УДК 517.925 **DOI: 10.14529/mmph240105**

БИФУРКАЦИИ СШИТОГО ТРОЙНОГО ЦИКЛА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Исследование бифуркаций динамических систем, задаваемых кусочно-гладкими непрерывными векторными полями, интересно с теоретической точки зрения и полезно для приложений. Нелокальные бифуркации в типичных однопараметрических семействах таких систем на плоскости уже описаны. В настоящей работе рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости. При нулевых значениях параметров предполагается, что у векторного поля есть негрубая устойчивая замкнутая траектория Г, имеющая с линией переключения поля простое касание. Получена бифуркационная диаграмма семейства – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на множества, для элементов которых соответствующие векторные поля семейства имеют одинаковое число и тип замкнутых траекторий в некоторой фиксированной окрестности траектории Г. В частности, показано, что максимальное число замкнутых траекторий, рождающихся из Г при изменении параметров, равно трем.

Ключевые слова: кусочно-гладкое непрерывное векторное поле; динамическая система; замкнутая траектория; бифуркационная диаграмма.

Введение. При математическом моделировании реальных процессов с переключениями используются как кусочно-гладкие разрывные векторные поля (дифференциальные уравнения) [1–3], так и кусочно-гладкие непрерывные векторные поля [3, 4].

Для кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости получены достаточные условия грубости, выделяющие в соответствующем функциональном пространстве открытое всюду плотное множество [5]. В книге [4] дана классификация возможных локальных бифуркаций в типичных одно- и двухпараметрических семействах таких полей.

В типичном однопараметрическом семействе кусочно-гладких непрерывных векторных полей могут происходить и нелокальные бифуркации рождения цикла. В [6] описана бифуркация рождения цикла из петли сепаратрисы сшитого седло-узла – аналог известной бифуркации рождения цикла из петли сепаратрисы седло-узла гладкого векторного поля [3, с. 177]. Других нелокальных бифуркаций рождения цикла в таких семействах, «новых» по сравнению с бифуркациями гладких векторных полей, нет.

Здесь мы рассмотрим бифуркацию в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких непрерывных векторных полей на плоскости, при которой из устойчивой замкнутой траектории, касающейся линии переключения, рождается до трех замкнутых траекторий.

1. Непрерывные кусочно-гладкие векторные поля на плоскости. Пусть M – область на плоскости $\mathbf{R}^2$ с C^∞-гладкой границей, $S_1,\dots,S_l$ – непересекающиеся между собой одномерные C^∞-подмногообразия в M – *линии переключения*, $S:=\bigcup_{i=1}^{l} S_i$, $D=\{M_1,M_2,...,M_n\}$ – разбиение множества $M\setminus S$ на компоненты связности. Пусть $\mathrm{V}^r(\overline{M_i})$ – множество C^r-векторных полей на $\overline{M_i}$, $r\ge 1$. Обозначим $\mathrm{PSCV}^r(M,D)$ множество непрерывных векторных полей X на M таких, что для любого $i=1,2,...,n$ $X^i := X\big|_{\overline{M}_i}\in \mathrm{V}^r(\overline{M_i})$.

Поскольку векторное поле $X\in \mathrm{X}^r(M,D)$ удовлетворяет условию Липшица, то для любой точки $x^0\in M$ однозначно определена траектория поля, выходящая из этой точки. Пусть замкнутая траектория Γ не касается линий переключения, а $\eta:(-1,1)\to M\setminus S$, $\eta(0)\in\Gamma$, C^r – вложение, трансверсальное траекториям поля. Тогда при u, достаточно близких к нулю, определено отображение последования по траекториям $\eta(u)\mapsto\eta(f(u))$, где $f(\cdot)\in C^r$, $f(0)=0$, $f'(u)>0$. Если $f'(0)<1$ (соотв. $f'(0)>1$), то Γ называется *устойчивой* (соотв. *неустойчивой*) *гиперболической замкнутой траекторией* (*предельным циклом*). Если $f'(0)=1$, а $f''(0)\neq 0$, то Γ называется *седло-узловой замкнутой траекторией* или *двойным циклом*.

2. Сшитый тройной цикл. Будем рассматривать семейство полей $X_\varepsilon\in \mathrm{PSCV}^r(M,D)$, зависящих от параметра ε, меняющегося в некоторой окрестности E точки $0\in\mathbf{R}^2$, и считать, что векторы $X_\varepsilon(z)$ C^r-гладко зависят от $(z,\varepsilon)\in\overline{M_i}\times\mathrm{E}$, $r\geq 3$.

Предположим, что

(У$_1$) У поля X_0 есть замкнутая траектория Γ_0, имеющая в точке $O_0\in S$ простое касание с S и трансверсальная S в остальных точках.

Выберем окрестность V точки O_0 и C^∞-координаты (x,y) в ней так, чтобы точка O_0 имела нулевые координаты, $S\cap V$ задавалось уравнением $y=0$, точки с координатами $y<0$ ($y>0$) принадлежали одному элементу разбиения D, который обозначим M_- (M_+); при этом $\Gamma_0\cap V\subset\overline{M}_+$. Согласно [7, с. 594] векторные поля $X_\varepsilon^\pm := X_\varepsilon\big|_{M_\pm}$ продолжаются до векторных полей $\bar{X}_\varepsilon^\pm$ на некоторой окрестности множества $\overline{M}_\pm$ в M так, что отображения $(z,\varepsilon)\mapsto\bar{X}_\varepsilon^\pm(z)$ принадлежат классу C^r. Мы можем считать, что в выбранных координатах

$$\bar{X}_\varepsilon^\pm(z)=P^\pm(x,y,\varepsilon)\partial/\partial x+Q^\pm(x,y,\varepsilon)\partial/\partial y,$$

где $P^+(x,0,\varepsilon)\equiv P^-(x,0,\varepsilon)$, $Q^+(x,0,\varepsilon)\equiv Q^-(x,0,\varepsilon)$,

$$P^\pm(0,0,0)>0,\ Q^\pm(0,0,0)=0,\ \partial Q^\pm(0,0,0)/\partial x>0. \tag{1}$$

Из (1) по теореме о неявной функции получаем, что при ε, достаточно близких к нулю, уравнение $Q^\pm(x,0,\varepsilon)=0$ имеет единственное решение $x=\tilde{x}(\varepsilon)$, такое, что $\tilde{x}(\varepsilon)\to 0$, если $\varepsilon\to 0$, при этом $\tilde{x}(\cdot)\in C^r$.

