УДК 517.928.2 DOI: 10.14529/mmph240207

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА С НЕСТАБИЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Д.А. Турсунов, А.С. Садиева
Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Респу́блика
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Аннотация. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике, социологии, океанологии и др. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром используются при моделировании процессов различной природы. Обычно при моделировании отбрасывают малые факторы, чтобы получилась более простая модель, с которой можно было бы извлечь нужную информацию. Практика доказала, что малые факторы надо не учитывать не в уравнениях, а в решениях. Уравнения, содержащие малые факторы, называют возмущенными. Теория возмущений получила широкое применение в современной прикладной математике. С ее помощью исследователи отвечают на вопросы влияния различных факторов на течение процесса, об устойчивости полученных решений, близости процессов, описываемых полученными решениями, реальным исследуемым объектам.

Исследуется задача Валле-Пуссена для системы неоднородных линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи, модифицируя классический метод пограничных функций.

Ключевые слова: малый параметр; сингулярно возмущенная задача Валле-Пуссена; нестабильный спектр; бисингулярная задача; гладкое внешнее решение; пограничная функция; пограничный слой.

Введение. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и ее производными. Такие связи отыскиваются в различных областях знаний: в механике, физике, химии, биологии, экономике, социологии, океанологии и др. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром используются при моделировании процессов различной природы. Обычно при моделировании отбрасывают малые факторы, чтобы получилась более простая модель, с которой можно было бы извлечь нужную информацию. Практика доказала, что малые факторы надо бросить не в уравнениях, а в решениях. Уравнения, содержащие малые факторы, называют возмущенными. Теория возмущений получила широкое применение в современной прикладной математике. С ее помощью исследователи отвечают на вопросы влиянии различных факторов на течение процесса, об устойчивости полученных решений, близости процессов, описываемых полученными решениями, реальным исследуемым объектам [1–3].

В статье исследуется задача Валле-Пуссена [4] для системы неоднородных линейных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи. Новизна работы заключается в том, что предлагается сравнительно удобный и легкий алгоритм построения асимптотического решения задач Валле-Пуссена, модифицируя классический метод пограничных функций. Ранее в работе [5] доказана разрешимость задачи Валле-Пуссена для сингулярных дифференциальных уравнений n-го порядка. А в работах [6, 7] методом регуляризации С.А. Ломова построены асимптотические решения сингулярно возмущенных задач Валле-Пуссена.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу Валле-Пуссена

$$\varepsilon Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),\ x \in [0,1], \tag{1}$$

$$B_1Y(0)+B_2Y(x_0)+B_3Y(1)=Y^0, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – скалярный малый параметр, квадратная матрица-функция $A(x)$ размерности 3×3 с простым спектром, $F(x) = (f_1(x)\ \ f_2(x)\ \ f_3(x))^{\mathrm{T}}$ – известная вектор-функция, $A, F\in C^\infty[0,1]$, $Y^0=(y_1^0\ y_2^0\ y_3^0)^T$ – заданный постоянный вектор, $x_0\in(0,1)$, $Y(x) = (y_1(x)\ \ y_2(x)\ \ y_3(x))^{\mathrm{T}}$ – искомая вектор-функция, зависящая от скалярного малого параметра ε, а матрицы B_1, B_2, B_3 – диагональные матрицы вида:

$$B_1=diag\{1,0,0\}, B_2=diag\{0,1,0\}, B_3=diag\{0,0,1\},$$

причем $B_1+B_2+B_3=E_3$ – единичная матрица третьего порядка.

Пусть выполняется условие:

U$_1$. Спектр $\lambda(x)=\{\lambda_1(x),\lambda_2(x),\lambda_3(x)\}$ матрицы-функции $A(x)$ имеет вид:

$$\lambda(x)=\{-x, x_0-x, 1-x\}.$$

Требуется построить равномерное асимптотическое разложение решения задачи Валле-Пуссена на отрезке $x\in[0,1]$ при стремлении малого параметра к нулю справа.

Отметим **особенности** задачи:

– присутствие малого параметра при производной;

– необратимость матрицы-функции $A(x)$ в точках $x = 0$, $x = x_0$ и $x = 1$.

