\varepsilon)\ .$$

Имеем:

$$U_\xi = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}\xi) + \frac{-k/\varepsilon - 1}{2} + \frac{-k/\varepsilon + 1}{2}\operatorname{th}\xi + \tilde{R}_\xi(\xi) + C_1(\varepsilon)\ . \tag{7}$$

Интегрируя последнее равенство, получаем:

$$U(\xi,\varepsilon)=\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi}\ln(\operatorname{ch}s)ds+\frac{-k/\varepsilon-1}{2}\xi+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln(\operatorname{ch}\xi)-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1(\varepsilon)\xi+C_2(\varepsilon). \quad (8)$$

Замечание 3. Тем самым, решение уравнения (6) (а значит, и уравнения (5)) найдено через квадратуры. Его главное достоинство состоит в том, что оно дважды непрерывно дифференцируемое. Осталось выбрать неизвестные пока постоянные C_1, C_2. Но остается вопрос: каким образом это новое решение соотносится с точным? Потребуем от него согласования с решением при $\xi\to\pm\infty$.

Теорема. *Решение уравнения (6), задаваемое формулой (8), при условии, что постоянные* $C_1(\varepsilon)$ *и* $C_2(\varepsilon)$ *определяются следующими равенствами:*

$$C_1(\varepsilon)=\frac{\ln 2}{2},\ C_2(\varepsilon)=\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2, \quad (9)$$

является приближенным решением задачи (4), (2)–(3) в смысле Определения 2.

Для доказательства сформулированной теоремы проанализируем поведение функции из формулы (8) при условии (9), получив ее асимптотическое разложение.

Определение 3. *Под асимптотическим разложением решения уравнения (6) на* $(R\setminus\{0\})\times R_+$ *будем понимать функцию* $\tilde{U}(\xi,\varepsilon)\in C^2\left((R\setminus\{0\})\times R_+\right)$, *сходящуюся равномерно к решению уравнения (6) при* $\xi\to\pm\infty$.

Доказательство. Найдем асимптотическое выражение для полученной функции $U(\xi,\varepsilon)$, исходя из ее представления (8). Найдем асимптотику при $\xi\to-\infty$, имеем:

$$U(\xi,\varepsilon)=\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi}\ln\frac{1}{2}e^{-s}(1+e^{2s})ds+\frac{-k/\varepsilon-1}{2}\xi+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln\frac{1}{2}e^{-\xi}(1+e^{2\xi})-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2=$$

$$=\frac{1}{4}\xi^2-\frac{\ln 2}{2}\xi-\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2ns}}{n}ds+\frac{-k/\varepsilon-1}{2}\xi-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\xi+$$

$$+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2=$$

$$=-\frac{\ln 2}{2}\xi+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2-\xi+$$

$$+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2.$$

Ряд из третьего слагаемого имеет, как известно, значение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, а следовательно, совместно с седьмым членом оно стремится к нулю. Построим функцию:

$$\tilde{U}(\xi,\varepsilon)=-\xi+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n^2}+$$

$$+\left(C_1-\frac{\ln 2}{2}\right)\xi+\left(C_2-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2\right). \quad (10)$$

Докажем, что указанная функция является асимптотическим разложением при $\xi\to-\infty$ решения уравнения (6). Поскольку ряды из второго, четвертого и пятого слагаемых имеют экспоненциальные оценки вида:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n^2}\right|\le Ae^{-\alpha|\xi|},\quad \left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{2n\xi}}{n}\right|\le Ae^{-\alpha|\xi|},\quad \left|\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi\right|\le Ae^{-\alpha|\xi|},$$

где A и α – положительные подходящие константы, то при $\xi\to-\infty$ модуль разности

$$\left|\tilde{U}(\xi,\varepsilon)-U(\xi,\varepsilon)\right|\le Be^{-\beta|\xi|}, \quad (11)$$

если взять подходящие $B>0$ и $\beta>0$, а это означает, что построенная выше функция $\tilde{U}(\xi,\varepsilon)$ является асимптотическим разложением решения уравнения (6). В силу (11) построенная асимптотика имеет погранслойный характер.