Пусть $\eta:(-1,1)\to M_+$ – C^r-вложение, трансверсальное полю X_0^+, такое, что $\eta(0)\in\Gamma_0$, а дуга $\eta(-1,0)$ находится с той же стороны от Γ_0, что и дуга $x=0$, $0<y<y_1$ при достаточно малом $y_1>0$. Для ε, достаточно близких к нулю, положительная (отрицательная) полутраектория поля X_ε, начинающаяся в точке $O(\varepsilon)$ с координатами $x=\tilde{x}(\varepsilon)$, $y=0$, пересекает трансверсаль $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon))$ ($\eta(u_-(\varepsilon))$), где $u_\pm(\cdot)\in C^r$, $u_\pm(0)=0$. Обозначим $\Delta(\varepsilon):=u_+(\varepsilon)-u_-(\varepsilon)$. Если число $\bar{u}>0$ и окрестность нуля E' на плоскости параметров выбраны достаточно малыми, то определены отображения $\eta(u_-(\varepsilon)+u)\mapsto\eta(u_-(\varepsilon)+\tilde{f}(u,\varepsilon))$, $u\in[-\bar{u},0]$, последования по траекториям векторных полей X_ε, $\varepsilon\in\mathrm{E}'$ такие, что $\tilde{f}\in C^r$, $\tilde{f}_u'(u,\varepsilon)>0$, $\tilde{f}(0,0)=0$, $\tilde{f}(0,\varepsilon)=\Delta(\varepsilon)$. Введем также функцию расхождения $\tilde{d}(u,\varepsilon):=\tilde{f}(u,\varepsilon)-u$.

Предположим, что выполняется и условие

(У$_2$) $\tilde{d}_u'(0,0)=\tilde{f}_u'(0,0)-1=0$, $\tilde{d}_{uu}''(0,0)=\tilde{f}_{uu}''(0,0)>0$.

Ясно, что условие (У$_2$) не зависит от произвола в выборе η. Из него следует, что при достаточно малом $\bar{u}>0$ $\forall u\in[-\bar{u},0)$ $\tilde{f}(u,0)>u$, и потому все траектории поля X_0, пересекающие трансверсаль $\eta[-\bar{u},0)$, ω-предельны к Γ_0.

Из (1) и выбора отображения η согласно [8] следует

Лемма 1. *Существуют такие число* $\bar{v}>0$ *и окрестность нуля* $\mathrm{E}''\subset\mathrm{E}'$ *на плоскости параметров, что* $\forall\varepsilon\in\mathrm{E}''$ *положительная (отрицательная) полутраектория поля* X_ε, *начинающаяся в точке линии переключения с координатами* $(\tilde{x}(\varepsilon)+v,0)$, $v\in(-\bar{v},0]$ $((\tilde{x}(\varepsilon)+w,0)$, $w\in[0,\bar{v}))$ *пересекает трансверсаль* $\eta(-1,1)$ *в точке* $\eta(u_-(\varepsilon)+f_-(v,\varepsilon))$ ($\eta(u_-(\varepsilon)+f_+(w,\varepsilon))$), *где* $f_\pm\in C^r$,

$$f_-(0,\varepsilon)=0,\ f_+(0,\varepsilon)=\Delta(\varepsilon), \tag{2}$$

$$(f_-)_v'(0,\varepsilon)=(f_+)_w'(0,\varepsilon)=0,\ (f_-)_v'(v,\varepsilon)<0 \text{ при } v\in(-\bar{v},0),\ (f_+)_w'(w,\varepsilon)>0 \text{ при } w\in(0,\bar{v}), \tag{3}$$

$$(f_-)''_{vv}(0,0) > 0\,,\ (f_+)''_{ww}(0,0) > 0\,. \qquad (4)$$

Нам также понадобится

Лемма 2 [1, с. 177]. *Существуют такие число* $\bar{v} > 0$ *и окрестность нуля* E'' *на плоскости параметров, что* $\forall \varepsilon \in \mathrm{E}''$ *положительная полутраектория поля* X_ε^-*, выходящая из точки с координатами* $(\tilde{x}(\varepsilon)+v,\,0)\,, v\in(-\bar{v},0]$*, кончается в точке с координатами* $(\tilde{x}(\varepsilon)+\sigma(v,\varepsilon),\,0)$*, где*

$$\sigma \in C^r\,,\ \sigma(0,\varepsilon)=0\,,\ \ \sigma'_v(0,\varepsilon)=-1\,,\ \sigma''_{vv}(0,0)=\frac{4}{3}\left(\frac{(P^-)'_x-(Q^-)'_y}{P^-}-\frac{(Q^-)''_{xx}}{2(Q^-)'_x}\right)(0,0,0)\,. \qquad (5)$$

Будем считать, что числа $\bar{v} > 0$ и окрестности нуля E'', о которых идет речь в леммах 1 и 2, выбраны одни и те же.

