УДК 517.948 DOI: 10.14529/mmph240206

О РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Табаринцева
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: eltab@rambler.ru

Аннотация. Исследуется задача с обратным временем для параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Исследуемая задача возникает, например, при математическом моделировании процесса внешнего геттерирования пластин кремния при создании полупроводниковых приборов. Как правило, математические модели интенсивных диффузионных и тепловых процессов учитывают также эффекты, связанные с нелинейностью процесса. Предлагается подход к построению численного решения задачи с обратным временем. Приближенное решение, устойчивое по Адамару, строится с помощью метода регуляризации, основанного на добавлении к финальному условию переопределения слагаемого с малым параметром. Для получения оценки точности численного решения в постановке задачи используется дополнительная (априорная) информация, характеризующая точное решение. Получена оценка погрешности приближенного решения при заданной априорной информации.

Ключевые слова: обратная задача; параболическое уравнение; метод регуляризации; математическая модель; оценка точности приближенного решения.

Вводные замечания

Тепловые и диффузионные процессы, как правило, моделируются параболическими уравнениями в частных производных.

При исследовании таких математических моделей часто приходится учитывать неустойчивость модели по отношению к малым возмущениям исходных данных.

В настоящей работе предлагается метод приближенного решения нелокальной задачи с обратным временем для полулинейного параболического уравнения. Оценка точности предложенного метода доказывается с применением заданной дополнительной информации о точном решении.

Обозначим через $u(x,t)$ решение следующей полулинейной задачи с интегральными условиями переопределения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u);0<x<1;t_0<t<T \tag{1}$$

$$u(0,t)=0;t_0\le t\le T;\ u(x,t_0)=\psi(x);0<x<1;\ \ p(t)u(t,1)+\int_0^1 u(x,t)\,dx=0.$$

Задача с интегральным условием переопределения в линейном случае была поставлена и впервые исследована А.А. Самарским [1].

В обратной задаче требуется определить функцию $\psi(x)=u(x,t_0)\in L_2[0,1]$ $(0<t_0<t)$, если известна функция $\chi(x)=u(x,T)\in L_2[0,1]$.

Пусть $A_0:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ – оператор, действующий по правилу

$$A_0\psi(x)=\chi(x). \tag{2}$$

Обратную задачу можно сформулировать в виде операторного уравнения (2).

Обратная задача может быть сформулирована также в форме задачи оптимизации. Рассматривается проблема минимизации функционала $J(\psi)=\int_0^1\left|u(x,T)-\chi(x)\right|^2 dx$ для функции $u(x,T,\psi)$ – решения задачи (1). Здесь $T>0$ и $\chi(x)\in W_2^1[0,1]$ заданы и удовлетворяют условиям $\chi(0)=0$ и $\int_0^1\chi(x)\,dx=0.$

Эта задача возникает, в частности, при математическом моделировании технологических процессов, применяемых для очистки кремнивых плат от примесей. В этом случае $\psi(x)$ – распределение примеси в плате $(0<x<1)$ в начальный момент времени $t=t_0$, а $u(x,t)$ – распределение примеси в момент времени t. Коэффициент диффузии $k(t)$ в этом процессе может зависеть от температуры [2, 3].

Исследование нелокальных задач для уравнений в частных производных вызвано необходимостью построения адекватных математических моделей и получения надежных результатов численных расчетов на основе построенных математических моделей в различных областях естествознания и технологий, таких как физика плазмы [1], авиационная и космическая техника, биология и медицина. Методику решения нелокальной задачи теории теплопроводности разработал Н.И. Ионкин. Этот прием основан на разложении функций в ряд по биортогональной системе [4, 5]. В дальнейшем вопросы корректности краевой задачи с нелокальными данными в различных, в том числе более общих постановках, изучались многими авторами [6–16]. Задачи, сочетающие локальные и интегральные условия для параболических уравнений второго порядка, исследуются такими методами, как метод потенциалов, метод Фурье, метод энергетических неравенств и другие. Приведем некоторые работы, содержащие важные результаты в исследовании нелокальных прямых и обратных задач. В работе [6] получен ряд результатов о разрешимости краевых задач для операторного уравнения вида $Bu_t - Lu = f (t \in (0,\infty))$.

В статье [7] изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для одномерных параболических уравнений, а также для некоторых уравнений соболевского типа. В статьях [8, 9] изучаются нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского – Ионкина по пространственной переменной, для которых доказаны теоремы существования и единственности решения. В статье [10] рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения. Доказано существование и единственность обобщенного решения.

В работах [11, 12] [рассматривается вариационная постановка обратной задачи об пределении коэффициентов многомерного параболического уравнения с нелокальными условиями. Исследованы вопросы корректности постановки задачи в слабой топологии пространства управлений. Доказана дифференцируемость по Фреше функционала цели и установлено необходимое условие оптимальности. В работе [13] рассмотрена краевая задача для одномерного параболического уравнения, в которой оба краевых условия являются интегральными. Установлены условия существования и единственности классического решения данной задачи путем сведения ее к эквивалентной первой краевой задаче для того же уравнения

В статье [14] изучается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи определения правой части для параболического уравнения со старшим коэффициентом, зависящим и от временной и от пространственной переменной, при условии интегрального переопределения по времени. Найдено два типа условий, достаточных для локальной разрешимости рассмотренной обратной задачи, а также исследована так называемая фредгольмова разрешимость данной обратной задачи. В работе [15] исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения. В работе [16] рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной краевой задачи для трехмерного неоднородного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных.