По условию ε – малый положительный параметр, асимптотика решения задачи (1)–(2) строится при стремлении малого параметра к нулю. Все входящие в задаче (1)–(2) матрицы-функции достаточно гладкие. Поэтому решение задачи (1)–(2) тоже должно быть достаточно гладким на рассматриваемом отрезке. Однако, если считать, что $\varepsilon = 0$, то получим вырожденное уравнение:

$$A(x)Y(x)+F(x)=0, \tag{3}$$

решение которого негладкое в точках $x = 0$, $x = x_0$ и $x = 1$. В таких случаях задачу называют бисингулярной [8].

Решение задачи. Для изложения сути основной идеи рассмотрим простой случай, когда матрица-функция $A(x)$ чисто диагональная, т. е.

$$A(x)=diag\{\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)\}.$$

Как всегда, сначала строим внешнее решение задачи, потому что оно дает нам возможность определить размерность слоев, т. е. преобразование.

Внешнее решение $U(x)$ строим методом малого параметра:

$$U(x)=U_0(x)+\varepsilon U_1(x)+\ldots+\varepsilon^n U_n(x)+\ldots \tag{4}$$

Подставляя ряд (4) в систему (1), имеем:

$$\varepsilon\{U'_0(x)+\varepsilon U'_1(x)+\ldots+\varepsilon^n U'_n(x)+\ldots\}=A(x)\{U_0(x)+\varepsilon U_1(x)+\ldots+\varepsilon^n U_n(x)+\ldots\}+F(x),$$

по идее метода малого параметра получим

$$A(x)U_0(x)+F(x)=0,\ A(x)U_n(x)=U'_{n-1}(x),\ n\in N,$$

отсюда имеем:

$$U_0(x)=-A^{-1}(x)F(x),\quad U_n(x)=A^{-1}(x)U'_{n-1}(x),\ n\in N.$$

В итоге нами формально определены все члены внешнего разложения. Внешнее решение также можем записать в скалярном виде:

$$u_1(x)=f_1(x)x^{-1}+\varepsilon\tilde{u}_{11}(x)x^{-3}+\varepsilon^2\tilde{u}_{12}(x)x^{-5}+\ldots+\varepsilon^k\tilde{u}_{1k}(x)x^{-(2k+1)}+\ldots,$$
$$u_2(x)=f_2(x)(x_0-x)^{-1}+\varepsilon\tilde{u}_{21}(x)(x_0-x)^{-3}+\ldots+\varepsilon^k\tilde{u}_{2k}(x)(x_0-x)^{-(2k+1)}+\ldots,$$
$$u_3(x)=f_3(x)(1-x)^{-1}+\varepsilon\tilde{u}_{31}(x)(1-x)^{-3}+\ldots+\varepsilon^k\tilde{u}_{3k}(x)(1-x)^{-(2k+1)}+\ldots,$$

где $u_{ij}\in C^\infty[0,1], i=1,2,3;\ j\in \mathrm{N}$.

Заметим, что внешнее решение (4) не удовлетворяет условиям Вале–Пуссена (2) и теряет асимптотический характер в окрестностях особых точек соответственно.

Однако здесь мы получаем информацию о масштабе внутреннего растяжения. Пусть $x=\mu\tau$, где $\mu=\sqrt{\varepsilon}$. Тогда $u_1(x)$ примет вид

$$u_1(\tau)=\frac{1}{\mu\tau}\{f_1(\mu\tau)+\frac{\tilde{u}_{11}(\mu\tau)}{\tau^2}+\frac{\tilde{u}_{12}(\mu\tau)}{\tau^4}+\ldots+\frac{\tilde{u}_{1k}(\mu\tau)}{\tau^{2k}}+\ldots\}.$$

Ряд в фигурной скобке сходится и является асимптотическим рядом при $\tau > 1$. Поэтому в окрестности особой точки $x = 0$ растяжение координаты произведем по соотношению $x=\mu\tau$. Аналогично в окрестностях особых точек $x = x_0$ и $x = 1$ соответственно: $x_0-x=\mu\eta$ и $1-x=\mu t$.

Для построения асимптотического разложения решения задачи Валле-Пуссена, включающей точки $x = 0$, $x = x_0$ и $x = 1$, используем метод обобщенных пограничных функций [9].

Уравнение (1) запишем в виде

$$\varepsilon Y'(x)=A(x)Y(x)+F(x)+H-H,\ x\in[0,1], \tag{5}$$

где $H=H_0+\varepsilon H_1+...+\varepsilon^n H_n+...$, H_n – пока неизвестные векторы $H_n = (h_{1,n}\ h_{2,n}\ h_{3,n})^{\mathrm{T}}$, $n = 0,1,2...$

Решение задачи (5), (2) будем искать в виде

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U_k(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(x), \tag{6}$$

где $U_k(x) = (u_{1,k}(x)\ u_{2,k}(x)\ u_{3,k}(x))^{\mathrm{T}}$, $\Pi_k(x) = (\pi_{1,k}(x)\ \pi_{2,k}(x)\ \pi_{3,k}(x))^{\mathrm{T}}$.

