УДК 517.965 **DOI: 10.14529/mmph240201**

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ СДВИГОМ НА СЛОЖНЫХ КРИВЫХ

В.Л. Дильман
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Аннотация. Рассматриваются линейные функциональные уравнения с функцией сдвига, имеющей ненулевую производную, удовлетворяющую условию Гельдера, на произвольной кусочно-гладкой кривой. Такие уравнения изучаются в связи с теорией краевых задач для аналитических функций, являющихся математическим аппаратом при исследовании математических моделей теории упругости, в которых условия сопряжения содержат сдвиг по границе. Предполагается, что функция сдвига действует циклично на множестве простых кривых, образующих данную кривую, причем кроме концов простых кривых, нет периодических относительно функции сдвига точек. Цель работы – найти условия существования и единственности решения (а в случае неединственности мощности множества решений) таких уравнений в классах гельдеровских и первообразных от лебеговских функций с коэффициентом и правой частью из таких же классов.

Ключевые слова: линейные функциональные уравнения от одной переменной; классы первообразных от лебеговских функций, кусочно-гладкие кривые.

Введение. Линейные функциональные уравнения (ЛФУ)

$$\left(F_g\left(\psi\right)\right)\left(t\right) \equiv \psi\left(\alpha\left(t\right)\right) - g\left(t\right)\psi\left(t\right) = h\left(t\right), \tag{1}$$

определенные на гладких кривых $\Gamma = [ab]$ комплексной плоскости, возникают при решении сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими особенностями, имеющими вид интегралов с ядром Коши с двумя переменными пределами [1]. Эти пределы зависят один от другого (обозначим эту зависимость α). Такие уравнения рассматриваются в связи с теорией краевых задач для аналитических функций, являющихся математическим аппаратом теории упругости, в которых условия сопряжения содержат сдвиг по границе [2–4].

С позиций [1] интерес представляет исследование инвариантности оператора $(F_g(\psi))^{-1}$ относительно гельдеровских, лебеговских классов функций, а также классов первообразных от таких функций, в том числе с некоторыми дополнительными условиями на концах кривых. При этом важно понять, как меняются параметры, характеризующие эти классы, под действием указанного оператора. Этим вопросам для уравнения (1) на простых гладких кривых посвящена работа [5] и другие работы (см. литературу в [5]).

Имеется большое количество публикаций, связанных с уравнением (1) и его обобщениями. В них изучались вопросы существования решений, условий единственности, описания общих решений, в основном в классах непрерывных функций [6–13].

В работах [11–13] рассматривались ЛФУ с функциями сдвига α, порождающими конечную группу относительно суперпозиции. Такие ЛФУ появляются при математическом моделировании методов защиты человека и окружающей среды при процессах переноса заряженных частиц и ионизированных излучений [13].

В работе [5] функция сдвига α имела в качестве периодических точек только 2 неподвижные точки – концы кривой. При изучении уравнения (1) на произвольной кусочно-гладкой кривой [14] приходится рассматривать варианты, когда концы простых дуг, образующих кривую, являются периодическими (не обязательно неподвижными) относительно α точками. Тогда некоторая степень отображения α действует на каждой простой дуге как автоморфизм, но не тождественный, как в [11–13], а имеющий бесконечный порядок. Статья посвящена исследованию

ЛФУ вида (1) на сложных гладких кривых с функциями сдвига α, имеющими циклическую группу периодических точек.

С позиции построения решения (например, в виде суммы сходящегося ряда) на простой дуге естественной областью задания уравнения (1) является кривая, содержащая один из концов и не содержащая другой: $[a;b)$ или $(a;b]$. Тогда можно получить решение (в некоторых случаях бесконечный класс решений), непрерывное на соответствующем конце. Непрерывное продолжение на другой конец не всегда возможно и требует дополнительных условий. Поэтому многие утверждения, относящиеся к свойствам решений уравнения (1), разбиваются на пары двойственных: одно относится к $[a;b)$, другое к $(a;b]$.