В настоящей работе предложен метод приближенного решения нелокальной обратной задачи в классической постановке и получена оценка погрешности приближенного решения.

Приведем необходимые определения [17].

Пусть U и F – метрические пространства, $M \subset U$, а $C[U,F]$ – пространство непрерывных отображений U в F.

Рассмотрим операторное уравнение, частным случаем которого является уравнение (2).

$$A_0\psi = \chi; \psi \in U; \chi \in F, \tag{3}$$

где $A_0 \in C[U,F]$ – взаимно-однозначный оператор, отображающий U в F.

Предположим, что при $\chi = \chi_0$ существует единственное точное решение ψ_0 уравнения (3), которое принадлежит множеству M, но точное значение правой части нам не известно, а вместо него даны приближенное значение $\chi_\delta \in F$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\rho(\chi_0, \chi_\delta) \le \delta$. Требуется по исходым данным задачи χ_δ и δ определить приближенное решение уравнения (3) и оценить его уклонение от точного решения для $\chi_0 \in M$.

Определение 1. Семейство операторов $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве M, если для любого $\delta \in (0;\delta_0]$ оператор T_δ непрерывно отображает пространство F в U и $T_\delta \chi_\delta \to \chi_0$ при $\delta \to 0$ равномерно на множестве M при условии $\rho(A_0\psi_0, \chi_\delta) \le \delta$.

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M:

$$\Delta_\delta(T_\delta) = \sup\{\rho(u, T_\delta \chi_\delta) : \psi \in M, \rho(A_0\psi, \chi_\delta) \le \delta\}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \sup\{\rho(\psi_1, \psi_2) : \psi_1, \psi_2 \in M, \rho(A_0\psi_1, A_0\psi_2) \le \tau\}$$

модуль непрерывности оператора, обратного к A_0, на множестве $A_0 M$.

Определение 2. Метод $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ будем называть оптимальным по порядку на множестве M, если существует число c такое, что для любого $\delta \in (0;\delta_0]$

$$\Delta_\delta(T_\delta) \le c\omega_1(2\delta; M).$$

Для численного решения некорректно поставленных задач, как правило, необходима дополнительная информация о точном решении [18]. В классической постановке задачи в качестве дополнительного условия известно множество M, содержащее точное решение [17].

Обратная задача с нелокальным граничным условием для уравнения (1) сводится к интегральному уравнению. Основным приемом аналитического исследования задачи является разложение суммируемых с квадратом функций в ряд по собственным функциям несамосопряженной краевой задачи, образующим биортогональный базис.

Вспомогательная (регуляризованная) задача также сводится к интегральному уравнению

В этом случае также используется разложение функций в ряд по биортогональной системе собственных функций нелокальной краевой задачи.

Применяя интегральное представление для решений нелинейной задачи, можно получить неравенства для решений линейной и нелинейной задач. Используя полученные неравенства, можно оценить точность регуляризованного решения нелинейной задачи на классе корректности M. Методы приближенного решения некоторых обратных задач для полулинейного параболического уравнения с локальными краевыми условиями исследовались в работах [19, 20].

Задача с обратным временем

В этом разделе будет сформулирована и исследована обратная задача с финальным условием переопределения.

Линейная задача с обратным временем

Сформулируем линейную задачу с обратным временем для линейного параболического уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(x < 1, t_0 < t < T\right); \tag{4}$$

$$v(0,t) = 0\left(t_0 < t < T\right); \tag{5}$$

$$v(x,T) = \chi(x); \int_0^1 v(x,t)\,dx = 0;\ v(x,t) \in C\left(W_2^{2,0}[0,1];[t_0;T]\right) \cap C^1\left(L_2[0;1];(t_0;T)\right),$$

$v(x,t_0)=\psi(x)\in L_2[0,1]$ требуется определить. Выполняя элементарные преобразования,

$$\int_0^1 v_t(x,t)dx=\int_0^1 v_{xx}(x,t)dx=v_x(1,t)-v_x(0,t)=0,$$

убедимся, что задачу (4)–(5) можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(0<x<1,t_0<t<T\right); \tag{6}$$

$$v(0,t)=0;v(x,T)=\chi(x)\left(0<x<1,t_0<t<T\right); \tag{7}$$

$$v_x(1,t)-v_x(0,t)=0\left(t_0<t<T\right).$$

2.2. Точное решение нелокальной линейной задачи

Решая линейную задачу (4) методом разделения переменных, получим следующую задачу на собственные функции и собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (0<x<1)$$

$$X(0)=0;X'(0)=X'(1).$$

Собственными значениями полученной задачи являются

$$\lambda_k=(2\pi k)^2, k=0,1,...$$

Нормированными собственными функциями и присоединенными собственными функциями, соответствующими собственному значению λ_k, являются

$$X_0(x)=x,\ X_{2k-1}=x\cos(2\pi kx), X_{2k}=\sin(2\pi kx)(k=1,2,...) \tag{8}$$

Нормированные собственные функции и присоединенные функции сопряженной задачи, соответствующие собственному значению λ_k, имеют вид

$$Y_0(x)=2,\ Y_{2k-1}=4\cos(2\pi kx),\ \ Y_{2k}=4(1-x)\sin(2\pi kx). \tag{9}$$

Функции семейств (8) и (9) обладают свойством биортогональности, т. е. для всех i, j

$$(X_i,Y_j)=\int_0^1 X_i(x)Y_j(x)dx=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Далее произвольную функцию $\varphi(x)\in L_2[0,1]$ можно разложить в ряд по собственным функциям и присоединенным функциям:

$$\varphi(x)=\varphi_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}X_{2k}(x)+\varphi_{2k-1}X_{2k-1}(x),$$