Подставляя (6) в систему (5), имеем:

$$\varepsilon\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U'_k(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi'_k(x)\right)=A(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U_k(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(x)\right)+F(x)+H-H,\ x\in[0,1].$$

Полученное равенство запишем в виде двух уравнений:

$$\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U'_k(x)=A(x)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U_k(x)+F(x)-H, \tag{7}$$

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi'_k(x)=\frac{1}{\mu}A(x)\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(x)+H. \tag{8}$$

Из (7) имеем

$$U_0(x)=-A^{-1}(x)(F(x)-H_0),$$

здесь есть у нас возможность выбора постоянного вектора H_0 так, чтобы вектор $U_0(x)$ был достаточно гладким [9].

Пусть $H_0 = (f_1(0)\ \ f_2(x_0)\ \ f_3(1))^{\mathrm{T}}$, тогда $U_0\in C^\infty[0,1]$.

Аналогично имеем:

$$U_n(x)=A^{-1}(x)(U'_{n-1}(x)+H_n),\ n\in \mathrm{N},$$

пусть $H_n= -(u'_{1,n-1}(0)\ u'_{2,n-1}(x_0)\ u'_{3,n-1}(1))^{\mathrm{T}}$, тогда $U_n\in C^\infty[0,1]$.

Таким образом, мы определили все члены рядов:

$$U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k U_k(x)\ \text{ и }\ H=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k H_k.$$

Перейдем теперь к определению членов ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Pi_k(x)$. В уравнении (8) значение вектора H нам известно. Учитывая условие Валле-Пуссена (2) для погранфункций, получаем следующие условия:

$$\pi_1(0)=\mu(y_1^0-u_1(0));\quad \pi_2(x_0)=\mu(y_2^0-u_2(x_0));\ \pi_3(1)=\mu(y_3^0-u_3(1)).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{gathered}\pi_{1,0}(0)=0,\ \pi_{1,1}(0)=y_1^0-u_{1,0}(0),\ \pi_{1,2n}(0)=0,\ \pi_{1,2n+1}(0)=-u_{1,n}(0);\\ \pi_{2,0}(x_0)=0,\ \pi_{2,1}(x_0)=y_2^0-u_{2,0}(x_0),\ \pi_{2,2n}(x_0)=0,\ \pi_{2,2n+1}(x_0)=-u_{2,n}(x_0);\\ \pi_{3,0}(1)=0,\ \pi_{3,1}(1)=y_3^0-u_{3,0}(1),\ \pi_{3,2n}(1)=0,\ \pi_{3,2n+1}(1)=-u_{3,n}(1),\ n\in N.\end{gathered} \tag{9}$$

Задача (8)–(9) расщепляется на три задачи относительно $\pi_{1,k}(x)$, $\pi_{2,k}(x)$ и $\pi_{3,k}(x)$:

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi'_{1,k}(x)=-\frac{x}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_{1,k}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k}h_{1,k}, \tag{10}$$

$$\pi_{1,0}(0)=0,\ \pi_{1,1}(0)=y_1^0-u_{1,0}(0),\ \pi_{1,2n}(0)=0,\ \pi_{1,2n+1}(0)=-u_{1,n}(0),\ n\in N; \tag{11}$$

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi'_{2,k}(x)=-\frac{x-x_0}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_{2,k}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k}h_{2,k}, \tag{12}$$

$$\pi_{2,0}(x_0)=0,\ \pi_{2,1}(x_0)=y_2^0-u_{2,0}(x_0),\ \pi_{2,2n}(x_0)=0,\ \pi_{2,2n+1}(x_0)=-u_{2,n}(x_0),\ n\in N; \tag{13}$$

$$\mu\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi'_{3,k}(x)=\frac{1-x}{\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\pi_{3,k}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{2k}h_{3,k}. \tag{14}$$

$$\pi_{3,0}(1)=0,\ \pi_{3,1}(1)=y_3^0-u_{3,0}(1),\ \pi_{3,2n}(1)=0,\ \pi_{3,2n+1}(1)=-u_{3,n}(1),\ n\in N. \tag{15}$$

Каждую из этих задач (10)–(11); (12)–(13); (14)–(15) можно рассматривать отдельно. Достаточно исследовать одну из этих трех задач, так как остальные исследуются аналогичным образом.