Обозначения и допущения. Пусть $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Gamma_j$, $\Gamma_j = \left[a_j;b_j\right]$, $j=\overline{1,n}$ – произвольная кусочно-гладкая кривая, $\Gamma_j = \left[a_j b_j\right]$, $j=\overline{1,n}$ – простая разомкнутая гладкая дуга. Обозначим через $\overset{\circ}{\Gamma}$ кривую Γ без концов $a_j;b_j$ дуг Γ_j; через Γ^a кривую Γ без концов b_j; через Γ^b кривую Γ без концов a_j. Будем пользоваться обозначениями работы [5] и их естественными обобщениями на Γ. В частности, если M – произвольный класс функций, заданных на Γ, $c_1,\ldots,c_s \in \Gamma$, то пусть $h \in M\left(c_1^{\,0},\ldots,c_s^{\,0}\right)$, если $h \in M$ и $h\left(c_i\right)=0$, $i=\overline{1;s}$. Запись $h \in M\left(c_1^{\,*},\ldots,c_s^{\,*}\right)$ или, подробнее, $h \in M\left(c_1^{\,*},\nu_1,\ldots,c_s^{\,*},\nu_s\right)$, означает, что $\exists \nu_1,\ldots,\nu_s$ такие, что $h(t)\left(t-c_j\right)^{\nu_j} \in M$, $i=\overline{1;s}$.

Степень определенного на Γ обратимого отображения $\alpha=\alpha(t)$, $t\in\Gamma$ обозначаем нижним индексом: $\alpha_0(t)\equiv t$, $\alpha_1(t)\equiv\alpha(t)$, $\alpha_n(t)\equiv\alpha\left(\alpha_{n-1}(t)\right)$, $\alpha_{-1}(t)$ – отображение, обратное к α, $\alpha_{-n}(t)\equiv\alpha_{-1}\left(\alpha_{-n+1}(t)\right)$, $n=\overline{1,\infty}$. Заметим: $\alpha_n\left(\alpha_{-n}(t)\right)\equiv\alpha_{-n}\left(\alpha_n(t)\right)\equiv\alpha_0(t)\equiv t$.

Предположим, что α обладает следующими свойствами:

1) сужение функции α на Γ_j, $j=\overline{1,n}$ непрерывно, взаимно однозначно и с сохранением ориентации переводит дугу Γ_j на дугу Γ_{j+1} (дуга Γ_n переводится на Γ_1); под сохранением ориентации имеется в виду условие: $\alpha(a_j)=a_{j+1}$, $\alpha(a_n)=a_1$. Заметим, отображение α_n оставляет на месте периодические точки и определяет биекцию любой дуги Γ_j, $j=\overline{1,n}$ на себя с неподвижными концами $a_j;b_j$;

2) отображение α действует на $\overset{\circ}{\Gamma}$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно и не имеет других периодических точек, кроме $a_j;b_j$, $j=\overline{1,n}$.

Пример. Γ – простой гладкий замкнутый контур, α непрерывно переводит Γ на себя с сохранением ориентации и имеет конечное число периодических точек. Промежутки между двумя соседними точками – это $\Gamma_j=\left[a_j;b_j\right]$, $j=\overline{1,n}$, где $a_{j+1}=b_j$, $j=1,\ldots,n-1$, $a_1=b_n$;

3) $\forall t\in\Gamma\ \exists\alpha'(t)\neq 0$, причем $\alpha'\in H_\theta$ на Γ, $\theta\in(0;1]$;

4) $\forall j\in\overline{1,n}$ $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\alpha'\left(a_j\right)\right|\neq 1$, $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\alpha'\left(b_j\right)\right|\neq 1$.

Это предположение является обобщением условия 4 из работы [5].

Как и в работе [5], будем считать, что буквами a_k и b_k обозначены соответственно притягивающие (п.н.т.) и отталкивающие (о.н.т.) неподвижные точки отображения α_n. Заметим, что п.н.т. отображением α переводятся друг в друга. То же относится к о.н.т. Условие 4, учитывая эту договоренность, можно записать в виде:

4’). $\forall j\in\overline{1,n}$ $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\alpha'\left(a_j\right)\right|<1$, $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|\alpha'\left(b_j\right)\right|>1$.