где $\varphi_0,\varphi_{2k},\varphi_{2k-1}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, которые вычисляются по формулам

$$\varphi_0=\int_0^1\varphi(x)Y_0(x)dx;\ \ \varphi_{2k}=\int_0^1\varphi(x)Y_{2k}(x)dx;\ \ \varphi_{2k-1}=\int_0^1\varphi(x)Y_{2k-1}(x)dx.$$

Для любой функции $\varphi(x)\in L_2[0,1]$ выполняются неравенства

$$A_1\|\varphi\|_{L_2[0,1]}\le\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^2\le A_2\|\varphi\|_{L_2[0,1]}, \tag{10}$$

и $A_1=\dfrac{3}{4}$, $A_2=16$. Здесь $\varphi_0,\varphi_{2k},\varphi_{2k-1}$ – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$

В работе [4] доказана следующая теорема:

Теорема [4, теорема 2] Если функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\varphi'(1),$$

то линейная нелокальная задача (4)–(5) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k t}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k-1}(X_{2k-1}(x)-2\sqrt{\lambda_k}tX_{2k}(x))\right]e^{-\lambda_k t}.$$

Пусть функция имеет непрерывную производную на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\chi(0)=0,\chi'(0)=\chi'(1)$$

и представлена суммой ряда

$$\chi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\chi_{2k}X_{2k}(x)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\chi_{2k-1}\left(X_{2k-1}(x)-2\sqrt{\lambda_n}tX_{2k}(x)\right)\right],$$

в котором $\chi_0=\int_0^1\chi(x)dx=\int_0^1 v(x,T)dx=0$.

Выполняются равенства

$$\varphi_{2k-1}=\chi_{2k-1}e^{\lambda_k T},\ \varphi_{2k}=\chi_{2k}e^{\lambda_k T}+2\sqrt{\lambda_k}T\chi_{2k-1}e^{\lambda_k T}. \tag{11}$$

Следовательно, если линейная задача с обратным временем имеет решение для заданной функции $\chi(x)\in L_2[0,1]$, то это решение может быть представлено в виде

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\chi_{2k}X_{2k}(x)+\chi_{2k-1}X_{2k-1}(x)]e^{\lambda_k(T-t_0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{\lambda_k}\left(T-t_0\right)X_{2k}(x)\right]e^{\lambda_k(T-t_0)}.$$

В дальнейшем будем рассматривать метод приближенного решения задачи с обратным временем и равномерную оценку погрешности построенного метода.

Для получения равномерных оценок точности методов приближенного решения некорректно поставленных задач рассматриваются множества равномерной регуляризации (множества, на которых равномерную оценку для данной задачи возможно получить [2]).

Рассмотрим следующий пример такого множества.

Определим классическое множество равномерной регуляризации для задачи (6)–(7) следующим образом.

Предположим, что для заданной функции $\chi(x)\in L_2[0,1]$ задача (6)–(7) имеет решение $v(x,t)$. Предположим также, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям (6)–(7) при $t\in[0,T]$, таким образом мы можем продолжить точное решение обратной задачи, определив решение для значений переменной t из промежутка $0\le t\le T$. Обозначим $\varphi(x)=v(x,0)$.

Множество равномерной регуляризации имеет вид

$$M=\left\{\psi(x)=v(x,t_0):\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,1]}\le r^2\right\}.$$

Предположим, что существует точное решение обратной задачи для заданной функции, но точные значения заданной функции $\chi(x)$ не известны. Вместо точных значений известны значения функции χ_δ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что $\|\chi_\delta-\chi\|<\delta$ и δ достаточно мало. Требуется построить приближенное решение исходной обратной задачи и оценить его уклонение от точного решения.

Полулинейная задача с обратным временем

Рассмотрим нелокальную задачу для полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)\left(0<x<1,t_0<t<T\right); \tag{12}$$

$$u(0,t)=0\left(t_0<t<T\right); \tag{13}$$

$$u(x,T)=\chi(x)\left(0<x<1\right);\ \int_0^1 u(x,t)dx=0\left(t_0<t<T\right);$$

$u(x,t_0)=\Psi(x)\in L_2[0,1]$ требуется определить. Здесь $f:L_2[0,1]\to L_2[0,1]$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица (например, заданное с помощью непрерывной функции).

Далее, задача (12)–(13) может быть записана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u)(0<x<1,t_0<t<T); \tag{14}$$

$$u(0,t)=0(t_0<t<T);$$
$$u(x,T)=\chi(x)(0<x<1); \tag{15}$$
$$u_x(1,t)-u_x(0,t)=0,$$
$$u(x,t)\in C\left(W_2^{2,0};C[t_0;T]\right)\cap C^1\left(L_2[0;1];(t_0;T)\right),$$

$u(x,t_0)=\Psi(x)\in L_2[0,1]$ требуется определить.

