УДК 517.968.23 DOI: 10.14529/mmph240302

О РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ ОБОБЩЕННЫХ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

***И.А. Гальмукова*[1], *К.М. Расулов*[2]**

[1] Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации им. маршала Советского Союза А.М. Василевского, г. Смоленск, Российская Федерация

[2] Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация

E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Аннотация. Для полного качественного исследования краевых задач типа Карлемана в классах обобщенных метааналитических функций комплексного переменного существенное значение имеет проблема разрешимости этих задач в явном виде, то есть возможности построения общих решений рассматриваемых задач, используя лишь формулы решения классических краевых задач типа Карлемана для аналитических функций, а также решая конечное число систем линейных алгебраических уравнений и/или линейных дифференциальных уравнений, для которых матрица системы может быть выписана в квадратурах. Рассматривается одна из основных краевых задач типа задачи Карлемана в классах обобщенных метааналитических функций в односвязных областях. Учитывая общее представление обобщенных метааналитических функций с помощью пары аналитических функций комплексного переменного, устанавливается конструктивный алгоритм явного метода решения рассматриваемой задачи в случае, когда носителем краевых условий служит единичная окружность. Доказано, что решение исследуемой краевой задачи в единичном круге сводится к решению двух классических краевых задач типа Карлемана для аналитических функций и некоторой системы алгебраических уравнений. Кроме того, описана полная картина разрешимости рассматриваемой краевой задачи в единичном круге и получены условия ее нетеровости.

Ключевые слова: обобщенная метааналитическая функция; аналитические компоненты; краевая задача типа задачи Карлемана; картина разрешимости; условия нетеровости краевой задачи; единичный круг.

1. Об актуальности проблемы. Будем полагать, что $\mathbb{C}$ – плоскость переменного $z = x + iy$, а T^+ – односвязная область на $\mathbb{C}$, границей которой выступает кривая Ляпунова L, причем $z = 0$ принадлежит T^+.

Почти все основные термины и обозначения, используемые в данной работе, были приняты в монографии [1].

Комплексную функцию $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ переменного $z = x + iy$ будем называть *обобщенной метааналитической функцией* в T^+, если она в этой области является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial \overline{z}^2} + A_1(z)\frac{\partial W(z)}{\partial \overline{z}} + A_0(z)W(z) = 0, \tag{1}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, а $A_0(z), A_1(z)$ – заданные голоморфные в T^+ функции.

Определяющим характеристическим свойством всякой обобщенной метааналитической в области T^+ функции $W(z)$ является то, что $W(z)$ можно представить в виде

$$W(z) = [\varphi_0^+(z) + \overline{z}\varphi_0^+(z)]e^{\lambda_0(z)\overline{z}}\text{, если } \lambda_0(z) \equiv \lambda_1(z) \text{ в } T^+ \tag{2}$$

или

$$W(z) = \varphi_0^+(z)e^{\lambda_0(z)\overline{z}} + \varphi_1^+(z)e^{\lambda_1(z)\overline{z}}\text{, если } \lambda_0(z) \neq \lambda_1(z) \text{ в } T^+; \tag{3}$$

здесь $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ – так называемые *голоморфные компоненты* функции $W(z)$, являющиеся произвольными голоморфными функциями в T^+, а $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ – корни уравнения

$$\lambda^2 + A_1(z)\lambda + A_0(z) = 0. \tag{4}$$

Функции вида (2) – обобщенные метааналитические функции первого типа, а функции вида (3) – обобщенные метааналитические функции второго типа.

Обозначим символом M_2 класс обобщенных метааналитических в T^+ функций вида (2) или (3), у которых голоморфные компоненты $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$, а также $\lambda_0(z)$ и $\lambda_1(z)$ принадлежат классу $A(T^+)\cap H^{(1)}(L)$.

Предлагается к исследованию следующая граничная задача K_M : *среди всех функций класса* $M_2(T^+)\cap H^{(1)}(L)$ *найти те функции* $W(z)$, *которые удовлетворяют на* L *условиям*:

$$F^+[\alpha(t)] = G_0(t)\overline{F^+(t)} + g_0(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial n} = G_1(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial n}} + g_1(t), \tag{6}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ *– производная по внутренней нормали к* L, $\alpha(t)$ *– прямой сдвиг контура* L, *для которого выполняется тождество*

$$\alpha\big[\alpha(t)\big] = t, \tag{7}$$

а $G_k(t)$, $g_k(t)(k=0{,}1)$ *– заданные на* L *функции класса* $H^{(1)}(L)$; *здесь* $G_k(t)\neq 0$, $\alpha'(t)\neq 0$ *и* $\alpha'(t)\in H(L)$.