Вспомогательные утверждения. Рассмотрим на кривой Γ^a уравнение

$$\psi\left(\alpha_n(t)\right)-\tilde{g}(t)\psi(t)=\tilde{h}(t), \tag{2}$$

где

$$\tilde{g}(t)=\prod_{j=0}^{n-1} g\left(\alpha_j(t)\right), \quad \tilde{h}(t)=h\left(\alpha_{n-1}(t)\right)+\sum_{j=1}^{n-1} h\left(\alpha_{n-1-j}(t)\right)\prod_{k=1}^{j} g\left(\alpha_{n-k}(t)\right). \tag{3}$$

Будем предполагать, что

$$g(t)\neq 0,\ t\in\Gamma,\ j=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Как известно [5], при выполнении условия (4) количество решений уравнения (1) на простой гладкой кривой зависит от $g(a)$, точнее, от выполнения одного из трех условий: 1) $g(a)=1$; 2) $\left|g(a)\right|<1$; 3) $\left|g(a)\right|\geq 1,\ g(a)\neq 1$.

Условия такого же типа (см. ниже формулы (10), (11) и (5)) по отношению к аналогичным параметрам уравнения (2) определяют количество решений уравнения (2).

Лемма 1. Уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Доказательство. Как следствие равенства (1), получаем:

$$\psi\left(\alpha_n(t)\right)-g\left(\alpha_{n-1}(t)\right)\psi\left(\alpha_{n-1}(t)\right)=h\left(\alpha_{n-1}(t)\right)$$

$$g\left(\alpha_{n-1}(t)\right)\psi\left(\alpha_{n-1}(t)\right)-g\left(\alpha_{n-1}(t)\right)g\left(\alpha_{n-2}(t)\right)\psi\left(\alpha_{n-2}(t)\right)=g\left(\alpha_{n-1}(t)\right)h\left(\alpha_{n-2}(t)\right)$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} g\left(\alpha_{n-k}(t)\right)\psi\left(\alpha(t)\right)-\prod_{k=1}^{n-1} g\left(\alpha_{n-k}(t)\right)\psi(t)=\prod_{k=1}^{n-1} g\left(\alpha_{n-k}(t)\right)h(t)$$

Складывая эти равенства, из (3) получим (2).

Лемма 2. Пусть $g\in C^{\left[a_j;b_j\right)}$ для $\forall\, j\in\overline{1,n}$. Если (условие 3-го типа)

$$\prod_{j=1}^{n}\left|g\left(a_j\right)\right|\geq 1,\quad \prod_{j=1}^{n} g\left(a_j\right)\neq 1, \tag{5}$$

то уравнения (1) и (2) равносильны в классе C^{Γ^a}.

Доказательство. Из определений (3) непосредственной проверкой получаются тождества:

$$g(t)\tilde{g}\left(\alpha(t)\right)=g\left(\alpha_n(t)\right)\tilde{g}(t), \tag{6}$$

$$\tilde{h}\left(\alpha(t)\right)+h(t)\tilde{g}\left(\alpha(t)\right)=h\left(\alpha_n(t)\right)+g\left(\alpha_n(t)\right)\tilde{h}(t). \tag{7}$$

Пусть выполняется условие (5). Надо показать, что если $h\in C^{\left[a_j;b_j\right)}$ для $j=\overline{1,n}$, то уравнение (1) следует из уравнения (2). Подставив вместо t в (2) $\alpha(t)$ и применив (6), получим:

$$\frac{\psi\left(\alpha\left(\alpha_n(t)\right)\right)}{g\left(\alpha_n(t)\right)}-\tilde{g}(t)\frac{\psi\left(\alpha(t)\right)}{g(t)}=\frac{h\left(\alpha(t)\right)}{g\left(\alpha_n(t)\right)}.$$