Из представления решения неоднородной линейной задачи, полученного в [21], следует, что нелинейная задача (12)–(13) сводится к интегральному уравнению

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k t}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k-1}\left(X_{2k-1}(x)-2\sqrt{\lambda_k}tX_{2k}(x)\right)\right]e^{-\lambda_k t}+$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\left[f_{2k}X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\left[f_{2k-1}X_{2k-1}(x)+2\sqrt{\lambda_k}(\tau-t)X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau. \tag{16}$$

Здесь

$$f_0(u,\tau)=\int_0^1 f(u(x,\tau))Y_0(x)dx;\quad f_{2k}(u,\tau)=\int_0^1 f(u(x,\tau))Y_{2k}(x)dx;\quad f_{2k-1}(u,\tau)=\int_0^1 f(u(x,\tau))Y_{2k-1}(x)dx.$$

В задаче с обратным временем (14)–(15) требуется определить функцию $\Psi(x)=u(x,t_0)$, если известны значения функции $\chi(x)=u(x.T)$.

3. Метод регуляризации нелокальных обратных задач

В этом разделе мы построим регуляризованное решение линейной задачи (6)–(7) и полулинейной задачи (14)–(15) и оценим точность регуляризованного решения.

3.1. Приближенное решение линейной задачи

Для построения приближенного решения линейной обратной задачи (6)–(7) рассмотрим задачу с малым параметром в условии переопределения, т. е. рассмотрим задачу восстановления функции $\psi_\delta^\varepsilon(x)=v_\delta^\varepsilon(x,t_0)$, где $\psi_\delta^\varepsilon(x)\in L_2$, $v_\delta^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0<x<1;t_0<t<T); \tag{17}$$

$$v_\delta^\varepsilon(0,t)=0(t_0<t<T); \tag{18}$$

$$\varepsilon v_\delta^\varepsilon(x,0)+v_\delta^\varepsilon(x,T)=\chi_\delta(x)(0<x<1);\ \int_0^1 v_\delta^\varepsilon(x,t)dx=0(t_0<t<T).$$

Здесь $\varepsilon>0$ – параметр регуляризации, который требуется выбрать, используя подходящую зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

Обозначим $v_\delta^\varepsilon(x,t)$ решение задачи (17)–(18) для приближенно заданной функции $\chi_\delta(x)$. Будем рассматривать функцию $\psi_\delta^\varepsilon(x)=v_\delta^\varepsilon(x,t_0)$ в качестве приближенного решения исходной линейной задачи (6)–(7).

Дифференцируя интегральное условие (18) по переменной t, получим

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t} \right) dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(x,t)\,dx = \frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial x}(1,t) - \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0,t) = 0.$$

Следовательно, смешанная краевая задача (17)–(18) сводится к задаче

$$\frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}\left(0 < x < 1; t_0 < t < T\right), \tag{19}$$

$$v_\delta^\varepsilon(0,t) = 0\left(t_0 < t < T\right); \tag{20}$$

$$\varepsilon v_\delta^\varepsilon(x,0) + v_\delta^\varepsilon(x,T) = \chi_\delta(x)\left(0 < x < 1\right),\ \ \frac{\partial v_\delta^\varepsilon}{\partial x}(1,t) - \frac{\partial^2 v_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0,t) = 0\left(t_0 < t < T\right).$$

3.2. Решение вспомогательной задачи

Решая регуляризованную задачу (19)–(20) методом разделения переменных и исследуя стандартным способом сходимость соответствующих рядов, убедимся, что вспомогательная задача (19)–(20) имеет единственное решение, представимое суммой ряда

$$v_\delta^\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}^{\varepsilon,\delta} X_{2k}(x)\right] e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k-1}^{\varepsilon,\delta}\left(X_{2k-1}(x) - 2\sqrt{\lambda_k}\, t X_{2k}(x)\right)\right] e^{-\lambda_k t}. \tag{21}$$

Подставляя соотношение (21) в условие переопределения с малым параметром (20), найдем связь между коэффициентами разложения полученного решения и заданной функции:

$$\varphi_{2k}^{\varepsilon,\delta} = \frac{\chi_{2k-1}^{\delta} e^{\lambda_k T}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}} + \frac{2\sqrt{\lambda_n}\, T \chi_{2k-1}^{\delta} e^{\lambda_k T}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2},\ \ \varphi_{2k-1}^{\varepsilon,\delta} = \frac{\chi_{2k-1}^{\varepsilon,\delta} e^{\lambda_k T}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), убедимся, что для любой функции $\chi(x) \in L_2[0,1]$ решение вспомогательной задачи представимо в виде

$$\psi_\delta^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\chi_{2k}^{\delta} X_{2k}(x) e^{\lambda_k (T-t_0)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\sqrt{\lambda_k}\, T \chi_{2k-1}^{\delta} X_{2k}(x) e^{\lambda_k (T-t_0)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2}\right] \tag{23}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\chi_{2k-1}^{\delta} X_{2k-1}(x) e^{\lambda_k (T-t_0)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}\right] - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\sqrt{\lambda_k}\, t_0 \chi_{2k-1}^{\delta} X_{2k}(x) e^{\lambda_k (T-t_0)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}\right].$$

3.3. Оценка погрешности приближенного решения линейной задачи

Определим величину, которую будем использовать в качестве характеристики точности регуляризованного решения.