При достаточно малых $\bar{\bar{v}} \in (0,\bar{v})$ и окрестности нуля $\mathrm{E}''' \subset \mathrm{E}''$ при $\varepsilon \in \mathrm{E}'''$ определены функция расхождения $d(v,\varepsilon) := f_+(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon) - f_-(v,\varepsilon)$, $v \in [-\bar{\bar{v}},0]$ и функция последования

$$f(u,\varepsilon) := f_+(\sigma(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon) = u + d(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)\,,\quad u\in[0,\bar{\bar{u}}]\,,$$

где $f_-^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ – функция, обратная к $f_-(\cdot,\varepsilon)$, а $0<\bar{\bar{u}}< f_-(-\bar{\bar{v}},\varepsilon)$. Через точку $\eta(u_-(\varepsilon)+u)$ проходит замкнутая траектория $\Gamma(u)$ поля X_ε, тогда и только тогда, когда $d(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)=0$. Поскольку $f'_u(u,\varepsilon)=1+d'_v(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)/(f_-)'_u(u,\varepsilon)$, то эта траектория является устойчивым (неустойчивым) гиперболическим предельным циклом, если производная $d'_v(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)$ положительна (отрицательна). Если $d'_v(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)=0$, то $f''_{uu}(u,\varepsilon)=d''_{vv}(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)/[(f_-)'_u(u,\varepsilon)]^2$, и потому $\Gamma(u)$ – двойной цикл тогда и только тогда, когда $d''_{vv}(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon)\neq 0$.

Из (2), (3) и (5) получаем, что

$$\forall \varepsilon\in \mathrm{E}'''\quad d(0,\varepsilon)=\Delta(\varepsilon)\,,\ d'_v(0,\varepsilon)=0\,. \qquad (6)$$

и, в частности, $d(0,0)=d'_v(0,0)=0$.

В достаточно малой окрестности V_* цикла Γ_0 рассмотрим векторное поле X_ε^*, полученное из поля $X_\varepsilon\big|_{V_*}$ заменой векторов $X_0^-(z)$ на $\bar{X}_0^+(z)$ в точках $z\in V_*\cap M_-$. Мы можем выбрать $\bar{\bar{u}}$ и E''' столь малыми, что $\forall\varepsilon\in\mathrm{E}'''$ определено отображение $\eta(u)\mapsto\eta(f_*(u,\varepsilon))$, $u\in[-\bar{\bar{u}},\bar{\bar{u}}]$, последования по траекториям поля X_ε^*, где $f_*\in C^r$, $f_*(u,\varepsilon)=\tilde{f}(u,\varepsilon)$ при $u\le 0$.

Поскольку $f_*(u,\varepsilon):=f_+(\sigma_*(f_-^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$, где $\sigma_*(0,\varepsilon)=0$, $(\sigma_*)'_v(0,\varepsilon)=-1$, то

$$(f_*)'_u(u,\varepsilon)=\frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma_*)'_v(v,\varepsilon)}{(f_-)'_v(v,\varepsilon)}\,,\ \text{где}\ v=f_-^{-1}(u,\varepsilon)\,.$$

Учитывая, что $(f_-)'_v(0,\varepsilon)=(f_+)'_w(0,\varepsilon)=0$, а $(((\sigma_*)'_v(0,\varepsilon))^2=1$, получаем

$$(f_*)'_u(0,\varepsilon)=\lim_{u\to0}\frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma_*)'_v(v,\varepsilon)}{(f_-)'_v(v,\varepsilon)}\Bigg|_{v=f_-^{-1}(u,\varepsilon)}=\lim_{v\to0}\frac{(f_+)'_w(\sigma_*(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma_*)'_v(v,\varepsilon)}{(f_-)'_v(v,\varepsilon)}=$$
$$=\lim_{v\to0}\frac{((f_+)'_w(\sigma_*(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma_*)'_v(v,\varepsilon))'_v}{((f_-)'_v(v,\varepsilon))'_v}=\frac{(f_+)''_{ww}(0,\varepsilon)}{(f_-)''_{vv}(0,\varepsilon)}\,. \qquad (7)$$

Поскольку $(f_*)'_u(0,0)=\tilde{f}'_u(0,0)=1$, то $(f_+)''_{ww}(0,0)=(f_-)''_{vv}(0,0)$. Отсюда и из равенства

$$d''_{vv}(v,\varepsilon)=(f_+)''_{ww}(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma'_v(v,\varepsilon))^2+(f_+)'_w(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon)\sigma''_{vv}(v,\varepsilon)-(f_-)''_{vv}(v,\varepsilon) \qquad (8)$$

получаем $d''_{vv}(0,0)=0$.

Предположим, что выполняется и условие

(У$_3$) $d'''_{vvv}(0,0)>0$.

Из равенств $d(0,0)=d'_v(0,0)=d''_{vv}(0,0)=0$ и условия (У$_3$) следует, что число $\bar{\bar{u}}$ можно считать столь малым, что $\forall u\in(0,\bar{\bar{u}}]$ $d(f_-^{-1}(u,0),0)<0$ и потому $f(u,0)<u$. Тем самым все траектории поля X_0, пересекающие трансверсаль $\eta(0,\bar{\bar{u}}]$, а в силу доказанного выше и пересекающие трансверсаль $\eta[-\bar{u},\bar{u}]$, ω-предельны к Γ_0. Далее будет показано, что при значениях параметра

ε, достаточно близких к нулю, поле X_ε может иметь в окрестности Γ_0 до трех замкнутых траекторий. Поэтому Γ_0 можно назвать устойчивым *сшитым тройным циклом.*

Существование векторных полей с циклом, удовлетворяющим условиям (У$_1$)–(У$_3$), неочевидно и будет доказано ниже. Нетрудно построить гладкое поле $\tilde{X}_0 = \tilde{P}\partial/\partial x + \tilde{Q}\partial/\partial y$, $\tilde{P}(0,0) > 0$, $\tilde{Q}(0,0) = 0$, $\tilde{Q}'_x(0,0) > 0$, имеющее двойным циклом окружность Γ_0, лежащую в верхней полуплоскости, касающуюся в начале координат оси x, к которой ω-предельны траектории из внутренней полуокрестности Γ_0. Рассмотрим его как поле из $\mathrm{PSCV}^r(\mathbf{R}^2, D)$, где D – разбиение на верхнюю – M_+ и нижнюю – M_- полуплоскости. Для поля $X_0 \in \mathrm{PSCV}^r(\mathbf{R}^2, D)$, где $P^+(x,y) = \tilde{P}(x,y)$, $Q^+(x,y) = \tilde{Q}(x,y)$ при $y \ge 0$, $P^-(x,y) = \tilde{P}(x,y)$, $Q^-(x,y) = \tilde{Q}(x,y) + ky$ при $y \le 0$, окружность Γ_0 – цикл и выполняются условия (У$_1$) и (У$_2$).