Вычитая из этого равенства уравнение (2) и используя (7), получим:

$$\chi\left(\alpha_n(t)\right)-\tilde{g}(t)\chi(t)=0, \tag{8}$$

где

$$\chi(t)=\frac{\psi\left(\alpha(t)\right)}{g(t)}-\psi(t)-\frac{h(t)}{g(t)}. \tag{9}$$

Это уравнение распадается на n независимых уравнений, каждое из которых задано на простой дуге $\left[a_j;b_j\right)$, $j=\overline{1,n}$. Из условия (5) следует: для $\forall\, j\in\overline{1,n}$ $\left|\tilde{g}\left(a_j\right)\right|\geq 1,\ \tilde{g}\left(a_j\right)\neq 1$. Заметим, что в силу (3) из условия $g\in C^{\left[a_j;b_j\right)}$ следует условие $\tilde{g}\in C^{\left[a_j;b_j\right)}$ для $\forall\, j\in\overline{1,n}$. Это означает, что решение уравнения (8) $\chi(t)\equiv 0\ \ \forall j\in\overline{1,n}$ на дуге $\left[a_j;b_j\right)$ (подробности в статье под номером 19 в списке литературы работы [5]). Тогда из (9) сразу следует, что имеет место равенство (1), то есть уравнения (1) и (2) равносильны в классе $C^{\Gamma^a}\left(a_j^0,\ j\in\overline{1,n}\right)$.

Лемма 3. Пусть $g\in C^{\left[a_j;b_j\right)}$ для $\forall j\in\overline{1,n}$. Если (условие 1-го типа)

$$\prod_{j=1}^{n} g\left(a_j\right)=1, \tag{10}$$

и дополнительно $h\left(a_j\right)=0,\ j=\overline{1,n}$, то уравнения (1) и (2) равносильны в классе $C^{\Gamma^a}\left(a_j^0,\ j\in\overline{1,n}\right)$, то есть в классе функций, обращающихся в ноль в точках $a_j^0,\ j\in\overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть выполняется условие (10), то есть $\tilde{g}\left(a_j\right)=1,\ \forall j\in\overline{1,n}$. Точно так же, как в лемме 1, показывается, что из (1) следует (2). Надо показать, что если $h\in C^{\left[a_j;b_j\right)}\left(a_j^0\right)$ для $j\in\overline{1,n}$ и выполняется (10), то уравнение (1) следует из уравнения (2). Заметим, что из (3) следует, что если $h\left(a_j\right)=0,\ j=\overline{1,n}$, то и $\tilde{h}\left(a_j\right)=0,\ j=\overline{1,n}$. Подставив a_j, $j\in\overline{1,n}$ в (9), получим $\chi\left(a_j\right)\equiv 0$. Если ψ – решение уравнения (1), то χ – решение уравнения (8). По лемме 3 (пункт 1) и теореме 1 (пункт 1) работы [5] для решения уравнения (8) выполняется альтернатива: либо $\chi(t)\equiv 0$ на каждой дуге $\left[a_j;b_j\right)$, $j\in\overline{1,n}$, либо $\chi\left(a_j\right)\neq 0,\ j=\overline{1;n}$. Поскольку показано, что второе не имеет места, то: $0\equiv\dfrac{\psi\left(\alpha(t)\right)}{g(t)}-\psi(t)-\dfrac{h(t)}{g(t)}$, что и требовалось.

Замечание 1. Что касается условия 2-го типа

$$\prod_{j=1}^{p}\left|g\left(a_i\right)\right|<1, \tag{11}$$

см. ниже теорему 1.

Замечание 2. Уравнение (2) имеет то преимущество перед уравнением (1), что фактически распадается на n независимых уравнений, каждое из которых задано на простой дуге. Поэтому при выполнении условий 1-го и 3-го типа леммы 1–3 позволяют переносить результаты работы [5] на данный случай.