Предложенная выше задача K_M – одна из основных краевых задач типа Карлемана для функций из класса $M_2(T^+)\cap H^{(1)}(L)$.

В наиболее простом случае, когда $\alpha(t)\equiv t$, задача K_M впервые была поставлена и изучена в [1].

В общем случае получить решение граничных задач типа K_M в классах $M_2(T^+)\cap H^{(1)}(L)$ удается лишь методом интегральных уравнений [1, 2]. Но при таком подходе невозможно провести качественное исследование рассматриваемой граничной задачи, так как он не позволяет описать полную картину разрешимости такого плана задач и устанавливать их нетеровость. В связи с этим в настоящее время остается актуальной проблема отыскания частных случаев, когда рассматриваемая граничная задача допускает исчерпывающее исследование в явном виде [3, 4].

В настоящей статье устанавливается, что если T^+ – единичный круг, то задача K_M может быть решена в явном виде, то есть можно получить полную картину ее разрешимости, а также установить ее нетеровость. Ввиду схожести предлагаемой логической схемы для построения общего решения задачи K_M в единичном круге как для функций вида (2), так и для функций вида (3) в данной статье мы ограничиваемся детальным исследованием задачи K_M в единичном круге лишь в классе функций вида (2).

2. Построение общего решения задачи K_M в классе функций вида (2) в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $L = \{t : |t| = 1\}$

Во-первых, из представления (2) и соотношения [2, с. 304]

$$\frac{\partial}{\partial n} = i\left(t'\frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}'\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\right) = -t\frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}, \tag{8}$$

а также в силу выполнения тождества $\bar{t} = 1/t$ на $L = \{t : |t| = 1\}$ условия (5) и (6) можно соответственно записать в виде

$$[\alpha(t)]^3 \cdot \varphi_0^+[\alpha(t)] + [\alpha(t)]^2 \cdot \varphi_1^+[\alpha(t)] = G_{10}(t)\overline{[t^3 \cdot \varphi_0^+(t) + t^2 \cdot \varphi_1^+(t)]} + g_{10}(t), \tag{9}$$

$$[\alpha(t)]^3\frac{d\varphi_0^+[\alpha(t)]}{dt}+[\alpha(t)]^2\frac{d\varphi_1^+[\alpha(t)]}{dt}+\left([\alpha(t)]^2\cdot\frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt}+\alpha(t)\cdot\lambda_0[\alpha(t)]\right)\varphi_0^+[\alpha(t)]+$$
$$+\left(\alpha(t)\cdot\frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt}+\lambda_0[\alpha(t)]+\alpha(t)\right)\varphi_1^+[\alpha(t)]=$$
$$=G_{11}(t)\overline{\left\{t^3\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt}+t^2\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt}+\left(t^2\cdot\frac{d\lambda_0(t)]}{dt}+t\cdot\lambda_0(t)\right)\varphi_0^+(t)+\right.}\tag{10}$$
$$\overline{\left.+\left(t\cdot\frac{d\lambda_0[\alpha(t)]}{dt}+\lambda_0(t)+t\right)\varphi_1^+(t)\right\}}+g_{11}(t),$$

где

$$G_{10}(t)=t^3\left[\alpha(t)\right]^3\cdot G_0(t)\cdot\exp\left\{t\cdot\overline{\lambda_0(t)}-\overline{\alpha(t)}\cdot\lambda_0\left[\alpha(t)\right]\right\},$$
$$G_{11}(t)=t^2\left[\alpha(t)\right]^2\cdot G_1(t)\cdot\exp\left\{t\cdot\overline{\lambda_0(t)}-\overline{\alpha(t)}\cdot\lambda_0\left[\alpha(t)\right]\right\},$$
$$g_{10}(t)=g_0(t)\cdot\left[\alpha(t)\right]^3\cdot\exp\left\{-\overline{\alpha(t)}\cdot\lambda_0\left[\alpha(t)\right]\right\},\quad g_{11}(t)=g_1(t)\cdot\left[\alpha(t)\right]^2\cdot\exp\left\{-\overline{\alpha(t)}\cdot\lambda_0\left[\alpha(t)\right]\right\}.\tag{11}$$

