УДК 512.13, 512.62, 514.11 **DOI: 10.14529/mmph240301**

КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК НЬЮТОНА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Н.С. Астапов, Н.К. Ноланд
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация
E-mail: nika@hydro.nsc.ru, astapov47@mail.ru

Аннотация. Обсуждается возможность построения циркулем и линейкой вписанного в полуокружность четырёхугольника. Показано, что задача построения равнобедренного треугольника по трём его биссектрисам равносильна трисекции угла. Приведены примеры параметрических семейств уравнений третьей и шестой степени, для которых все корни выражаются через квадратные радикалы. Найдено условие, при котором полином шестой степени факторизуется двумя полиномами третьей степени в каноническом виде. Все представленные факторизации справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами.

Ключевые слова: четырехугольник Ньютона; трисекция угла; кубические уравнения; решение в квадратных радикалах; правильные многоугольники.

Введение

Три задачи древности на протяжении многих веков стимулировали развитие математики – задачи квадратуры круга, трисекции угла и удвоения куба. Задача удвоения куба сводится к построению с помощью циркуля и линейки действительного корня $\sqrt[3]{2}$ кубического уравнения $z^3 = 2$. Задача трисекции угла приводит к построению корня уравнения $4z^3 - 3z - \cos\theta = 0$. Лишь в XIX столетии было доказано, что эти задачи нельзя решить с помощью циркуля и линейки. Было доказано, что в общем случае корни кубического уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ не выражаются через квадратные радикалы из коэффициентов a, b и c и поэтому не могут быть построены циркулем и линейкой [1].

Однако в частных случаях, когда коэффициенты исходного уравнения связаны какими-либо дополнительными соотношениями, иногда удаётся выразить корни уравнения через коэффициенты существенно более просто, чем по формуле Кардано. Например, если в уравнении

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1}$$

коэффициенты p и q связаны соотношением

$$q = -2(p+4), \tag{2}$$

то $x = 2$ является корнем уравнения (1), а остальные два корня выражаются в квадратных радикалах. Легко проверить, что в общем случае z является корнем уравнения (1), если $q = -z(p + z^2)$.

Четырёхугольник Ньютона

В книге [2] Ньютон посвятил 16 страниц анализу и различным способам вывода уравнения

$$x^3 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)x - 2abc = 0, \tag{3}$$

связывающего стороны a, b, c и x четырёхугольника, вписанного в полуокружность (здесь x – диаметр окружности). Уравнение (3) является кубическим относительно x и квадратным относительно a, b, c. Очевидно, что если задан диаметр x и любые две из трёх сторон a, b, c четырёхугольника, то четвёртая сторона легко строится циркулем и линейкой. А из уравнения (3) видно, что любая сторона a, b, c четырёхугольника выражается в квадратных радикалах через оставшиеся три. Однако в общем случае для произвольно заданных длин трёх сторон a, b и c нельзя построить четвёртую сторону x четырёхугольника, то есть диаметр окружности [3].

Рассмотрим частный случай. Пусть для коэффициентов $p=-\left(a^2+b^2+c^2\right)$ и $q=-2abc$ уравнения (3) выполняется равенство (2). Например, если $a=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $b=1$, $c=\sqrt{2}$, то получим уравнение $x^3-\left(5-\sqrt{3}\right)x-2\sqrt{4-2\sqrt{3}}=0$, которое имеет корень $x=2$. А если $k=m=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $n=\sqrt{3}$, то получим уравнение

$$x^3-\left(k^2+m^2+n^2\right)x-2kmn=x^3-\left(7-2\sqrt{3}\right)x-2\left(2\sqrt{3}-3\right)=0, \tag{4}$$

которое также имеет корень $x=2$. Следовательно, четырёхугольник со сторонами a, b, c и $x=2$ можно вписать в полуокружность диаметра 2, а в другую полуокружность вписать четырёхугольник со сторонами k, m, n и $x=2$. Заметим, что длины сторон a, b, c и k, m, n выбраны так, что вершины этих четырехугольников лежат в вершинах правильного двенадцатиугольника. Причем выполняются равенства (3) и (4), где x – диаметр окружности. Вычитая из равенства (4) равенство (3), получим уравнение

$$\left(a^2+b^2+c^2-k^2-m^2-n^2\right)x-2\left(kmn-abc\right)=0.$$

Отсюда находим длину диаметра

$$x=2\left(kmn-abc\right)\Big/\left(a^2+b^2+c^2-k^2-m^2-n^2\right). \tag{5}$$

Задача. По сторонам a, b, c и k, m, n шестиугольника найти диаметр x описанной окружности, если известно, что ломаные $\overset{\frown}{abc}$ и $\overset{\frown}{kmn}$ опираются на диаметр.