Рассмотрим задачу (10)–(11). Пусть $x=\mu\tau$, где $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, $\tau\in[0,\infty)$. Тогда получаем:

$$\pi'_{1,0}(\tau)=-\tau\pi_{1,0}(\tau)+h_{1,0},\ \tau\in[0,\infty),\quad \pi_{1,0}(0)=0, \tag{16}$$

$$\pi'_{1,1}(\tau)=-\tau\pi_{1,1}(\tau),\ \tau\in[0,\infty),\quad \pi_{1,1}(0)=y_1^0-u_{1,0}(0), \tag{17}$$

$$\pi'_{1,2n}(\tau)=-\tau\pi_{1,0}(\tau)+h_{1,n},\ \tau\in[0,\infty),\quad \pi_{1,2n}(0)=0, \tag{18}$$

$$\pi'_{1,2n+1}(\tau)=-\tau\pi_{1,2n+1}(\tau),\ \tau\in[0,\infty),\quad \pi_{1,2n+1}(0)=-u_{1,n}(0),\ n\in N. \tag{19}$$

Решения задач (16)–(19) существуют и единственны. Кроме этого, решения задач (16) и (18) степенным характером O(τ^{-1}) $\tau\to\infty$, а решения задач (17) и (19) экспоненциально убывают вне пограничных слоев соответственно [8, 9].

Для обоснования построенного формального асимптотического разложения рассмотрим остаточную функцию $R_n(x)=Y(x)-G_n(x)$, где $R_n(x)=(R_{1,n}(x)\ R_{2,n}(x)\ R_{3,n}(x))^{\mathrm{T}}$, $Y(x)$ – решение задачи (1)–(2), а $G_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^kU_k(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{2n+1}\mu^k\Pi_k(x)$.

Для остаточного члена получим следующую задачу:

$$\varepsilon R'_n(x)=A(x)R_n(x)+\varepsilon^{n+1}\tilde{F}(x),\ x\in[0,1],$$

$$B_1R_n(0)+B_2R_n(x_0)+B_3R_n(1)=0,$$

для решения, которой справедлива асимптотическая оценка [9]:

$$R_n(x)=O(\varepsilon^n),\ \varepsilon\to 0,\ \forall x\in[0,1].$$

Мы искали решение задачи (1)–(2) в виде формального асимптотического ряда (6), определили все члены и оценили остаточный член этого ряда. На основании этого мы можем утверждать справедливость следующей теоремы:

Теорема. Для решения задачи Валле-Пуссена (1)–(2) на отрезке [0, 1] справедливо асимптотическое разложение

$$Y(x)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^kU_k(x)+\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{2n+1}\mu^k\Pi_k(x)+O(\varepsilon^n),\ \varepsilon\to 0.$$

Заключение. В статье исследована задача Валле-Пуссена для системы линейных неоднородных сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Особенность исследуемой нами задачи состоит в том, что спектр матрицы, являющейся коэффициентом линейной части системы, нестабилен в трех точках рассматриваемого отрезка. Обобщенным методом пограничных функций, т. е. модифицируя классический метод пограничных функций А.Б. Васильевой, построено полное равномерное асимптотическое разложение решения с любой степенью точности по малому параметру.

Литература

1. Wasow, W.R. Linear Turning Point Theory / W.R. Wasow. – Springer-Verlag, 1985. – 246 p.

2. Nayfeh, A.H. Introduction to Perturbation Techniques / A.H. Nayfeh. – New York, Toronto, 1981. – 519 p.

3. Van Dyke, M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics / M. Van Dyke. – Stanford, California, 1975. – 271 p.

4. de la Vallee-Poussin Ch. J. Sur l'Équation Differentielle du Second Ordre. Détermination d'une Intégrale par Deux Valeurs Assignées. Extension aux equations d'ordre n. / Ch. J. de la Vallee-Poussin // J. Math. pures et appl. – 1929. – Vol. 8, no. 2. – P. 125–144.

5. Kiguradze, I. On the Vallée-Poussin Problem for Singular Differential Equations with Deviating Arguments / I. Kiguradze, B. Půža // Archivum Mathematicum. – 1997. – Vol. 33, Iss. 1. – P. 127–138.