Так как

$$d'''_{vvv}(v,\varepsilon) = (f_+)'''_{vvv}(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon)(\sigma'_v(v,\varepsilon))^3 + 3(f_+)''_{vv}(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon)\sigma'_v(v,\varepsilon)\sigma''_{vv}(v,\varepsilon) + \\ + (f_+)'_v(\sigma(v,\varepsilon),\varepsilon)\sigma'''_{vvv}(v,\varepsilon) - (f_-)'''_{vvv}(v,\varepsilon),$$

то

$$d'''_{vvv}(0,0) = -(f_+)'''_{vvv}(0,0) - 3(f_+)''_{vv}(0,0)\sigma''_{vv}(0,0) - (f_-)'''_{vvv}(0,0). \tag{9}$$

Из (5) получаем

$$\sigma''_{vv}(0,0) = \frac{4}{3}\left(\frac{\tilde{P}'_x - \tilde{Q}'_y - k}{\tilde{P}} - \frac{\tilde{Q}''_{xx}}{2\tilde{Q}'_x}\right)(0,0).$$

Из этого равенства видно, что число k можно подобрать так, чтобы производная $\sigma''_{vv}(0,0)$ была отрицательной со сколь угодно большой абсолютной величиной. Поэтому из (9) и (5) следует, что k можно выбрать так, чтобы выполнялось условие (У$_3$).

3. Перестройки фазовых портретов при двухпараметрической деформации векторного поля с тройным циклом. Теперь мы можем сформулировать условие

(У$_4$) *Производные* $\tilde{d}'_\varepsilon(0,0)$ *и* $\tilde{d}''_{u\varepsilon}(0,0)$ *линейно независимы.*

Если это условие выполняется, то в некоторой окрестности $\mathrm{E}_* \subset \mathrm{E}'''$ нуля на плоскости параметров можно выбрать C^{r-1}-координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что

$$\tilde{d}(0,\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) = \varepsilon_2, \quad \tilde{d}'_u(0,\varepsilon) = \varepsilon_1. \tag{10}$$

Будем отождествлять точку $\varepsilon \in \mathrm{E}_*$ с координатной строкой: $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и считать $\mathrm{E}_* = (-\delta_*, \delta_*)^2$.

Теорема. *Пусть семейство векторных полей* $X_\varepsilon \in \mathrm{PSCV}^r(M, D)$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, *удовлетворяет условиям* (У$_1$) – (У$_4$). *Тогда существуют число* $\delta \in (0, \delta_*)$, *окрестность* U *цикла* Γ_0 *и разбиение области* $(-\delta,\delta)^2$ *параметров на множества* $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, B_1, B_2, E_1 *и* E_2, *где* $\mathrm{B}_k = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \varepsilon_2 = \beta_k(\varepsilon_1)\}$, $\beta_k : (0,\delta) \to (-\delta,\delta)$, $\beta_k \in C^{r-1}$, $\beta_k(+0) = \beta'_k(+0) = 0$, $k = 1,2$, $\beta_2(\varepsilon_1) < 0 < \beta_1(\varepsilon_1)$, $\mathrm{E}_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 \in (0,\delta),\ \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}$, $\mathrm{E}_2 = (-\delta,\delta)^2 \setminus (\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{B}_0 \cup \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2)$ *(см. рисунок) со следующими свойствами:*

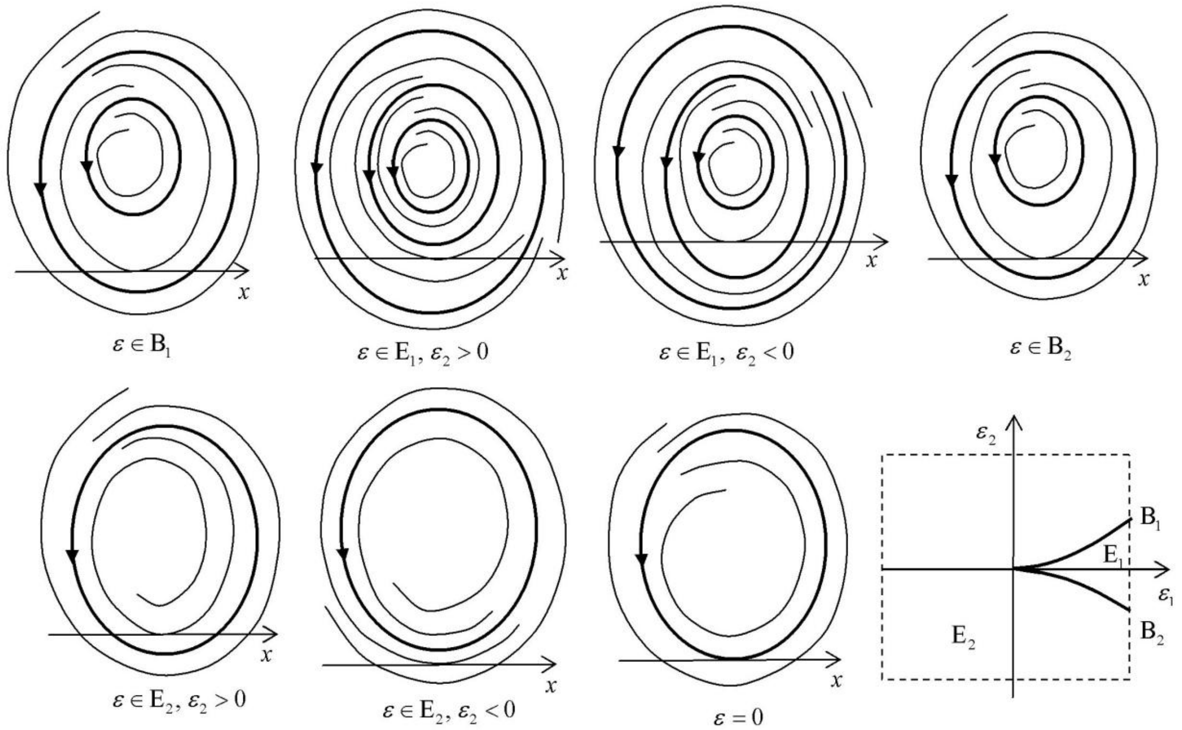
1) Положительные полутраектории векторного поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$, *начинающиеся в точках* U, *не выходят из* U.