Теоремы существования и количества решений. Условие (11) является обобщением условий теоремы 1 из [5]. Докажем утверждение, аналогичное указанной теореме. Введем обозначения. Зафиксируем произвольную точку $c\in\overset{\circ}{\Gamma}$. Поскольку по условию эта точка непериодическая, это же верно для $\alpha_k(c)$, поэтому $\forall k\ \alpha_{k+n}(c)\neq\alpha_k(c)$. Положим, для любого целого k $I_k(c)=\left[\alpha_{k+n}(c);\alpha_k(c)\right]$. Заметим, что $I_k(c)\subseteq\Gamma_j\Leftrightarrow k\equiv j\left(\operatorname{mod} n\right)$. Обозначим через $C_{c,g,h}$ класс функций f, непрерывных на $I_0(c)=\left[\alpha_n(c);c\right]$ и удовлетворяющих условию

$$f\left(\alpha_n(c)\right)-\tilde{g}(c)\,f(c)=\tilde{h}(c). \tag{12}$$

Пусть $\psi_0\in C_{c,g,h}$, а в остальном произвольна. Если K – произвольный класс функций на $I_0(c)$, то положим по определению: $K_{c,g,h}=C_{c,g,h}\cap K$.

Теорема 1. 1) Пусть $h,g\in H^{\Gamma^a}$, выполняются (4) и (11). Тогда уравнение (1) разрешимо в классе C^{Γ^a} и имеет континуум линейно независимых решений. Общее решение определяется на $\overset{\circ}{\Gamma}$ формулой

$$\psi\left(a_j\right)=\frac{\tilde{h}\left(a_j\right)}{1-\tilde{g}\left(a_j\right)},\quad j\in\overline{1,n}; \tag{13}$$

$$\psi(t)=\begin{cases}\prod\limits_{j=0}^{n-1}\tilde{g}\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-n}(t)\right)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\tilde{h}\left(\alpha_{k-n}(t)\right)\prod\limits_{j=k+1}^{n-1}\tilde{g}\left(\alpha_{j-n}(t)\right),\ t\in I_n(c),\ n=2;3;...\\ \tilde{g}\left(\alpha_{-1}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_{-1}(t)\right)+\tilde{h}\left(\alpha_{-1}(t)\right),\ t\in I_1(c),\\ \psi_0(t),\ t\in I_0(c),\\ \prod\limits_{j=1}^{n-1}\tilde{g}^{-1}\left(\alpha_{j-n}(t)\right)\psi_0\left(\alpha_n(t)\right)-\sum\limits_{k=1}^{n}\tilde{h}\left(\alpha_{n-k}(t)\right)\prod\limits_{j=k}^{n}\tilde{g}^{-1}\left(\alpha_{n-j}(t)\right),\ t\in I_{-n}(c),\ n=1;2;...\end{cases} \tag{14}$$

В частности, $\forall\, j\in\overline{1,p}\quad \psi\left(a_j\right)=0\ \Leftrightarrow\ \tilde{h}\left(a_j\right)=0$.

2) Если $\psi_0\in H_{c,g,h}$, то $\psi\in H^{\Gamma^a}$. Если $\psi_0\in\tilde{A}_{c,g,h}$, $g,h\in\tilde{A}$, то $\psi\in\tilde{A}$.

Доказательство. 1) Формула (14) получается итерациями уравнения (1), поэтому является решением этого уравнения (проверку этого см. в [5, леммы 1 и 2, теорема 1]) для любой функции $\psi_0\in C_{c,g,h}$. Поэтому (1) имеет континуум линейно независимых решений. Условие (12) обеспечивает непрерывность функции (13), (14) на $\overset{\circ}{\Gamma}$. Условие (11) обеспечивает в силу [5, теорема 1] непрерывность решения (14) на Γ^a, то есть разрешимость в классе C^{Γ^a}. В точках a_j в силу леммы 1 значение решения уравнения (1) совпадает с соответствующим значением решения уравнения (2), а последнее в силу [5, теорема 1] находится по формуле (13).

2) По теореме 1 из [5] утверждения верны для уравнения (2). В силу леммы 1 они верны и для (1).