Пусть $\psi(x)$ – решение линейной обратной задачи (6)–(7). Рассмотрим величину

$$\Delta(\varepsilon,\delta) = \sup\{\left\|\psi_\delta^\varepsilon - \psi\right\| : \psi \in M; \left\|\chi - \chi_\delta\right\| \le \delta\},$$

характеризующую точность построенного приближенного решения на множестве M.

Зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выберем так, чтобы величина $\Delta(\varepsilon,\delta)$ была минимальна.

Очевидная оценка следует из неравенства треугольника

$$\Delta(\varepsilon,\delta) \le \Delta_1(\varepsilon,\delta) + \Delta_2(\varepsilon,\delta),$$

где

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) = \sup_{\|\chi-\chi_\delta\|\le\delta}\left\|\psi_\delta^\varepsilon - \psi^\varepsilon\right\|; \qquad \Delta_1(\varepsilon) = \sup_{\varphi\in M}\left\|\psi_\varepsilon - \psi\right\|.$$

Здесь через ψ_ε обозначено решение регуляризованной задачи (19)–(20), построенное по точно заданному финальному условию.

Оценим величину $\Delta_2(\varepsilon,\delta)$. Из (22) следует, что решения регуляризованной задачи (17)–(18) с точными и приближенными данными удовлетворяют равенству

$$\psi_{\delta}^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\chi_{2k}^{\delta}-\chi_{2k}\right)X_{2k}(x)e^{\lambda_k\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\sqrt{\lambda_k}T\left(\chi_{2k-1}^{\delta}-\chi_{2k-1}\right)X_{2k}(x)e^{\lambda_k\left(T-t_0\right)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2}\right]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\chi_{2k-1}^{\delta}-\chi_{2k-1}^{\delta}\right)X_{2k-1}(x)e^{\lambda_k\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}.}\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2\sqrt{\lambda_k}t_0\left(\chi_{2k-1}^{\delta}-\chi_{2k-1}\right)X_{2k}(x)e^{\lambda_k\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}\right]. \quad (24)$$

Оценим дробь

$$F(\lambda)=\frac{e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}.$$

Обозначим $s=e^{\lambda T}$, $s\geq 1$. Вычислим наибольшее значение функции.

$$F(s)=\frac{s^{\frac{T-t_0}{T}}}{1+\varepsilon s}.$$

Критической точкой функции $F(s)$ является

$$s_0=\frac{T-t_0}{t_0}\frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее $F(1)=\dfrac{1}{1+\varepsilon}$, $F(s_0)=\dfrac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}$, $\lim\limits_{s\to+\infty}F(s)=0.$

Следовательно,

$$\alpha=\sup_{\lambda\geq 0}F(\lambda)\leq\frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}, C_1=\left(\frac{T-t_0}{t_0}\right)^{\frac{T-t_0}{T}}\frac{t_0}{T}. \quad (25)$$

Оценим дробь $G(\lambda)=\dfrac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}, \lambda\geq 0.$

Заметим, что для любого $\tau>0$, $\lambda>0$ $\sqrt{\lambda}\leq e^{\lambda\tau}$.

Следовательно,

$$G(\lambda)\leq\frac{e^{\lambda\left(T+\tau-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}=\frac{e^{\lambda\left(T-t_1\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}, \quad (26)$$

где $t_1=t_0-\tau$. Заменяя в оценке (25) t_0 на $t_1=t_0-\tau$, имеем неравенство

$$G(\lambda)\leq\left(\frac{T-t_1}{t_1}\right)^{\frac{T-t_1}{T}}\frac{t_1}{T}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{T-t_1}{T}}}=\left(\frac{T-(t_0-\tau)}{t_0-\tau}\right)^{\frac{T-(t_0-\tau)}{T}}\frac{t_0-\tau}{T}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{T-(t_0-\tau)}{T}}}. \quad (27)$$

Так как $\tau>0$ – произвольное число, то из неравенства (27) следует

$$\gamma=\sup_{\lambda\geq 0}G(\lambda)\leq\frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}. \quad (28)$$

Так как для всех $\lambda\geq 0$ $\dfrac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda T})^2}\leq\dfrac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}$, то

$$\sup_{\lambda\geq 0}\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda T})^2}\leq\sup_{\lambda\geq 0}\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda\left(T-t_0\right)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}=\gamma\leq\frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}}.$$

Используя равенство (24) и неравенства (25), (28), (10), получаем оценку

$$\Delta_2(\varepsilon,\delta) \le \frac{4C_1\delta}{3\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}} \tag{29}$$

Оценим величину Δ_1.

Воспользуемся равенствами (11) для коэффициентов Фурье функции $\varphi(x)$ и равенствами (22) для коэффициентов Фурье вспомогательной задачи. Записывая равенства (22) с учетом (11), убедимся, что решение вспомогательной задачи может быть представлено суммой ряда

$$\psi^{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi 2k^{\varepsilon} X_{2k}(x) + \psi_{2k-1}^{\varepsilon} X_{2k-1}(x)\right),$$

где

$$\psi_{2k-1}^{\varepsilon} = \frac{\varphi_{2k-1}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}};\ \psi_{2k}^{\varepsilon} = \frac{\varphi_{2k}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}} - \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}T\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{(1+\varepsilon e^{\lambda T})^2}.$$

