# Краткие сообщения

УДК 534.2 DOI: 10.14529/mmph240107

## О КОРНЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ ПРИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

***С.Ю. Гуревич, Д.Г. Кожевников, Е.В. Голубев***
*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
*e-mail: golubevev@susu.ru*

**Аннотация. Получен ряд корней характеристического уравнения для поверхностных волн в предположении, что квадрат отношения скоростей объемных волн представляет собой рациональное число. Точные формулы для найденных корней содержат минимум радикалов и рациональных чисел.**

*Ключевые слова: поверхностные волны; скорость волны Рэлея; корни характеристического уравнения; точные формулы.*

Скорость волны Рэлея в задачах акустики однородных упругих сред может быть найдена с помощью выражения $c_r = c_t\sqrt{x}$, где $x$ – единственный действительный корень, принадлежащий интервалу $[0,1)$, уравнения [1, с. 136]:

$$x^3 - 8x^2 + 8x\left(3 - 2u^2\right) - 16\left(1 - u^2\right) = 0\,, \tag{1}$$

где сделана замена $x = \xi^2$ и введены обозначения: $u^2 = (c_t/c_l)^2$, $c_r, c_t, c_l$ – скорости поверхностных, поперечных и продольных волн соответственно.

Аналитическое выражение для вычисления корня уравнения (1) в общем случае, полученное в [2, см. (10) и (6)], дает довольно громоздкую конечную формулу. Однако в работе [3] представлены значения корней для некоторых значений $u^2$ в виде простых дробей. В нашей работе мы продолжим поиск значений $u^2$, которым соответствуют корни, допускающие простую запись.

При решении акустической задачи для скоростей акустических волн берут экспериментальные значения, которые содержат конечное число знаков. Следовательно, параметр $u^2$ является рациональным числом. Поставим простую обратную задачу нахождения рациональных значений параметра $u^2$, которым соответствуют корни, формулы для вычисления которых содержат минимум радикалов и рациональных чисел.

Будем искать решения в виде $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$, где $i$, $j$, $k$ – целые числа, что продиктовано формой записи некоторых случайно найденных ранее корней (например, $3 - \sqrt{5}$ для $u^2 = 1/2$). Для этого выразим $u^2$ из (1):

$$u^2 = \frac{x^3 - 8x^2 + 24x - 16}{16(x-1)} \tag{2}$$

и, подставляя $x_{ijk}$, будем искать значения $u^2$, представимые в виде отношения целых чисел $l$ и $m$. Корни в количестве 19 шт., найденные простым перебором $i$, $j$, $k$, $l$ и $m$, значения которых не превышает 1000, помечены звездочкой (*) и представлены в таблице, где введено обозначение $\sigma = (2u^2 - 1)/2(u^2 - 1)$ для коэффициента Пуассона. Поскольку $\sigma \in [-1, 1/2]$, то рассматриваются $x_{ijk}$ такие, что $u^2 \le 0,75$. В таблице приведены только простейшие формулы для корней, остальные легко получить по значениям $i$, $j$, $k$.