2) Векторные поля X_ε *имеют в* U *при* $\varepsilon = 0$ *единственный (устойчивый) предельный цикл* Γ_0; *при* $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$ *два устойчивых гиперболических предельных цикла и один неустойчивый предельный цикл, гиперболический при* $\varepsilon_2 \ne 0$ *и касающийся* S *при* $\varepsilon_2 = 0$; *при* $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ *один устойчивый предельный цикл, гиперболический при* $\varepsilon_2 \ne 0$ *и касающийся* S *при* $\varepsilon_2 = 0$; *при* $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$ *один устойчивый гиперболический предельный цикл и один двойной цикл.*

Доказательство. Продолжим функцию расхождения $\tilde{d}$ до C^r-функции на $(-\bar{u},\bar{u})\times \mathrm{E}'$, которую также будем обозначать $\tilde{d}$. Вследствие (10)

$$\tilde{d}(u,\varepsilon)=\varepsilon_2+\varepsilon_1 u+a(\varepsilon)u^2+o(u^2)\,,\quad \tilde{d}'_u(u,\varepsilon)=\varepsilon_1+2a(\varepsilon)u+o(u)\,, \tag{11}$$

где по условию (У$_2$) $a(0)=\tilde{d}''_{uu}(0,0)/2>0$.



Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов векторных полей X_ε

При достаточно малых $\tilde{u}\in(0,\bar{u}]$ и $\bar{\delta}\in(0,\delta_*]$

$$\forall u\in[-\tilde{u},0)\ \ \tilde{d}(u,0)>0\,, \tag{12}$$

$$\forall(u,\varepsilon)\in[-\tilde{u},\tilde{u}]\times(-\bar{\delta},\bar{\delta})^2\quad \tilde{d}''_{uu}(u,\varepsilon)>0\,. \tag{13}$$

Так как определитель

$$\begin{vmatrix}\tilde{d}'_{\varepsilon_2}(0,0) & \tilde{d}''_{u\varepsilon_2}(0,0)\\ \tilde{d}'_u 0,0) & \tilde{d}''_{uu}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2a(0)\end{vmatrix}=2a(0)\neq 0\,,$$

то по теореме о неявной функции получаем существование таких чисел $\tilde{\delta}_0\in(0,\bar{\delta}]$ и $u_*\in(0,\tilde{u}]$, что для любого $\varepsilon_1\in(-\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_0)$ система уравнений $\tilde{d}(u,\varepsilon)=0$, $\tilde{d}'_u(u,\varepsilon)=0$ относительно неизвестных $(\varepsilon_2,u)\in(-\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_0)\times(-u_*,u_*)$ имеет единственное решение $\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)$, $u=\hat{u}(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_1,\,\hat{u}\in C^{r-1}$,

$$\beta_1(\varepsilon_1)=(1/4a(0))\varepsilon_1^2+o(\varepsilon_1^2)\,,\quad \hat{u}(\varepsilon_1)=-(1/2a(0))\varepsilon_1+o(\varepsilon_1)\,. \tag{14}$$

Фиксируем число u_*. Выберем число u_{**}, удовлетворяющее неравенству $\tilde{f}(-u_*,0)<-u_{**}<0$. Из (12) и (14) следует, что $\tilde{\delta}_0$ можно выбрать столь малым, что

$$\forall\varepsilon\in(-\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_0)^2\ \ \forall u\in[-u_*,-u_{**}]\quad \tilde{d}(u,\varepsilon)>0\,, \tag{15}$$

$$\forall\varepsilon_1\in(-\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_0)\quad \operatorname{sgn}\hat{u}(\varepsilon_1)=-\operatorname{sgn}\varepsilon_1\,,\ 0<\beta_1(\varepsilon_1)<\varepsilon_1\,,\ \text{если}\ \varepsilon_1\neq 0\,.$$

Для векторного поля X_ε, $\varepsilon\in(-\tilde{\delta}_0,\tilde{\delta}_0)^2$ получаем, что при $\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1\in(0,\tilde{\delta}_0)$, дугу $T_\varepsilon^-:=\eta[u_-(\varepsilon)-u_*,\,u_-(\varepsilon)]$ пересекает единственная замкнутая траектория – двойной цикл, проходящий через точку $\eta(u_-(\varepsilon)+\hat{u}(\varepsilon_1))$, а при остальных $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ с $\varepsilon_2\neq 0$ эту дугу могут пересекать только гиперболические замкнутые траектории. Из (11) следует, что u_* и $\tilde{\delta}_0$ можно считать столь малыми, что $\tilde{d}'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) \ge 1/2$ при $(u,\varepsilon) \in (-u_*, u_*) \times (-\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_0)^2$. Отсюда и из (15), (10) и (13) получаем, что при $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$, $\beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \tilde{\delta}_0$ замкнутые траектории не пересекают T_ε^-, при $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$, $0 < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет два простых нуля, принадлежащих интервалу $(-u_{**}, 0)$, то есть дугу T_ε^- пересекают два грубых цикла, а при $\varepsilon \in (0, \tilde{\delta}_0) \times (-\tilde{\delta}_0, 0)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет один нуль $u_0 \in (-u_{**}, 0)$, в котором $\tilde{d}'_u(u_0,\varepsilon) < 0$, то есть дугу T_ε^- пересекают одна замкнутая траектория – устойчивый гиперболический цикл.