Решение. В этом случае длина диаметра находится по формуле (5) при условии, что $a^2+b^2+c^2-k^2-m^2-n^2\neq 0$. Кроме того, если a, b, c и k, m, n выражаются через квадратные радикалы, то диаметр окружности можно построить циркулем и линейкой.

Замечание. В [3] дана рациональная параметризация a, b и c, для которой x также рационально. Можно построить бесконечно много уравнений вида (3), разрешимых в квадратных радикалах. Например, пусть z выражено в квадратных радикалах. Выберем два параметра b и c так: $0<b<z$, $0<c<\sqrt{z^2-b^2}$. Тогда третью сторону положим равной $a=\left(-bc+\sqrt{b^2c^2+z^2\left(z^2-b^2-c^2\right)}\right)\Big/z$. Очевидно, что для таких чисел a, b и c уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах. Приведём еще две серии уравнений вида (3), разрешимых в квадратных радикалах. Для произвольных комплексных чисел a, b и c при условии $a^2+b^2+c^2=4a^2b^2c^2-1$ уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $2abc$. А при условии $a^2\left(2a^2+b^2+c^2\right)=4b^2c^2$ уравнение (3) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $2bc/a$.

Построение треугольника по биссектрисам

Известно, что для любых заданных трёх положительных чисел l_a, l_b и l_c существует единственный треугольник со сторонами a, b и c, имеющий биссектрисы l_a, l_b и l_c. Однако в общем случае его построение циркулем и линейкой невозможно. Более того, даже построение циркулем и линейкой равнобедренного треугольника по трём его биссектрисам в общем случае невыполнимо. Рассмотрим уравнение [4]

$$y^3-2ty^2-3y/4+t=0, \tag{6}$$

связывающее длины биссектрис $l_a=l_b$, l_c и углы $A=B$ равнобедренного треугольника. В уравнении (6) $t=l_c/\left(2l_a\right)$, $y=\sin\left(A/2\right)$.

Решив кубическое уравнение (6), находим стороны $a=b$ и c по формуле для биссектрисы:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2ac}{a+c}\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2a2a\cos\left(A\right)}{a+2a\cos\left(A\right)}\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{4a\cos\left(A\right)}{1+2\cos\left(A\right)}\cos\left(\frac{A}{2}\right).$$

Выражая $\cos(A)$ и $\cos(A/2)$ через $y=\sin(A/2)$, получим выражение для стороны a и аналогично для стороны $c=l_c 2\operatorname{ctg}(A)$

$$a=l_a\frac{3-4y^2}{4\left(1-2y^2\right)\sqrt{1-y^2}},\ c=l_c\frac{1-2y^2}{y\sqrt{1-y^2}}. \qquad (7)$$

Следовательно, если $y=\sin(A/2)$ выражается в квадратных радикалах, то и стороны $a=b$ и c выражаются в квадратных радикалах. И равнобедренный треугольник можно построить по его биссектрисам. В таблице приведены некоторые частные случаи, когда такое построение циркулем и линейкой возможно. В последней строке таблицы даны приближённые значения $a/l_a=b/l_b$ и c/l_c потому, что точные выражения через квадратные радикалы громоздки. Для сравнения заметим, что для равностороннего треугольника $a/l_a=b/l_b=c/l_c=2/\sqrt{3}\approx 1{,}15$.

$l_c/(2l_a)$	$\sin(A/2)$	$A=B$	C	$a/l_a=b/l_b$	c/l_c
$1/4$	$\left(\sqrt{5}-1\right)/4$	$36°$	$108°$	$\left(\sqrt{5}+1\right)/\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\left(6+2\sqrt{5}\right)/\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$11/56$	$1/4$	$\approx 83{,}6°$	$\approx 12{,}8°$	$33\sqrt{5}/20$	$\sqrt{5}/10$
$23/84$	$1/3$	$\approx 38{,}9°$	$\approx 102{,}2°$	$69\sqrt{2}/112$	$7\sqrt{2}/4$
$11/6$	$2/3$	$\approx 28{,}96°$	$\approx 122{,}1°$	$22\sqrt{15}/105$	$14\sqrt{15}/15$
$\sqrt{27/2}/4$	$\sqrt{6}/4$	$\approx 75{,}5°$	$\approx 29°$	$3\sqrt{10}/5$	$2/\sqrt{15}$
$\sqrt{27/2}/18$	$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/4$	$30°$	$120°$	$\sqrt{6}/3$	$2\sqrt{3}$
$\approx 0{,}2826$	$171/500$	$\approx 40{,}0°$	$\approx 100{,}0°$	$\approx 0{,}879$	$\approx 2{,}38$
$\sqrt{27/2}/8$	$\left(\sqrt{102}-\sqrt{6}\right)/16$	$\approx 57{,}1°$	$\approx 65{,}8°$	$\approx 1{,}09$	$\approx 1{,}29$