6. Бобочко, В.Н. Сингулярно возмущенная задача Валле–Пуссена с двумя точками спектра, обращающимися в нуль / В.Н. Бобочко // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35, № 5. – С. 545–551.

7. Бобочко, В.Н. Задача Валле–Пуссена для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с нестабильным спектром / В.Н. Бобочко // Изв. вузов. Матем. – 1988. – № 6. – С. 15–24.

8. Ильин, А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – Москва: Физматлит, 2009 (Чебоксары: Чебоксарская типография). – 248 с.

9. Турсунов, Д.А. Асимптотика решения бисингулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Д.А. Турсунов, Э.А. Турсунов // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. – 2017. – № 1(38). – С. 33–41.

Поступила в редакцию 14 февраля 2024 г.

Сведения об авторах

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Высшей школы международных образовательных программ, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика, e-mail: dtursunov@oshsu.kg.

Садиева Акбермет Сайиповна – аспирант, Ошский государственный университет, г. Ош, Киргизская Республика, e-mail: asadieva@oshsu.kg.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 2, pp. 72–77

DOI: 10.14529/mmph240207

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE VALLEY-POUSSIN PROBLEM WITH AN UNSTABLE SPECTRUM

D.A. Tursunov, A.S. Sadieva
Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic
E-mail: dtursunov@oshsu.kg

Abstract. A differential equation describes the relationship between an unknown function and its derivatives. Such connections are sought in various fields of knowledge: mechanics, physics, chemistry, biology, economics, sociology, oceanology, etc. Systems of ordinary differential equations with a small parameter are used in modeling processes of various natures. Typically, when modeling, small factors are discarded in order to obtain a simpler model from which the necessary information can be extracted. Practice has proven that small factors should be included not in equations, but in solutions. Equations containing small factors are called perturbed. Perturbation theory has been widely used in modern applied mathematics. With its help, researchers answer questions about the influence of various factors on the course of the process, about the stability of the obtained solutions, the proximity of the processes described by the obtained solutions to the real objects under study.

The article studies the Vallée-Poussin problem for a system of inhomogeneous linear singularly perturbed ordinary differential equations of the first order. The peculiarity of the problem under consideration is that the spectrum of the matrix, which is the coefficient of the linear part of the system, is unsta-

ble at three points of the segment under consideration. It is required to construct a uniform asymptotic expansion of the solution to the problem, modifying the classical method of boundary functions.

Keywords: small parameter; singularly perturbed Vallée-Poussin problem; unstable spectrum; bisingular problem; smooth external solution; boundary function; boundary layer.

References

1. Wasow W.R. *Linear Turning Point Theory*. Springer-Verlag, 1985, 246 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1090-0

2. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York, Toronto, 1981, 519 p.

3. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, California, 1975, 271 p.

4. de la Vallée-Poussin Ch. J. Sur l'Équation Differentielle du Second Ordre. Détermination d'une Intégrale par Deux Valeurs Assignées. Extension aux Équations d'Ordre n. *J. Math. pures et appl.*, 1929, Vol. 8, no. 2, pp. 125–144.

5. Kiguradze I., Půža B. On the Vallée-Poussin Problem for Singular Differential Equations with Deviating Arguments. *Archivum Mathematicum*, 1997, Vol. 33, Iss. 1, pp. 127–138.

6. Bobochko V.N. A Singularly Perturbed de la Vallée-Poussin Problem with Two Vanishing Points of the Spectrum. *Ukr. Mat. Zh.*, 1983, Vol. 35, no. 5, pp. 545–551.

7. Bobochko V.N. The Vallée-Poussin Problem for a System of Singularly Perturbed Differential Equations with Nonstable Spectrum. *Sov. Math.*, 1988, Vol. 32, no. 6, pp. 16-28

8. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* (Asymptotic Methods in Analysis). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. (in Russ.).

9. Tursunov D.A., Tursunov E.A. The Asymptotic Solution of a Bisingular Cauchy Problem for Systems of Ordinary Differential Equations. *Vestnik VolGU. Seriya 1. Matematika. Fizika (Mathematical Physics and Computer Simulation)*, 2017, no. 1(38), pp. 33–41. (in Russ.).

Received February 14, 2024

Information about the authors

Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director of Higher School of International Education Programs, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: dtursunov@oshsu.kg.

Sadieva Akbermet Sayipovna is Post-graduate Student, Osh State University, Osh, Kyrgyz Republic, e-mail: asadieva@oshsu.kg.