При $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{\delta}_0)$, $\varepsilon_2 = 0$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет два нуля $u_1 \in (-u_{**}, 0)$, в котором $\tilde{d}'_u(u_1,\varepsilon) < 0$ и $u_2 = 0$. Тем самым дугу T_ε^- пересекает устойчивый гиперболический цикл $\Gamma_1(\varepsilon)$, проходящий через точку $\eta(u_-(\varepsilon) + u_1)$, к которому ω-предельны все траектории, пересекающие дугу $\eta[u_-(\varepsilon) - u_*, u_-(\varepsilon))$, и замкнутая траектория $\Gamma_2(\varepsilon)$, проходящая через точку $\eta(u_\pm(\varepsilon))$ и касающаяся S в точке $O(\varepsilon)$, к которой α-предельны траектории, проходящие через точки дуги $\eta(u_-(\varepsilon) + u_1, u_-(\varepsilon))$.

При $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0] \times (0, \tilde{\delta}_0)$ $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ не имеет нулей на $[-u_*, 0]$, а поле X_ε не имеет замкнутых траекторий, пересекающих дугу T_ε^-. Действительно, поскольку имеем неравенства $\tilde{d}(0,\varepsilon) = \varepsilon_2 > 0$, $\tilde{d}'_u(0,\varepsilon) = \varepsilon_1 < 0$ и (15), то в противном случае получаем, что максимум и минимум $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ достигается в точках интервала $(-u_{**}, 0)$, и потому $\tilde{d}'_u(\cdot,\varepsilon)$ имеет по меньшей мере два нуля, что противоречит (13). При $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0] \times (-\tilde{\delta}_0, 0)$ из неравенства $\tilde{d}(0,\varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$, из (15) и (13) следует, что $\tilde{d}(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $[-u_*, 0]$ единственный нуль $u_0 \in (-u_{**}, 0)$, при этом $\tilde{d}'_u(u_0,\varepsilon) < 0$. Поле X_ε имеет единственную замкнутую траекторию, пересекающую дугу T_ε^- – устойчивый гиперболический цикл. При $\varepsilon \in (-\tilde{\delta}_0, 0) \times \{0\}$ аналогично получаем, что через точки $\eta(u_\pm(\varepsilon))$ и $O(\varepsilon)$ проходит замкнутая траектория, к которой ω-предельны все остальные траектории, пересекающие дугу T_ε^-.

Функцию расхождения d, которая была определена на $(-\bar{\bar{v}}, 0] \times \mathrm{E}_*$, продолжим с сохранением гладкости на $(-\bar{\bar{v}}, \bar{\bar{v}}) \times \mathrm{E}_*$. Поскольку $(f_*)'_u(0,\varepsilon) = \tilde{f}'_u(0,\varepsilon) = 1 + \tilde{d}'_u(0,\varepsilon) = 1 + \varepsilon_1$, то из (7) получаем $(f_+)''_{ww}(0,\varepsilon) = (1+\varepsilon_1)(f_-)''_{vv}(0,\varepsilon)$. Отсюда, из (2), (3), (10), (6), (8) и определения функции d следует, что

$$d(v,\varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 b(\varepsilon) v^2 + c(\varepsilon) v^3 + o(v^3), \text{ где } b(0) = (f_-)''_{vv}(0,0) > 0,\ c(0) = d'''_{vvv}(0,0)/6 > 0. \quad (16)$$

Тогда $d'_v(v,\varepsilon) = v\hat{d}(v,\varepsilon)$, где $\hat{d} \in C^{r-2}$, $\hat{d}(v,\varepsilon) := 2\varepsilon_1 b(\varepsilon) + 3c(\varepsilon)v + o(v)$.

При $\varepsilon_2 \ne 0$ система уравнений $d(v,\varepsilon) = d'_v(v,\varepsilon) = 0$ равносильна системе уравнений

$$d(v,\varepsilon) = \hat{d}(v,\varepsilon) = 0. \quad (17)$$

Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} d'_{\varepsilon_2}(0,0) & \hat{d}'_{\varepsilon_2}(0,0) \\ d'_v(0,0) & \hat{d}'_v(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3c(0) \end{vmatrix} = 3c(0) \ne 0,$$

то по теореме о неявной функции получаем существование таких $\delta_0 \in (0, \delta_*]$ и $v_* \in (0, \bar{\bar{v}}]$, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_0, \delta_0)$ система уравнений (17) относительно $(\varepsilon_2, v) \in (-\delta_0, \delta_0) \times (-v_*, v_*)$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, $v = \hat{v}(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_2, \hat{v} \in C^{r-2}$,

$$\beta_2(\varepsilon_1) = -(4b^3(0)/27c^2(0))\varepsilon_1^3 + o(\varepsilon_1^3),\quad \hat{v}(\varepsilon_1) = -(2b(0)/3c(0))\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1).$$

Отсюда и из (16) следует, что v_* и δ_0 можно считать столь малыми, что

$$\forall \varepsilon_1 \in (-\delta_0, \delta_0)\ \operatorname{sgn} \hat{v}(\varepsilon_1) = -\operatorname{sgn} \varepsilon_1,\ \forall \varepsilon_1 \in (0, \delta_0)\ -\varepsilon_1 < \beta_2(\varepsilon_1) < 0,\ d''_{vv}(\hat{v}(\varepsilon_1), \varepsilon_1, \beta_2(\varepsilon_1)) > 0, \quad (19)$$

а при всех $v \in (-v_*, v_*)$, $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$

$$d'''_{vvv}(v,\varepsilon) > 0, \tag{20}$$

$$d'_{\varepsilon_2}(v,\varepsilon) \ge 1/2. \tag{21}$$

Фиксируем v_*. Ввиду (4) $u^* := f_-(-v_*,0) > 0$. Так как $f(u^*,0) < u^*$, то найдется число $v_{**} > 0$ такое, что $-v_* < f_-^{-1}(f(u^*,0),0) < -v_{**} < 0$. Уменьшив при необходимости δ_0, будем иметь

$$\forall \varepsilon \in (-\delta_0,\delta_0)^2 \;\; d(v,\varepsilon) < 0, \text{ если } v \in [-v_*, -v_{**}] \;\; d''_{vv}(-v_*,\varepsilon) < 0. \tag{22}$$

Из (19) следует, что поле X_ε, $\varepsilon \in (-\delta_0,\delta_0)^2$ имеет негиперболическую замкнутую траекторию, пересекающую дугу $T_\varepsilon^+ = \eta[u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon)+u^*]$, только при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0,\delta_0)$; эта траектория проходит через точку $\eta(u_-(\varepsilon) + f_-(\hat{v}(\varepsilon_1),\varepsilon))$ и является двойным циклом. Из (22), (20) и неравенства $d(0,\varepsilon) = \beta_2(\varepsilon_1) < 0$ следует, что других замкнутых траекторий, пересекающих T_ε^+, в этом случае нет.