Трисекция угла

Пользуясь формулой $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ для косинуса тройного угла, запишем уравнение

$$4\cos^3(A/2)-3\cos(A/2)-\cos(3A/2)=0. \qquad (8)$$

Для заданного угла $3A/2$ косинус угла $A/2$ находится из кубического уравнения (8). Следовательно, если уравнение (8) решается в квадратных радикалах, то трисекция угла $3A/2$ циркулем и линейкой возможна.

Воспользуемся тождеством $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и результатами предыдущего пункта. Так, если $A=36^\circ$, то $\sin(A/2)=\left(\sqrt{5}-1\right)/4$ и поэтому $\cos(A/2)=\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)/8}$ является корнем уравнения (8), в котором $\cos(3A/2)=\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\left(5+\sqrt{5}\right)/2}\Big/4$. Следовательно, угол $3A/2=54°$ можно разделить циркулем и линейкой на три равные части.

Известно, что трисекция угла $3A/2=60°$ невозможна. Однако можно с любой точностью выбрать приближение $\sin(20°)$ рациональным числом, например, положим $\sin(20°)\approx 171/500$. Тогда $\approx\cos(20°)$ является корнем уравнения (8), где $\cos(3A/2)=33259\sqrt{220759}/31250000\approx 0{,}50006$. Поэтому угол $3A/2\approx 59{,}996°$ можно разделить циркулем и линейкой на три равные части. Так получим приближённое решение задачи о трисекции угла $60°$.

Теперь заметим, что если $y=\sin(A/2)$ выражается в квадратных радикалах, то $\cos(A/2)$ и $\cos(3A/2)$ выражаются в квадратных радикалах. Следовательно, если циркулем и линейкой можно построить равнобедренный треугольник по трём его биссектрисам $l_a = l_b$, l_c, то можно выполнить трисекцию угла $3A/2$. И наоборот, если можно выполнить трисекцию угла $0 < 3A/2 < 135°$, то $\cos(A/2)$ и $y = \sin(A/2)$ выражаются в квадратных радикалах. Затем находим биссектрисы $l_a = l_b$ и l_c, которые определяются равенством (6). И, наконец, строим треугольник, пользуясь выражениями (7). В этом смысле эти две задачи равносильны. А задача построения треугольника по произвольным трём биссектрисам оказывается сложнее задачи трисекции угла.

Правильные многоугольники

Задача трисекции угла связана и с построением правильного многоугольника. По теореме Гаусса–Ванцеля правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой, если $n = 2^k p_1 p_2 ... p_m$, где k – натуральное число или 0, p_i – различные простые числа Ферма (3, 5, 17, 257…). Следовательно, для таких чисел n можно построить $\sin(180°/n) = a/(2R)$, где a – сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Затем строим $\cos(180°/n)$ и, пользуясь равенством (8), строим $\cos(3 \cdot 180°/n)$. То есть задача трисекции угла $3 \cdot 180°/n$ решена. Например, трисекция угла $3 \cdot 180°/n$, где $n =$ 5, 10, 15, 17, 34, 51, … выполнима.

Кубические уравнения

Кубическое уравнение

$$x^3 + wx^2 + px + q = 0, \tag{9}$$

где $w = -\left(n^3 q^2 + (n+1) p^3\right) / \left(n^2 pq\right)$, а параметры n, p и q – произвольные комплексные числа, имеет корень $x = nq/p$. Остальные два корня находятся из уравнения $x^2 - (n+1) p^2 / \left(n^2 q\right) x - p/n = 0$. Следовательно, уравнение (9) является бесконечной трёхпараметрической серией уравнений, разрешимых в квадратных радикалах. Если $n = -3$, то получим двухпараметрическую серию уравнений

$$x^3 + \left(2p^3 + 27q^2\right) / (9pq) x^2 + px + q = (x + 3q/p)(x - x_2)(x - x_3) = 0, \tag{10}$$

где $x_{2,3} = \pm \dfrac{3q}{p} \cdot \dfrac{\sqrt{k+1} \pm 1}{k}$, $k = -\dfrac{27q^2}{p^3}$. Если в уравнении (10) $k = m(m+2)$, то $x_2 = \dfrac{3q}{mp}$, $x_3 = \dfrac{-3q}{(m+2)p}$, то есть корни уравнения выражаются через коэффициенты рационально. Если в уравнении (10) $k = -1$, то $m = -1$ и уравнение имеет трехкратный корень $x_{1,2,3} = -3q/p$.