**Таблица корней характеристического уравнения (1)**

| $\sigma$ | | $u^2$ | | $i$ | $j$ | $k$ | $x_{ijk}=(i-\sqrt{j})/k$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114/235 [3] | 0,4851064 | 7/242* | 0,0289256 | 10 | 0 | 11 | 10/11 | 0,9090909 |
| 55/136 [3] | 0,4044118 | 13/81* | 0,1604938 | 8 | 0 | 9 | 8/9 | 0,8888889 |
| 20/69 [3] | 0,2898551 | 29/98* | 0,2959184 1) | 6 | 0 | 7 | 6/7 | 0,8571429 |
| 116/441 | 0,2630385 | 209/650 | 0,3215385 | 11 | 593/13 | 5 | | 0,8492168 |
| 57/217 | 0,2626728 | 103/320 | 0,321875 | 9 | 157/5 | 4 | | 0,8491074 |
| 205/781 | 0,2624840 | 371/1152 | 0,3220486 | 13 | 125/2 | 6 | | 0,849051 |
| 22/85 | 0,2588235 | 41/126 | 0,3253968 | 7 | 139/7 | 3 | | 0,8479549 |
| 93/368 | 0,2527173 | 91/275 | 0,3309091 | 12 | 664/11 | 5 | | 0,8461192 |
| 1/4 [4] | 0,25 | 1/3* | 0,3333333 2) | 6 | 12 | 3 | $2(3-\sqrt{3})/3$ | 0,8452995 |
| 5/21 | 0,2380952 | 11/32* | 0,34375 | 5 | 11 | 2 | $(5-\sqrt{11})/2$ | 0,8416876 |
| 328/1455 | 0,2254296 | 799/2254 | 0,3544809 | 13 | 1171/23 | 7 | | 0,8378089 |
| 203/923 | 0,2199350 | 517/1440 | 0,3590278 | 11 | 179/5 | 6 | | 0,836115 |
| 62/287 | 0,2160278 | 163/450 | 0,3622222 | 13 | 701/9 | 5 | | 0,8349064 |
| 114/539 | 0,2115028 | 311/850 | 0,3658824 | 9 | 397/17 | 5 | | 0,8335024 |
| 77/365 [3] | 0,2109589 | 211/576* | 0,3663194 | 5 | 0 | 6 | 5/6 | 0,8333333 |
| 55/279 | 0,1971326 | 169/448 | 0,3772321 | 7 | 95/7 | 4 | | 0,8290145 |
| 11/56 | 0,1964286 | 17/45* | 0,3777778 | 40 | 760 | 15 | $(40-2\sqrt{190})/15$ | 0,8287935 |
| 279/1504 | 0,1855053 | 473/1225 | 0,3861224 | 12 | 968/25 | 7 | | 0,8253515 |
| 20/119 | 0,1680672 | 79/198 | 0,3989899 | 5 | 71/11 | 3 | | 0,8198068 |
| 19/115 | 0,1652174 | 77/192 | 0,4010417 | 11 | 179/3 | 4 | | 0,818895 |
| 341/2261 | 0,1508182 | 1579/3840 | 0,4111979 | 13 | 631/15 | 8 | | 0,8142647 |
| 29/204 | 0,1421569 | 73/175 | 0,4171429 | 14 | 692/7 | 5 | | 0,8114614 |
| 77/552 | 0,1394928 | 199/475 | 0,4189474 | 8 | 296/19 | 5 | | 0,8105965 |
| 190/1513 | 0,1255783 | 1133/2646 | 0,4281935 | 11 | 775/27 | 7 | | 0,8060595 |
| 377/3212 | 0,1173724 | 1229/2835 | 0,4335097 3) | 14 | 1604/35 | 9 | | 0,8033689 |
| 3/28 [3] | 0,1071429 | 11/25* | 0,44 | 4 | 0 | 5 | 4/5 | 0,8 |
| 3/35 | 0,0857143 | 29/64* | 0,453125 | 3 | 2 | 2 | $(3-\sqrt{2})/2$ | 0,7928932 |
| 154/3151 | 0,0488734 | 2843/5994 | 0,4743076 | 13 | 1321/37 | 9 | | 0,7805362 |
| 55/1476 | 0,0372629 | 683/1421 | 0,4806474 | 10 | 604/29 | 7 | | 0,7766107 |
| 8/533 | 0,0150094 | 517/1050 | 0,492381 4) | 7 | 209/21 | 5 | | 0,7690521 |
| 0 | 0 | 1/2* | 0,5 | 3 | 5 | 1 | $3-\sqrt{5}$ | 0,7639320 |
| –13/2163 | –0,0060102 | 2189/4352 | 0,5029871 | 11 | 409/17 | 8 | | 0,7618776 |
| –5/123 [3] | –0,0406504 | 133/256* | 0,5195313 | 3 | 0 | 4 | 3/4 | 0,75 |
| –5/112 | –0,0446429 | 61/117 | 0,5213675 | 4 | 40/13 | 3 | | 0,748628 |
| –323/4077 | –0,0792249 | 4723/8800 | 0,5367045 | 13 | 349/11 | 10 | | 0,7367303 |
| –132/1387 | –0,0951694 | 1651/3038 | 0,5434496 | 9 | 467/31 | 7 | | 0,7312424 |
| –35/328 | –0,1067073 | 199/363* | 0,5482094 | 8 | 0 | 11 | 8/11 | 0,7272727 |
| –589/5340 | –0,1102996 | 3259/5929 | 0,5496711 | 14 | 1772/49 | 11 | | 0,7260373 |
| –35/253 | –0,1383399 | 323/576 | 0,5607639 | 5 | 41/9 | 4 | | 0,7164063 |
| –496/2825 | –0,1755752 | 3817/6642 | 0,5746763 | 11 | 893/41 | 9 | | 0,7036714 |
| –99/476 | –0,2079832 | 337/575 | 0,586087 | 6 | 148/23 | 5 | | 0,6926625 |
| –209/799 | –0,2615770 | 1217/2016 | 0,6036706 | 7 | 61/7 | 6 | | 0,6746672 |
| –2/7 [3] | –0,2857143 | 11/18* | 0,6111111 | 2 | 0 | 3 | 2/3 | 0,6666667 |
| –377/1240 | –0,3040323 | 997/1617 | 0,6165739 | 8 | 376/33 | 7 | | 0,6606441 |
| –615/1817 | –0,3384700 | 3047/4864 | 0,6264391 | 9 | 275/19 | 8 | | 0,6494463 |
| –935/2548 | –0,3669545 | 2209/3483 | 0,6342234 | 10 | 772/43 | 9 | | 0,640316 |
| –1349/3451 | –0,3909012 | 6149/9600 | 0,6405208 | 11 | 131/6 | 10 | | 0,6327385 |
| –1869/4544 | –0,4113116 | 4141/6413 | 0,6457196 | 12 | 1384/53 | 11 | | 0,6263538 |
| –261/584 | –0,4469178 | 553/845* | 0,6544379 | 8 | 0 | 13 | 8/13 | 0,6153846 |
| –133/267 | –0,4981273 | 533/800* | 0,66625 | 3 | 0 | 5 | 3/5 | 0,6 |
| –11/21 | –0,5238095 | 43/64* | 0,671875 | 13 | 113 | 4 | $(13-\sqrt{113})/4$ | 0,5924635 |
| –55/92 | –0,5978261 | 101/147* | 0,6870748 | 4 | 0 | 7 | 4/7 | 0,5714286 |
| –2/3 | –0,6666667 | 7/10* | 0,7 | 5 | 5 | 5 | $(5-\sqrt{5})/5$ | 0,5527864 |
| –15/17 [3] | –0,8823529 | 47/64* | 0,734375 | 1 | 0 | 2 | 1/2 | 0,5 |