При $\varepsilon_1 \in (0,\delta_0)$, $\beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \le 0$ из (21) и равенства $d(\hat{v}(\varepsilon_1),\varepsilon_1,\beta_2(\varepsilon_1)) = 0$ получаем, что при некотором $v' \in (-v_*,0)$ $d(v',\varepsilon) > 0$. Отсюда из (22) и неравенства $d(0,\varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$ следует, что $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет на интервале $(-v_*,0)$ четное число N (простых) нулей. Предположение о том, что $N \ge 4$ вследствие теоремы Ролля противоречит неравенству (20). Таким образом, $N = 2$, то есть дугу T_ε^+ пересекают два гиперболических цикла. При $\varepsilon_2 = 0$ получаем, что $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет на интервале $(-v_*,0)$ единственный нуль v^0, в котором $d'_v(v^0,\varepsilon) > 0$, и, соответственно, дугу $\eta(u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon)+u^*]$ пересекает единственная замкнутая траектория – устойчивый гиперболический цикл $\Gamma_3(\varepsilon)$. Кроме того, $d(0,\varepsilon) = 0$ и $d(v,\varepsilon) > 0$ при $v \in (v^0,0)$, то есть к циклу $\Gamma_2(\varepsilon)$, проходящему через точку $O(\varepsilon)$, α-предельны траектории, пересекающие дугу $\eta(u_-(\varepsilon), u_-(\varepsilon)+u^0)$, где $u^0 := f_-(v^0,\varepsilon)$. Поскольку траектории, проходящие через точки $\eta(u)$, $u \in (u_-(\varepsilon)+u_1, u_-(\varepsilon))$, дуги T_ε^-, также α-предельны к $\Gamma_2(\varepsilon)$, то $\Gamma_2(\varepsilon)$ – неустойчивый цикл.

Поскольку при $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0,\delta_0)$, $-v_* \le v \le 0$ $d(v,\varepsilon) \le 0$, то из (21) следует, что при $-\delta_0 < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0,\delta_0)$, $-v_* \le v \le 0$ $d(v,\varepsilon) < 0$, и потому замкнутые траектории не пересекаются с T_ε^+.

Считая δ_0 достаточно малым, из (16) получаем

$$d(0,\varepsilon) > 0 \;\text{ при всех }\; \varepsilon \in (-\delta_0,\delta_0)\times(0,\delta_0). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет на интервале $(-v_*,0)$ нечетное число N (простых) нулей. Если $N \ge 3$, то по теореме Ролля $d'_v(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $(-v_0,0)$ не менее двух нулей, а на $(-v_0,0]$, не менее трех нулей. По теореме Ролля $d'''_{vvv}(\cdot,\varepsilon)$ имеет нуль, что противоречит (20). Таким образом, $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $[-v_*,0)$ единственный нуль $v_0 \in (-v_*,0)$, а $d'_v(v_0,\varepsilon) > 0$. Соответственно, дугу T_ε^+ при $\varepsilon \in (-\delta_0,\delta_0)\times(0,\delta_0)$ пересекает единственная замкнутая траектория – устойчивый гиперболический предельный цикл.

Покажем, что при $\varepsilon \in (-\delta_0,0]\times(-\delta_0,0)$ дуга T_ε^+ не пересекается с замкнутыми траекториями. Предположим противное: при $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*) \in (-\delta_0,0]\times(-\delta_0,0)$ дуга T_ε^+ пересекается с замкнутой траекторией. Пусть $I = (-\delta_0,-\varepsilon_2^*)\times\{\varepsilon_2^*\}$. Если замкнутая траектория поля X_ε, $\varepsilon \in I$, пересекает T_ε^+ в точке $\eta(u_p)$, то $v_p = f_-^{-1}(u_p,\varepsilon) \in (-v_*,0)$, $d(v_p,\varepsilon) = 0$, $d'_v(v_p,\varepsilon) \ne 0$. По теореме о неявной функции при всех $\tilde{\varepsilon} \in I$, достаточно близких к ε, $d(\cdot,\tilde{\varepsilon})$ также имеет нуль. Поэтому множество тех $\varepsilon \in I$, при которых дуга T_ε^+ пересекается с замкнутыми траекториями, непустое и открытое в I. Множество тех $\varepsilon \in I$, при которых дуга T_ε^+ не пересекается с замкнутыми траекториями, задается условием $d(v,\varepsilon) < 0$ для всех $v \in [-v_*,0]$ и потому также непустое и открытое в I. Но это невозможно, поскольку I связно. Поэтому сделанное предположение неверно, и дуга T_ε^+ не пересекается с замкнутыми траекториями.

При $\varepsilon \in (-\delta_0, 0] \times \{0\}$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет на $[-v_*, 0]$ единственный нуль $v = 0$. Действительно, если бы существовал еще нуль v_c, то тогда $v_c \in (-v_*, 0)$, $d'_v(v_c, \varepsilon) \neq 0$, и по теореме о неявной функции $d(\cdot, \tilde{\varepsilon})$ имела бы нуль при некотором $\tilde{\varepsilon} \in (-\delta_0, 0) \times (-\delta_0, 0)$, что невозможно. Учитывая (22), получаем $d(u, \varepsilon) < 0$ при всех $v \in [-v_*, 0)$, и потому все траектории, пересекающие T_ε^+, ω-предельны к замкнутой траектории, проходящей через точку $O(\varepsilon)$.