Вот ещё несколько примеров кубических уравнений, разрешимых в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + 5p\sqrt{6p}/9 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корни $x_1 = -2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3} = \sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$, то есть разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{2-4p}/4 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = -\sqrt{2-4p}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{-p^3\left(6 + 3\sqrt{2}\right)}/9 = 0$, где p – произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = 3p^2 q / \left(p^3 + 27q^2\right)$, поэтому также разрешимо в квадратных радикалах. Один из корней уравнения $x^3 + px + \sqrt{-2p^3} = 0$ равен $\sqrt{-2p}$ и это уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Интересно отметить, что пакет прикладных программ *Mathematica* генерирует для корней этого уравнения громоздкие выражения с использованием кубических радикалов. Ещё несколько разрешимых в квадратных радикалах кубических уравнений специального вида можно найти в [5].

Уравнения шестой степени

В общем случае алгебраические уравнения выше четвёртой степени неразрешимы в радикалах. Однако если коэффициенты уравнения связаны некоторыми дополнительными соотношениями, то это уравнение разрешимо в радикалах. Так, для произвольных комплексных чисел k, m, n и l справедливо тождество $x^8+kx^6-mx^4+nx^3+lx^2+knx+k(km+l)=\left(x^2+k\right)\times$ $\times\left(x^6-mx^2+nx+l+km\right)$, которое при $l=-km-n^2/(4m)$ приводит к трёхпараметрическому разложению $\left(x^2+k\right)\left(x^3+\sqrt{m}x-n/\left(2\sqrt{m}\right)\right)\left(x^3-\sqrt{m}x+n/\left(2\sqrt{m}\right)\right)$. То есть корни соответствующего полинома выражаются в радикалах. Например, при $k=-4$, $m=9$ и $n=-30$ получим уравнение $\left(x^2-4\right)\left(x^3+3x+5\right)\left(x^3-3x-5\right)=0$, разрешимое в радикалах.

Теорема. Полином шестой степени $x^6+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$ можно представить произведением двух полиномов третьей степени вида x^3+px+q тогда и только тогда, когда выполняется равенство $g\left(c^2-4e\right)-cdf+d^2e+f^2=0$. Эта факторизация имеет вид:

$$x^6+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g=\left(x^3+\frac{c+w}{2}x+\frac{d\mp v}{2}\right)\left(x^3+\frac{c-w}{2}x+\frac{d\pm v}{2}\right), \qquad (11)$$

где $f=(cd\pm vw)/2$, $v=\sqrt{d^2-4g}$, $w=\sqrt{c^2-4e}$.

Справедливость разложения (11) легко проверяется перемножением скобок [5]. Если $g=d^2/4$, то разложение (11) принимает вид

$$x^6+cx^4+dx^3+\frac{c^2}{4}x^2+\frac{cd}{2}x+\frac{d^2}{4}=\left(x^3+\frac{c}{2}x+\frac{d}{2}\right)^2$$

и полином имеет три двукратных корня. Если $g=d^2/4$ и $2c^3+27d^2=0$, то полином (11) имеет один двукратный и один четырехкратный корень. Тождество (11) является частным случаем факторизации многочлена на трёхчленные множители [6]:

$$x^{2m}+cx^{m+n}+dx^m+ex^{2n}+\frac{cd\pm vw}{2}x^n+g=\left(x^m+\frac{c+w}{2}x^n+\frac{d\mp v}{2}\right)\left(x^m+\frac{c-w}{2}x^n+\frac{d\pm v}{2}\right).$$