*Значения $u^2$ для реальных веществ, рассчитанные по данным [6]: 1) олово (кристалл) – 0,298091, железо – 0,304855; 2) цинк – 0,334012; 3) германий (кристалл) – 0,431349; 4) бериллий – 0,494211.*

В целях оптимизации несложной, но длительной процедуры поиска, установим связь между $i$, $j$ и $k$, подставив в (1) вид искомых корней $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$:

$$u^2 = \frac{1}{16}\left[x^2 - 7x + 17 + \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{16}\left[17 + \frac{-k^3 - 7ik^2 + (8j + 8i^2)k - 3ij - i^3 + \sqrt{j}(7k^2 - 16ik + j + 3i^2)}{k^2(k - i + \sqrt{j})}\right].$$

Очевидно, что результат будет рациональным числом, если выполнено условие

$$\frac{-k^3 - 7ik^2 + (8j + 8i^2)k - 3ij - i^3}{k - i} = 7k^2 - 16ik + j + 3i^2.$$

Для $j$ и $u^2$ в этом случае получаем выражения

$$j = \frac{8k^3 - 16ik^2 + 11i^2k - 2i^3}{7k - 2i}, \quad u^2 = \frac{22k^3 - 22ik^2 + 8i^2k - i^3}{2k^2(7k - 2i)}. \tag{3}$$

Для увеличения списка возможных корней мы ослабим первоначальное требование и будем считать, что $j$ – неотрицательное рациональное число. Задавая произвольные положительные числа $i$ и $k$, с помощью (3) мы находим корень $x_{ijk} = (i - \sqrt{j})/k$ и соответствующее ему $u^2$. Например, для $i = 5$, $k = 5$ находим $j = 5$, что соответствует уже найденному перебором значению (см. таблицу). Для $i = 12$ и $k = 5$ находим $j = 664/11$, что дает новый корень для $u^2 = 91/275 \approx 0,331$. Таким образом мы дополнили таблицу корнями с $i, k \le 25$ и $l, m \le 10000$.