Теорема 2. 1) Пусть $h,g\in H^{\Gamma^a}$, $g(t)\neq 0$ на $\left[a_j;b_j\right)$ для $\forall\, j\in\overline{1,n}$ и выполняется (5). Тогда уравнение (1) имеет единственное решение в классе C^{Γ^a}. Если $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|g\left(a_i\right)\right|>1$, то

$$\psi(t)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tilde{h}\left(\alpha_{nk}(t)\right)}{\prod\limits_{j=0}^{k}\tilde{g}\left(\alpha_{nj}(t)\right)}. \tag{15}$$

Если $\prod\limits_{j=1}^{n}\left|g\left(a_i\right)\right|=1,\quad \prod\limits_{j=1}^{n}g\left(a_i\right)\neq 1$, то

$$\psi(t)=\frac{h(a)}{1-g(a)}-\frac{1}{1-g(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\left(1-g(a)\right)h\left(\alpha_k(t)\right)-h(a)\left(1-g\left(\alpha_k(t)\right)\right)\right)}{g^{k+1}(a)G_{k+1}(t)}. \tag{16}$$

2) $\psi\in H^{\Gamma^a}$. Если $g,h\in\tilde{A}$, то $\psi\in\tilde{A}$.

Доказательство. 1) Из лемм 1 и 2 следует равносильность уравнений (1) и (2). Применяя теорему 2 из статьи под номером 19 в списке литературы работы [5] для отображения α_n к уравнению (2), получаем (15). Аналогично применение к уравнению (2) теоремы 4 из той же работы для отображения α_n приводит к (16).

Замечание. На результат – существование, единственность и количество решений – не влияют значения $g\left(a_j\right)$ по отдельности для $j=\overline{1,n}$, а влияют только произведения этих чисел: $\prod\limits_{j=1}^{n}g\left(a_j\right)$, в соответствии с условиями (5), (10) и (11).

Литература

1. Дильман, В.Л. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p, $p > 1$ / В.Л. Дильман, Л.И. Чибрикова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1986. – № 4. – С. 26–36.
2. Litvinchuk, G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift / G.S. Litvinchuk. – Springer Dordrecht, 2012. – 378 p.
3. Kravchenko, V.G. Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Springer Dordrecht, 2012. – 288 p.
4. Теория Нётера сингулярных интегральных операторов со сдвигом / Ю.И. Карлович, В.Г. Кравченко, Г.С. Литвинчук // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 4. – С. 3–27.
5. Дильман, В.Л. Линейные функциональные уравнения в классах первообразных от лебеговских функций на отрезках кривых / В.Л. Дильман, Д.А. Комиссарова // Челябинский физико-математический журнал. – 2023. – Т. 8, вып. 1. – С. 5–17.
6. Kuczma, M. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality / M. Kuczma. – Birkhäuser Basel, 2009. – 585 p.
7. Кравченко, В.Г. Об одном функциональном уравнении со сдвигом в пространстве непрерывных функций / В.Г. Кравченко // Мат. заметки. – 1977. – Т. 22, № 2. – С. 303–311.
8. Пелюх, Г.П. Метод инвариантов в теории функциональных уравнений / Г.П. Пелюх, А.Н. Шарковский. – Киев: Инст. мат. НАН, 2013.
9. Бродский Я.С. Функциональные уравнения / Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. – Киев: Вища школа, 1983. – 86 с.
10. Антоневич, А.Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Изд-во «Университетское», 1988. – 231 с.
11. Илолов, М. Об одном классе линейных функциональных уравнений с постоянными коэффициентами / М. Илолов, Р. Авезов // Изв. Акад. наук Респ. Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2019. – № 4 (177). – С. 7–12.
12. Лихтарников, Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения / Л.М. Лихтарников. – СПб: Лань, 1997. – 156 с.
13. Чернявский, В.П. Однозначность решений при использовании линейного функционального уравнения в модели радиационной защиты / В.П. Чернявский // Глобальная ядерная безопасность. – 2019. – № 4 (33). – С. 18–26.
14. Мусхелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

Поступила в редакцию 12 марта 2024 г.