Если полиномы третьей степени в правой части тождества (11) можно факторизовать с помощью квадратных радикалов, то это алгебраическое уравнение шестой степени оказывается разрешимым в квадратных радикалах. Например, корни уравнения $\left(x^3+px+\sqrt{-p^3\left(6+3\sqrt{2}\right)}/9\right)\left(x^3+mx+\sqrt{-2m^3}\right)=0$ можно выразить через коэффициенты p и m с помощью квадратных радикалов. Для произвольных комплексных чисел p и m уравнение шестой степени $\left(x^3-\frac{p}{2}x+\sqrt{(p+1)/2}/2\right)\left(x^3-\frac{m}{2}x+\sqrt{(m+1)/2}/2\right)=0$ имеет корни $-\sqrt{(p+1)/2}/2$, $-\sqrt{(m+1)/2}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Пакет прикладных программ *Mathematica* не находит решения в квадратных радикалах этих двух уравнений шестой степени. Даже для численных значений коэффициентов $p=\sqrt{2}$, $m=\sqrt{3}$ пакет *Mathematica* выражает корни через кубические радикалы.

Заключение

Другие примеры разрешимых в квадратных радикалах алгебраических уравнений выше третьей степени и некоторые приложения к задачам механики можно найти в [5]. Заметим, что кубические уравнения нередко возникают и в физико-технических задачах. Например, уравнение Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа) является кубическим уравнением относительно объёма.

Литература

1. Курант, Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – М.: Просвещение, 1967. – 558 с.

2. Ньютон, И. Всеобщая арифметика или Книга об арифметических синтезах и анализе / И. Ньютон. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. – 440 с.

3. Hajja, M. Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions / M. Hajja, J. Sondow // The American Mathematical Monthly. – 2019. – Vol. 126, Iss. 2. – P. 135–150.

4. Дроздов, В.Б. Задают ли биссектрисы треугольник? / В.Б. Дроздов // Математика в школе. – 2009. – № 6. – С. 59–62.

5. Астапов, Н.С. О решении в квадратных радикалах алгебраических уравнений малых степеней // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2022. – Т. 14, № 3. – С. 5–16.

6. Трубников, Ю.В. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений / Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский // Математические структуры и моделирование. – 2020. – № 2(54). – С. 65–85.

Поступила в редакцию 15 мая 2024 г.

Сведения об авторах

Астапов Николай Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

Ноланд Наталья Константиновна – старший инженер, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация, e-mail: astapov47@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 3, pp. 5–11

DOI: 10.14529/mmph240301

CUBIC EQUATIONS, NEWTON QUADRILATERALS, AND GEOMETRIC CONSTRUCTIONS

N.S. Astapov, N.K. Noland
Lavrentyev Institute of Hudrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
E-mail: nika@hydro.nsc.ru, astapov47@mail.ru

Abstract. This article discusses the possibility of constructing with a quadrilateral inscribed in a semicircle a ruler and compass. It shows that the problem of constructing an isosceles triangle from its three bisectors is equivalent to the trisection of an angle. Examples are given of parametric families of equations of the third and sixth degree, for which all roots are expressed through square radicals. A condition is identified under which a sixth-degree polynomial is factorized by third-degree polynomials in canonical form. All the factorizations are valid for polynomials with arbitrary complex coefficients.

Keywords: Newton quadrilaterals; trisection of an angle; cubic equations; solution in square radicals; regular polygons.

References

1. Courant R., Robbins H. *What is Mathematics? : An Elementary Approach to Ideas and Methods*. London: Oxford University Press, 1961, 521 p.

2. Newton I. *Arithmetica Universalis, Sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. Lugduni Batavorum [Leyden]: Joh. et Herm. verbeek, 1732, 344 p.

3. Hajja M., Sondow J. Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions. *The American Mathematical Monthly*, 2019, Vol. 126, Iss. 2, pp. 135–150. DOI: 10.1080/00029890.2019.1537426

4. Drozdov V.B. Zadayut li bissektrisy treugol'nik? (Do Bisectors Define a Triangle?). *Matematika v shkole*, 2009, no. 6, pp. 59–62. (in Russ.).

5. Astapov N.S. On the Solution of Algebraic Equations of Small Degrees by Square Radicals. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2022, Vol. 14, no. 3, pp. 5–16. DOI: 10.14529/mmph220301

6. Trubnikov Yu.V., Chernyavsky M.M. Localization and Finding Solutions of Trinomial Algebraic Equations. *Mathematical Structures and Modeling*, 2020, no. 2(54), pp. 65–85. (in Russ.). DOI: 10.24147/2222-8772.2020.2.65-85

Received May 15, 2024

Information about the authors

Astapov Nikolay Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Staff Scientist, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: nika@hydro.nsc.ru.

Noland Natal'ya Konstantinovna is Senior Engineer, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation, e-mail: astapov47@mail.ru.