Есть еще один корень, содержащий другую степень в выражении $x = 2(4 - \sqrt[3]{19})/3 = (8 - \sqrt[3]{152})/3 \approx 0,888$ [4, 5], который соответствует рациональному значению $u^2 = 1/6$. Обозначив $x_{ijk} = (i - \sqrt[3]{j})/k$, мы провели аналогичное исследование и получили, что рациональные значения для $u^2$ можно получить только при $3i = 8k$ и $j = 152k^3/27$, что означает его единственность ($k = 1$), поскольку при $k > 1$ значение $u^2 > 3/4$.

Полученные результаты могут использоваться на практике для приближенных вычислений. Так, многие горные породы в сейсмологии характеризуются значениями $u^2$ в диапазоне примерно от 0,16 (песчаник, мел) до 0,37 (гранит, метаморфические породы). Также среди ряда полученных значений, есть близкие к расчетным данным для олова, железа, цинка, германия и бериллия (см. сноски к таблице). К сожалению, точных корней, соответствующих $u^2 < 0,3$ и удовлетворяющих условиям, принятым в постановке задачи, немного, а именно такие значения получаются для многих металлов [6]. Мы можем предположить, что корни в этом диапазоне имеют другую простую форму записи, отличную от предполагаемой в работе. Лучшим будет для таких значений $u^2$ использовать точное значение корня [2].

**Литература**

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

2. Malischewsky, P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters / P.G. Malischewsky // Geofísica Internacional. – 2004. – Vol. 43, no. 3. – P. 507–509.

3. Pichugin, A. Approximation of the Rayleigh Wave Speed / A. Pichugin // People.Brunel.Ac.Uk (Unpublished draft). – 2008. http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf

4. Malischewsky, P.G. Comment to “A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves” by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205] / P.G. Malischewsky // Wave Motion. – 2000. – Vol. 31. – P. 93–96.

5. Mechkour, H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation / H. Mechkour // Proceedings of the 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2) April 22–27, 2002, Bucharest, ROMANIA. – P. 96–104.

6. Кикоин, И.К. Таблицы физических величин. Справочник / И.К. Кикоин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1005 с.

*Поступила в редакцию 12 ноября 2023 г.*

**Сведения об авторах**

Гуревич Сергей Юрьевич – доктор технических наук, профессор, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1042-0303, e-mail: gurevichsi@susu.ru.

Кожевников Дмитрий Григорьевич – старший преподаватель, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация.

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://ocrid.org/0000-0002-6641-0702, e-mail: golubevev@susu.ru.

***Bulletin of the South Ural State University***
***Series "Mathematics. Mechanics. Physics"***
***2024, vol. 16, no. 1, pp. 56–59***

**DOI: 10.14529/mmph240107**

## THE ROOTS OF THE RAYLEIGH CHARACTERISTIC EQUATION FOR RATIONAL VALUES OF THE PARAMETER

***S.Yu. Gurevich, D.G. Kozhevnikov, E.V. Golubev***
*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*
*e-mail: golubevev@susu.ru*

Abstract. The roots of the Rayleigh characteristic equation for surface waves are obtained under the assumption that the square of the ratio of the velocities of volume waves is a rational number. The exact formulas for the roots contain a minimum of radicals and rational numbers.

*Keywords: surface waves; Rayleigh wave velocity; roots of the characteristic equation; exact formulas.*

**References**

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity* (3rd ed.). Oxford, England: Butterworth Heinemann, 1986, 204 p.
2. Malischewsky P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters. *Geofísica Internacional*, 2004, Vol. 43, no. 3, pp. 507–509.
3. Pichugin A.V. Approximation of the Rayleigh Wave Speed. *Unpublished draft*, 2008, http://people.brunel.ac.uk/~mastaap/draft06rayleigh.pdf
4. Malischewsky P.G. Comment to "A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves" by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205]. *Wave Motion*, 2000, Vol. 31, pp. 93–96.
5. Mechkour H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation. *BSG Proceedings 8,* Geometry Balkan Press, 2003, pp. 96–104.
6. Kikoin I.K. *Tablitsy fizicheskikh velichin. Spravochnik* (Tables of Physical Quantities. Guide). Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1005 p. (in Russ.).

***Received November 12, 2023***

**Information about the authors**

Gurevich Sergey Yur'evich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1042-0303, e-mail: gurevichsi@susu.ru.

Kozhevnikov Dmitriy Grigor'evich is Senior Lecturer, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://ocrid.org/0000-0002-6641-0702, e-mail: golubevev@susu.ru.