Сведения об авторе

Дильман Валерий Лейзерович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 2, pp. 5–11

DOI: 10.14529/mmph240201

FUNCTIONAL EQUATIONS AS MATHEMATICAL MODELS OF CYCLIC SHIFT COUPLING PROBLEMS ON COMPLEX CURVES

V.L. Dil'man
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: dilmanvl@susu.ru

Abstract. The paper considers linear functional equations with a shift function having a nonzero derivative satisfying the Helder condition on an arbitrary piecewise smooth curve. Such equations are studied in connection with the theory of boundary value problems for analytical functions, which are a mathematical tool in the study of mathematical models of elasticity theory in which the conjugation conditions contain a boundary shift. The shift function acts cyclically on a set of simple curves forming a given curve, and except the ends of simple curves, there are no periodic points relative to the shift function. The purpose of the study is to find conditions for the existence and uniqueness of a solution (and in the case of non–uniqueness of the cardinality of the set of solutions) of such equations in the classes of Helder and primitive Lebesgue functions with a coefficient and the right part of the same classes.

Keywords: linear functional equations of one variable; Helder classes of functions, classes of primitive from Lebesgue functions, piecewise smooth curves.

References

1. Dil'man V.L., Chibrikova L.I. Solutions of an Integral Equation with Generalized Logarithmic Kernel in L_p, $p > 1$. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1986, Vol. 30, no. 4, pp. 33–46.

2. Litvinchuk, G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Springer Dordrecht, 2012, 378 p. DOI: 10.1007/978-94-011-4363-9

3. Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. *Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift*. Springer Dordrecht, 2012, 288 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1180-5

4. Karlovich Yu.I., Kravchenko V.G., Litvinchuk G.S. Noether's theory of singular integral operators with shift. *Soviet Mathematics*, 1983, Vol. 27, no. 4, pp. 1–34.

5. Dil'man V.L., Komissarova D.A. Linear Functional Equations in the Class of Antiderivatives from the Lebesgue Functions on Curves Segments. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, 2023, Vol. 8, Iss. 1, pp. 5–17. (in Russ.). DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18101

6. Kuczma M. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*. Birkhäuser Basel, 2009, 585 p. DOI: 10.1007/978-3-7643-8749-5

7. Kravchenko V.G. On a Functional Equation with a Shift in the Space of Continuous Functions. *Mathematical Notes*, 1977, Vol. 22, Iss. 2, pp. 660–665. DOI: 10.1007/BF01780978

8. Pelyuh G.P., Sharkovskiy A.N. *Metod invariantov v teorii funktsional’nyh uravneniy* (Method of Invariants in the Functional Equations Theory). Kiyev: Inst. of Math. NAS, 2013 (in Russ.).

9. Brodskiy Ya.S., Slipenko À.Ê. *Funktsyonal’nye uravneniya* (Functional Equations). Kiyev, Visha shkola, 1983, 86 p. (in Russ.).

10. Antonevich A.B. *Lineinye funktsyonal’nye uravneniya: operatornyi podhod* (Linear functional equations: an operator approach). Minsk, Izd-vo “Universitetskoye” Publ., 1988, 231 p. (in Russ.).

11. Ilolov M., Avezov R. On a Class of Linear Functional Equations with Constant Coefficients. *News of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences*, 2019, no. 4(177), pp. 7–12. (in Russ.).

12. Likhtarnikov L.M. *Elementarnoe vvedenie v funktsional'nye uravneniya* (An Elementary Introduction to Functional Equations). St. Petersburg, Lan' Publ., 1997, 156 p. (in Russ.).

13. Cherniavsky V.P. Unambiguity of Decisions when Using Linear Functional Equation in the Radiation Protection Model. *Global Nuclear Safety*, 2019, no. 4 (33), pp. 18–26. (in Russ.).

14. Mushelishvili N.I. *Singulyarnye integral’nye uravneniya* (Singular integral equations) Moscow, Nauka Publ., 1968, 511 p. (in Russ.).

Received March 12, 2024

Information about the author

Dilman Valeriy Leyzerovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9197-3497, e-mail: dilmanvl@susu.ru.