Далее, для разности точного и приближенного решений имеем разложение

$$D^{\varepsilon}(x) = \psi(x) - \psi_{\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k}^{\varepsilon} X_{2k}(x) + d_{2k-1}^{\varepsilon} X_{2k-1}(x),$$

где

$$d_{2k-1}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\varphi_{2k-1}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}};\ d_{2k}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\varphi_{2k}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}} - \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}t_0\varepsilon\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}} + \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}T\varepsilon\varphi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{(1+\varepsilon e^{\lambda T})^2}.$$

Следовательно, в силу (10)

$$\left\|\psi - \psi^{\varepsilon}\right\|_{L_2[0,1]}^2 \le A_1\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(d_{2k}^{\varepsilon}\right)^2 + \left(d_{2k}^{\varepsilon}\right)^2\right] \le 3\varepsilon^2 A_1\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}^2\left(\frac{e^{\lambda(T-t_0)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}\right)^2 + \tag{30}$$

$$3\varepsilon^2 A_1\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k-1}^2\left[\left(\frac{e^{\lambda(T-t_0)2}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}\right)^2 + 2t_0\left(\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda(T-t_0)}}{1+\varepsilon e^{\lambda T}}\right)^2 + 2T\left(\frac{\sqrt{\lambda}e^{\lambda(T-t_0)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda T})^2}\right)^2\right].$$

Из неравенства (30) с учетом (25), (28), (10) следует оценка

$$\Delta_1(\varepsilon) \le 6rC_1\left(1+4\left(T^2+t_0^2\right)\right)\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}}. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\Delta(\varepsilon,\delta) \le C\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}} + \frac{C\delta}{\varepsilon^{\frac{t_0}{T}}}, \tag{32}$$

где $C = 6rC_1\left(1+4\left(T^2+t_0^2\right)\right)$. Выберем параметр регуляризации $\varepsilon = \varepsilon^*(\delta)$ так, чтобы полученная оценка погрешности была минимальной. Вычисляя наименьшее значение функции в правой части (33), получим соотношение

$$\varepsilon^{\frac{T-t_0}{T}} = \frac{C\delta}{\varepsilon^{\frac{t_0}{T}}}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что

$$\varepsilon^*(\delta) = \delta. \tag{34}$$

Здесь $C = 6rC_1\left(1+4\left(T^2+t_0^2\right)\right)$ – постоянная, не зависящая от δ.

С помощью соотношения (34) запишем оценку погрешности построенного приближенного решения: $\Delta\left(\varepsilon^*,\delta\right)\le C\delta^{\frac{T-t_0}{T}}$.

3.4. Приближенное решение полулинейной задачи

Чтобы получить устойчивое приближенное решение полулинейной задачи (14)–(15), рассмотрим задачу, которая содержит малый параметр в условии переопределения, то есть вспомогательная задача состоит в восстановлении функции $\Psi_\varepsilon(x)=u_\varepsilon(x,t_0)$, где $\Psi_\varepsilon(x)\in L_2[0,1]$ и $u_\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}+f\left(u_\delta^\varepsilon\right)\left(0<x<1,t_0<t<T\right); \tag{35}$$

$$u_\delta^\varepsilon(0,t)=0\left(t_0<t<T\right); \tag{36}$$

$$\varepsilon u_\delta^\varepsilon(x,0)+u_\delta^\varepsilon(x,T)=\chi_\delta(x)(0<x<1);\ \int_0^1 u_\delta^\varepsilon(x,t)dx=0\left(t_0<t<T\right).$$

Необходимо также выбрать параметр регуляризации $\varepsilon(\delta)$. Обозначим $u_\delta^\varepsilon(x,t)$ решение регуляризованной задачи (35)–(36). Будем рассматривать функцию $\Psi_\delta^\varepsilon(x)=u_\delta^\varepsilon(x,t_0)$ в качестве приближенного решения задачи (14)–(15).

Вспомогательная задача (35)–(36) может быть записана в виде

$$\frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}+f\left(u_\delta^\varepsilon\right)\left(0<x<1,t_0<t<T\right); \tag{37}$$

$$u_\delta^\varepsilon(0,t)=0\left(t_0<t<T\right); \tag{38}$$

$$\varepsilon u_\delta^\varepsilon(x,0)+u_\delta^\varepsilon(x,T)=\chi_\delta(x)(0<x<1).\ \frac{\partial u_\delta^\varepsilon}{\partial x}(1,t)-\frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x^2}(0,t)=0.$$

Параметр регуляризации $\varepsilon>0$ выбирается с использованием подходящей зависимости $\varepsilon=\varepsilon(\delta)$.

Применяя разложение в ряд по системе собственных и присоединенных функций соответствующей линейной задачи, убедимся, что вспомогательная задача сводится к интегральному уравнению

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k t}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Phi_{2k-1}^\varepsilon\left(X_{2k-1}(x)-2\sqrt{\lambda_n}tX_{2k}(x)\right)\right]e^{-\lambda_k t}+ \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\left[f_{2k}X_{2k}(x)\right]e^{-\lambda_k\left(t-\tau\right)}d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\left[f_{2k-1}\left(X_{2k-1}(x)-2\sqrt{\lambda_n}tX_{2k}(x)\right)\right]e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

Здесь

$$f_0(u,\tau)=\int_0^1 f\left(u(\tau)\right)Y_0(x)dx;\ f_{2k}(u,\tau)=\int_0^1 f\left(u(\tau)\right)Y_{2k}(x)dx;\ f_{2k-1}(u,\tau)=\int_0^1 f\left(u(\tau)\right)Y_{2k-1}(x)dx.$$

Существование и единственность решения вспомогательной задачи могут быть доказаны стандартным способом с применением принципа сжимающих отображений.