Кроме того, как следует из (10), если выбрать постоянные C_1 и C_2, как в (9), нетрудно видеть, что справедливо равномерное соотношение:

$$\left|\tilde{U}(\xi,\varepsilon)+\xi\right|\le 3Ae^{-\alpha|\xi|} \text{ при } \xi\to-\infty, \tag{12}$$

где A и α были определены ранее.

Объединяя оценки (11) и (12), приходим к выводу, что решение (8) после замены $\xi=x/\varepsilon$ равномерно сходится к точному решению задачи (4), (2)–(3) при $\varepsilon\to 0$ в области, где $x\in(-\infty;0)$, и, следовательно, является приближенным согласно Определению 2.

Получим асимптотику при $\xi\to+\infty$:

$$U(\xi,\varepsilon)=\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\ln\frac{1}{2}e^{s}(1+e^{-2s})ds+\frac{-k/\varepsilon-1}{2}\xi+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln\frac{1}{2}e^{\xi}(1+e^{-2\xi})-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2=$$

$$=\frac{1}{4}\xi^2-\frac{\ln 2}{2}\xi+\frac{1}{4}\xi^2+\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2ns}}{n}ds+\frac{-k/\varepsilon-1}{2}\xi-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\xi+$$

$$+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2=$$

$$=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{\ln 2}{2}\xi-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2-\frac{k}{\varepsilon}\xi+$$

$$+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+C_1\xi+C_2\,.$$

Имеем функцию:

$$\tilde{U}(\xi,\varepsilon)=\frac{1}{2}\xi^2-\frac{k}{\varepsilon}\xi+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n^2}+$$

$$+\left(C_1-\frac{\ln 2}{2}\right)\xi+\left(C_2-\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2\right). \tag{13}$$

Поскольку ряды из третьего, пятого и шестого слагаемых имеют экспоненциальные оценки вида:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n^2}\right|\le Ae^{-\alpha\xi},\quad \left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}e^{-2n\xi}}{n}\right|\le Ae^{-\alpha\xi},\quad \left|\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\xi\right|\le Ae^{-\alpha\xi},$$

где A и α – положительные подходящие константы, то при $\xi\to+\infty$ справедливо

$$\left|\tilde{U}(\xi,\varepsilon)-U(\xi,\varepsilon)\right|\le Be^{-\beta\xi}, \tag{14}$$

если взять подходящие $B>0$ и $\beta>0$, а это означает, что функция $\tilde{U}(\xi,\varepsilon)$ из (13) является асимптотикой решения уравнения (6) погранслойного типа.

Затем, выбирая постоянные C_1 и C_2 из (9), при $\xi\to+\infty$ получаем:

$$\left|\tilde{U}(\xi,\varepsilon)-\frac{1}{2}\xi^2+\frac{k}{\varepsilon}\xi\right|\le 3Ae^{-\alpha\xi}, \tag{15}$$

где A и α были определены ранее.

Принимая во внимание оценки (14) и (15), приходим к заключению о том, что решение (8) после замены переменной $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon}$ равномерно сходится к точному решению задачи (4), (2)–(3) при $\varepsilon\to 0$ в области, где $x\in(0;2k]$, и, следовательно, является приближенным согласно Определению 2.

Заметим, что формула (8) приобретет вид:

$$U(\xi,\varepsilon)=\frac{x^2}{4\varepsilon^2}+\frac{-k/\varepsilon+\ln 2-1}{2\varepsilon}x+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{x/\varepsilon}\ln(\operatorname{ch} s)ds+\frac{-k/\varepsilon+1}{2}\ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{\varepsilon}\right)-\frac{\pi^2}{48}\operatorname{th}\frac{x}{\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Goldshtik, M. Inviscid Separation in Steady Planar Flows / M. Goldshtik, F. Hussain // Fluid Dynamics Research. – 1998. – Vol. 23. – P. 235–266.

2. The Solution with Internal Transition Layer of the Reaction-Diffusion Equation in Case of Discontinuous Reactive and Diffusive Terms / N.T. Levashova, N.N. Nefedov, O.A. Nikolaeva *et al.* // Math Meth Appl Sci. – 2018. – Vol. 41, Iss. 18. – P. 9203–9217.