Так как $\tilde{f}(u, 0) > u$, при $u \in [-u_*, 0)$, а $f(u, 0) < u$ при $u \in (0, u^*]$, то из [9, с. 100] следует, что через точку $\eta(\tilde{f}(-u_*, 0))$ ($\eta(f(u^*, 0))$) дуги T_0^- (T_0^+) можно провести замкнутую C^1-кривую γ_- (γ_+) так, что $\gamma_- \cup \gamma_+$ – граница ∂U окрестности U цикла Γ_0, в точках которой поле X_0 не касается ∂U и направлено внутрь U; при этом все траектории поля X_0, начинающиеся в точках U, пересекают дугу $\eta(-u_*, u^*)$, ω-предельны к Γ_0, а при убывании времени выходят из U. Выбрав число $0 < \delta < \min\{\delta_0, \tilde{\delta}_0\}$ достаточно малым, получим, что при всех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ поле X_ε направлено внутрь U, дуга $\eta[u_-(\varepsilon) - u_{**}, u_-(\varepsilon) + u^{**}]$ принадлежит U, а любая траектории поля, начинающаяся в точках U, пересекает дугу $\eta[u_-(\varepsilon) - u_*, u_-(\varepsilon) + u^*] = T_\varepsilon^- \cup T_\varepsilon^+$. Вследствие неравенств (15) и (22) любая замкнутая траектория поля X_ε, пересекающая дугу $T_\varepsilon^- \cup T_\varepsilon^+$, пересекает и дугу $\eta[u_-(\varepsilon) - u_{**}, u_-(\varepsilon) + u^{**}]$, а потому принадлежит U.

Определив теперь множества B_i и E_j так, как это сделано в формулировке теоремы, из доказанного выше получаем все утверждения теоремы.

4. Бифуркации в случае $d'''_{vvv}(0,0) < 0$. В этом случае Γ – полуустойчивая траектория, бифуркационная кривая двойных циклов B_2 задается уравнением $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где теперь $\beta_2 : (-\delta, 0) \to (-\delta, 0)$, $\beta_2(-0) = \beta'_2(-0) = 0$, кривая $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_0 \cup \mathrm{B}_2$ – C^1-гладкая, $(-\delta, \delta)^2 \setminus \mathrm{B}$ имеет две компоненты E_1 и E_2, векторные поля X_ε при $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$ ($\varepsilon \in \mathrm{E}_2$) в окрестности Γ имеют две замкнутые траектории (не имеют замкнутых траекторий). Таким образом, Γ бифурцирует аналогично двойному циклу при типичных двухпараметрических возмущениях. В этом случае Γ можно назвать сшитым двойным циклом.

Литература

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

2. Piecewise-smooth Dynamical Systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A. R. Capneys, P. Kowalczyk. – London: Springer, 2008. – 483 p.

3. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

4. Simpson, D.J.W. Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Dynamical Systems / D.J.W. Simpson. – World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. Vol. 69. New-Jersey: World Scientific, 2010. – 238 p.

5. Ройтенберг, В.Ш. О грубых непрерывных кусочно-гладких динамических системах на плоскости / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. – 2021. – № 4. – С. 24–29.

6. Ройтенберг, В.Ш. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы сшитого седлоузла / В.Ш. Ройтенберг // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2022. – Т. 22, вып. 2. – С. 159–168.

7. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1962. – Т. 1. – 607 с.

8. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. – Ярославль: Изд. ЯГТУ, 2014. – С. 54–67.

9. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

Поступила в редакцию 31 октября 2023 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 1, pp. 39–48

DOI: 10.14529/mmph240105

BIFURCATIONS OF A FUSED TRIPLE CYCLE OF A PIECEWISE-SMOOTH CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEM

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Abstract. The study of bifurcations of dynamic systems defined by piecewise-smooth continuous vector fields is interesting from a theoretical and practical point of view. Nonlocal bifurcations in generic one-parameter families of such systems on a plane have already been described. In this paper, we consider a generic two-parameter family of piecewise-smooth continuous planar vector fields. At zero values of the parameters, it is assumed that the vector field has a smooth stable closed trajectory Γ, which has a simple tangency with the field switching line. A bifurcation diagram of a family is obtained – a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane into sets, for whose elements the corresponding vector fields of the family have the same number and type of closed trajectories in some fixed neighborhood of Γ. In particular, we show that the maximum number of closed trajectories born from Γ when the parameters change is three.

Keywords: piecewise-smooth continuous vector field; dynamical system; closed trajectory; bifurcation diagram.

References

1. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side). Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (in Russ.).

2. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. *Piecewise-smooth Dynamical Systems*. London: Springer, 2008, 483 p. (Applied Mathematical Sciences, Vol. 163). DOI: 10.1007/978-1-84628-708-4

3. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovanija dinamicheskih sistem na ploskosti* (Methods and Techniques for a Qualitative Study of Dynamical Systems on a Plane). Moscow, Nauka, 1976, 496 p. (in Russ.)

4. Simpson D.J.W. Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Dynamical Systems. *World scientific series on nonlinear science, Series A*, Vol. 69, New-Jersey: World Scientific, 2010, 238 p. DOI: 10.1142/7612

5. Roitenberg V.Sh. On Structurally Stable Continuous Piecewise-Smooth Dynamical Systems on the Plane. *The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences*, 2021, no. 4, pp. 24–29. (in Russ.). DOI: 10.53598/2410-3225-2021-4-291-24-29

6. Roitenberg V.Sh. On Generation of a Limit Cycle from a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, Vol. 22, Iss. 2, pp. 159–168 (in Russ.). DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-159-168

7. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Differential and Integral Calculus Course). Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962, Vol. 1, 607 p. (in Russ.).

8. Roitenberg V.Sh. On Bifurcations of a Sewing Triple Cycle. Mathematics and mathematical education. *Theory and practice: inter-higher school coll. of Sci. Papers, Iss. 9*, Yaroslavl: YaSTU Publ., 2014, pp. 54–67. (in Russ.) URL: https://www.ystu.ru/information/university/nauka/

9. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. New York, J. Wiley; Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1973, 524 p.

Received October 31, 2023

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich is Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998, e-mail: vroitenberg@mail.ru.