Таким образом, решение вспомогательной задачи может быть представлено суммой ряда

$$\Psi^\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Psi_{2k}^\varepsilon X_{2k}(x)+\Psi_{2k-1}^\varepsilon X_{2k-1}(x)\right),$$

где

$$\Psi_{2k-1}^\varepsilon=\frac{\chi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}+\int_0^T\frac{f_{2k-1}\left(u(x,\tau)\right)e^{\lambda_k(\tau)}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}d\tau,$$

$$\Psi_{2k}^{\varepsilon}=\frac{\chi_{2k-1}e^{\lambda_k T}}{1+\varepsilon e^{\lambda_k T}}+\frac{\left(\chi_{2k}+2\sqrt{\lambda_k}\,\chi_{2k-1}\right)e^{\lambda_k T}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2}+$$

$$2\varepsilon\sqrt{\lambda_k}\int_0^T\frac{f_{2k-1}(u(x,\tau))e^{\lambda_k(\tau)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2}d\tau+\varepsilon\int_0^T\frac{(f_{2k}\left(u(x,\tau)\right)+2\sqrt{\lambda_k}\,f_{2k-1}(u(x,\tau)))e^{\lambda_k(\tau)}}{(1+\varepsilon e^{\lambda_k T})^2}d\tau\,.$$

Литература

1. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения.– 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

2. Муравей, Л.А. Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Матем. сб. – 1991. – Т. 182, № 10. – С. 1479–1512.

3. Муравей, Л.А. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения / Л.А. Муравей, А.В. Филиновский // Мат. заметки. – 1993. – Т. 54, № 4. – С. 98–116.

4. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. –1977.– Т. 13, № 2. – С. 294–304.

5. Ионкин, Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 1279–1283.

6. Егоров, И.Е. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 335 с.

7. Пятков, С.Г. Разрешимость краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа / С.Г. Пятков, Н.Л. Абашеева // Сиб. матем. журнал – 2000 – Т. 41, № 6. – С. 1419–1435.

8. Кожанов, А.И. Нелокальные задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений. А.И. Кожанов / Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. – 2023 – Т. 509. – С. 50–53.

9. Кожанов, А.И. Пространственно–нелокальные краевые задачи с обобщенным условием Самарского–Ионкина для квазипараболических уравнений / А.И. Кожанов, А.М. Абдрахманов // Сиб. электрон. матем. изв. – 2023 – Т. 20, № 1. – С. 110–123.

10. Пулькина, Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Матем. заметки – 2001 – Т. 70, № 1 – С. 88–95.

11. Тагиев, Р.К. Вариационная постановка коэффициентной обратной задачи для многомерного параболического уравнения / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли / Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 2022. – Т. 212 – С. 92–99.

12. Тагиев, Р.К. Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли / Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020 – Т. 12, № 3 – С. 34–40.

13. Иванчов, Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Н.И. Иванчов / Дифференц. уравнения – 2024 – Т. 40, № 4 – С. 547–564.

14. Камынин, В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения / В.Л. Камынин // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, № 4. – С. 522–534.

15. Данилкина, О.Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием / О.Ю. Данилкина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2007. – Т. 1, № 14. – С. 5–9.

16. Юлдашев, Т.К. Нелокальная краевая задача для линейного псевдопараболического уравнения высокого порядка / Т.К. Юлдашев, Н.А. Суюнова // Журнал математики и информатики. – 2023. – Т. 3, № 2. – С. 69–78.

17. Иванов, В.К. Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

18 Васин, В.В. Некорректные задачи с априорной информацией / В.В. Васин, А.Л. Агеев. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 261 с.

19. Табаринцева, Е.В. Об оценке точности метода вспомогательных граничных условий при решении граничной обратной задачи для нелинейного уравнения / Е.В. Табаринцева // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 293–313.

20. Табаринцева, Е.В. О решении некорректно поставленной задачи для нелинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 231–337.

21. Исмати, М. (Исматов, М.) О некоторых несамосопряженных смешанных задачах теории теплопроводности / М. Исмати // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 3. – С. 382–395.

Поступила в редакцию 30 января 2024 г.

Сведения об авторе

Табаринцева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического обеспечения информационных технологий, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: eltab@rambler.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 2, pp. 59–71

DOI: 10.14529/mmph240206

SOLVING AN ILL-POSED PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION BY MEANS OF THE PROJECTION REGULARIZATION METHOD

E.V. Tabarintseva
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: eltab@rambler.ru

Abstract. The article investigates a problem with inverse time for a semilinear parabolic equation equipped with nonlocal boundary conditions. The problem under study arises, for example, in the mathematical modeling of the process of external gettering of silicon wafers in the creation of semiconductor devices. At the same time, when developing a mathematical model in the case of a high-intensive diffusion process, it is necessary to take into account the effects associated with the nonlinearity of the process. The paper suggests an approach for constructing a numerical solution to the problem with the inverse time, stable with respect to small perturbations of the initial data. The numerical solution is constructed using the regularization method based on adding a term with a small parameter to the overdetermination (final) condition. To obtain an approximate solution, the problem statement must recon in supplementary (a priori) information characterizing the exact solution. We obtain an error estimate for the approximate solution under the given a priori information.