3. Нефедов, Н.Н. Асимптотическая устойчивость стационарного решения с внутренним переходным слоем задачи реакция–диффузия с разрывным реактивным слагаемым / Н.Н. Нефедов, Н.Т. Левашова, А.О. Орлов // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. Теоретическая и математическая физика. – 2018. – № 6. – С. 3–10.

4. Нефедов, Н.Н. О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубического типа / Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин, А.О. Орлов // ЖВММФ. – 2020. – Т. 60, № 9. – С. 1513–1532.

5. Левашова, Н.Т. Асимптотически устойчивые стационарные решения реакция–диффузия–адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми / Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефедов, О.А. Николаева // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 615–631.

6. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 207 с.

7. Васильева, А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 106 с.

Поступила в редакцию 22 октября 2023 г.

Сведения об авторах

Павленко Вячеслав Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: pavlenko-vn@yandex.ru.

Деркунова Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическое и компьютерное моделирование», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: derkunovaea@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2023, vol. 15, no. 4, pp. 14–20

DOI: 10.14529/mmph230402

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL SINGULARLY PERTURBED GOLDSHTIK PROBLEM

V.N. Pavlenko[1], E.A. Derkunova[2]
[1] Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation
[2] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: derkunovaea@susu.ru

Abstract. The Cauchy problem is considered for an ordinary differential equation with discontinuous phase-variable nonlinearity, in the right part of which a small parameter is included. The same parameter occurs in the initial conditions, leading to the problem going from classical to singularly perturbed. It seems possible to solve the problem in such a formulation, firstly based on the concept of an exact solution, by means of the theory of equations with discontinuous nonlinearities; and secondly, being singularly perturbed, by the method of constructing asymptotics of the boundary layer type. Since the exact solution suffers a discontinuity at the starting point, which is not justified in the physical sense, the equation is approximated in order to obtain an approximate smoothed solution. It requires a convergence to the exact solution when the small parameter tends to zero. An equation with a smoothed right-hand side gives a solution in quadratures. Then the proximity of its asymptotic to the exact solution is proved. From the exponential proximity of the asymptotic to the approximate solution, the required behavior follows for the latter.

Keywords: discontinuous nonlinearities; Goldshtick problem; singular perturbations; asymptotic decomposition; boundary functions.

References

1. Goldshtik M., Hussain F. Inviscid Separation in Steady Planar Flows. *Fluid Dynamics Research*, 1998, Vol. 23, pp. 235–266. DOI: 10.1016/S0169-5983(98)00017-3

2. Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A. The Solution with Internal Transition Layer of the Reaction-Diffusion Equation in Case of Discontinuous Reactive and Diffusive Terms. *Math Meth Appl Sci*., 2018, Vol. 41, Iss. 18, pp. 9203–9217. DOI: 10.1002/mma.5134

3. Nefedov N.N., Levashova N.T., Orlov A.O. The Asymptotic Stability of a Stationary Solution with an Internal Transition Layer to a Reaction–Diffusion Problem with a Discontinuous Reactive Term. *Moscow University Physics Bulletin*, 2018, Vol. 73, no. 6, pp. 565–572.

4. Nefedov N.N., Nikulin E. I., Orlov A.O. On a Periodic Inner Layer in the Reaction–Diffusion Problem with a Modular Cubic Source. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, Vol. 60, Iss. 9, pp. 1461–1479. DOI: 10.1134/S0965542520090134

5. Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A. Asymptotically Stable Stationary Solutions of the Reaction–Diffusion–Advection Equation with Discontinuous Reaction and Advection Terms. *Differential Equations*, 2020, Vol. 56, no. 5, pp. 605–620. DOI: 10.1134/S0012266120050067

6. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* (Asymptotic Methods in Theory of Singular Perturbation). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1990, 207 p. (in Russ.).

7. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* (Singularly Perturbed Equations in Critical Cases). Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1978, 106 p. (in Russ.).

Received October 22, 2023

Information about the authors

Pavlenko Vyacheslav Nikolaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: pavlenko-vn@yandex.ru.

Derkunova Elena Anatol'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: derkunovaea@susu.ru.