Keywords: inverse problem; nonlinear differential equation; approximate method; error estimate.

References

1. Samarskii A.A. Some Problems of the Theory of Differential Equations. *Differ. Uravn.*, 1980, Vol. 16, Iss. 11, pp. 1925–1935. (in Russ.).

2. Muraveĭ L.A., Filinovskiĭ A.V. On a Problem with Nonlocal Boundary Condition for a Parabolic Equation. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1993, Vol. 74, Iss. 1, pp. 219–249. DOI: 10.1070/SM1993v074n01ABEH003345

3. Muravei L.A., Filinovskii A.V. On the Non-Local Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation. *Mathematical Notes*, 1993, Vol. 54, Iss. 4, pp. 1045–1057. DOI: 10.1007/BF01210424

4. Ionkin N.I. The Solution of a Certain Boundary Value Problem of the Theory of Heat Conduction with a Nonclassical Boundary Condition. *Differ. Uravn.*, 1977, Vol. 13, no. 2, pp. 294–304. (in Russ.).

5. Ionkin N.I. The Stability of a Problem in the Theory of Heat Conduction with Nonclassical Boundary Conditions. *Differ. Uravn.*, 1979, Vol. 15, Iss. 7, pp. 1279–1283. (in Russ.).

6. Egorov I.E., Pyatkov S.G., Popov S.V. Neklassicheskie operatorno-differentsial'nye uravneniya (Non-classical Operator-Differential Equations), Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 335 p. (in Russ.).

7. Pyatkov S.G., Abasheeva N.L. Solvability of Boundary Value Problems for Operator-Differential Equations of Mixed Type. *Siberian Mathematical Journal*, 2000, Vol. 41, Iss. 6, pp. 1174–1187. DOI: 10.1023/A:1004888707894

8. Kozhanov A.I. Nonlocal Problems with Generalized Samarskii–Ionkin Condition for Some Classes of Nonstationary Differential Equations. *Doklady Mathematics*, 2023, Vol. 107, Iss. 1, pp. 40–43. DOI: 10.1134/S106456242370045X

9. Kozhanov A.I., Abdrakhmanov A.M. Spatially-Nonlocal Boundary Value Problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition for quasi-parabolic equations. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2023, Vol. 20, Iss. 1, pp. 110–123. DOI: 10.33048/semi.2023.20.010

10. Pul'kina L.S. A Nonlocal Problem with Integral Conditions for the Quasilinear Hyperbolic Equation. *Mathematical Notes*, 2001, Vol. 70, Iss. 1, pp. 79–85. DOI: 10.1023/A:1010226002462

11. Tagiyev R.K., Maharramli Sh.I. Variational Statement of a Coefficient Inverse Problem for a Multidimensional Parabolic Equation. *Geometry, Mechanics, and Differential Equations, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 212, VINITI, Moscow, 2022, pp. 92–99. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-212-92-99

12. Tagiev R.K., Maharramli Sh.I. Variational Formulation of an Inverse Problem for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, no. 3, pp. 34–40. DOI: 10.14529/mmph200305

13. Ivanchov N.I. Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differential Equations*, 2004, Vol. 40, Iss. 4, pp. 591–609. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44

14. Kamynin V.L. On the Inverse Problem of Determining the Right-Hand Side of a Parabolic Equation under an Integral Overdetermination Condition. *Mathematical Notes*, 2005, Vol. 77, Iss. 4, pp. 482–493. DOI: 10.1007/s11006-005-0047-6

15. Danilkina O.Yu. On One Nonlocal Problem for the Heat Equation with an Integral Condition. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2007, Iss. 1(14), pp. 5–9. DOI: 10.14498/vsgtu480

16. Yuldashev T.K., Suyunova N.A. Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya lineynogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka (A Non-Local Boundary Value Problem for a High-Order Nonlinear Pseudoparabolic Equation). *Journal of Mathematics and Informatics*, 2023, Vol. 3, no. 2, pp. 69–78.

17. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineynykh nekorrektno postavlennykh zadach i ee prilozheniya* (The Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications). Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p. (in Russ.).

18 Vasin V.V., Ageev A.L. *Nekorrektnye zadachi s apriornoy informatsiey* (Incorrect Tasks with A Priori Information). Ekaterinburg, Nauka Publ., 1993, 261 p. (in Russ.).

19. Tabarintseva E.V. Estimating the Accuracy of a Method of Auxiliary Boundary Conditions in Solving an Inverse Boundary Value Problem for a Nonlinear Equation. *Numerical Analysis and Applications*, 2018, Vol. 11, Iss. 3, pp. 236–255. DOI: 10.1134/S1995423918030059

20. Tabarintseva E.V. An Approach to Solving an Ill-Posed Problem for a Nonlinear Differential Equation. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2015, Vol. 21, no. 1, pp. 231–237. (in Russ.).

21. Ismati (Ismatov) M. On Some Nonself-Adjoint Mixed Problems in Heat Theory. *Differential Equations*, 2005, Vol. 41, Iss. 3, pp. 401–415. DOI: 10.1007/s10625-005-0172-8

Received January 30, 2024

Information about the author

Tabarintseva Elena Vladimirovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Functional Analysis Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: eltab@rambler.ru.