Во-вторых, введя вспомогательные голоморфные в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функции вида

$$\Phi_0^+(z)=z^3\varphi_0^+(z)+z^2\varphi_1^+(z),\tag{12}$$

$$\Phi_1^+(z)=z^3d\frac{\varphi_0^+(z)}{dz}+z^2d\frac{\varphi_1^+(z)}{dz}+\left(z^2\cdot\frac{d\lambda_0(z)}{dz}+z\lambda_0(z)\right)\varphi_0^+(z)+\left(z\cdot\frac{d\lambda_0(z)}{dz}+\lambda_0(z)+z\right)\varphi_1^+(z),\tag{13}$$

перепишем условия (9) и (10) следующим образом:

$$\Phi_0^+\left[\alpha(t)\right]=G_{10}(t)\overline{\Phi_0^+(t)}+g_{10}(t),t\in L,\tag{14}$$

$$\Phi_1^+\left[\alpha(t)\right]=G_{11}(t)\overline{\Phi_1^+(t)}+g_{11}(t),t\in L.\tag{15}$$

Выражение (14) – это граничное условие классической задачи типа Карлемана относительно функции $\Phi_0^+(z)$. Сразу отметим, что в силу формулы (12) для функции $\Phi_0^+(z)$ точка $z=0$ является нулем не ниже 2-го порядка (то есть $\Pi\{\Phi_0^+;0\}\geq 2$). Выражение (15) является граничным условием классической задачи типа Карлемана относительно $\Phi_1^+(z)$ [5, с. 172].

Предположим, что задачи типа Карлемана (14) и (15) разрешимы и найдены их решения – функции $\Phi_0^+(z)$ и $\Phi_1^+(z)$. Тогда, в силу (12) и (13), для нахождения голоморфных компонент $\varphi_0^+(z),\varphi_1^+(z)$ искомой метааналитической функции $W(z)=[\varphi_0^+(z)+\overline{z}\varphi_1^+(z)]e^{\lambda_0(z)\overline{z}}$ (то есть для отыскания решения задачи K_M) нужно решить относительно $\varphi_0^+(z),\varphi_1^+(z)$ следующую систему:

$$\begin{cases}z^3\varphi_0^+(z)+z^2\varphi_1^+(z)=\Phi_0^+(z),\\ z^3\dfrac{d\varphi_0^+(z)}{dz}+z^2\dfrac{d\varphi_1^+(z)}{dz}+\left(z^2\dfrac{d\lambda_0(z)}{dz}+z\lambda_0(z)\right)\varphi_0^+(z)+\left(z\dfrac{d\lambda_0(z)}{dz}+\lambda_0(z)+z\right)\varphi_1^+(z)=\Phi_1^+(z).\end{cases}\tag{16}$$

Решая систему (16), получаем:

$$\varphi_0^+(z)=-\frac{1}{2z^2}W_0^+(z),\quad z\in T^+,\tag{17}$$

$$\varphi_1^+(z)=\frac{1}{2z}W_1^+(z),\quad z\in T^+,\tag{18}$$

где

$$W_0^+(z)=\Phi_1^+(z)-\left(z\frac{d\lambda_0(z)}{dz}+\lambda_0(z)-z\right)\frac{\Phi_0^+(z)}{z^2}-\frac{d\Phi_0^+(z)}{dz},\quad z\in T^+,\tag{19}$$

$$W_1^+(z)=\Phi_1^+(z)-\left(z\frac{d\lambda_0(z)}{dz}+\lambda_0(z)-3z\right)\frac{\Phi_0^+(z)}{z^2}-\frac{d\Phi_0^+(z)}{dz},\quad z\in T^+.\tag{20}$$

Наконец, определим условия, при которых функции $\varphi_0^+(z), \varphi_1^+(z)$, задаваемые по формулам (17), (18), будут голоморфными в $z=0$. Из формул (17) и (18) вытекает, что для этого голоморфная в круге T^+ функция $W_0^+(z)$ должна иметь в точке $z=0$ нуль не ниже 2-го порядка, а для функции $W_1^+(z)$ точка $z=0$ должна быть хотя бы простым нулем, то есть $\Pi\{W_0^+;0\}\ge 2$, $\Pi\{W_1^+;0\}\ge 1$.

Пусть функции $\Phi_0^+(z)$, $\Phi_1^+(z)$ и $\lambda_0(z)$ имеют следующие разложения в точке $z=0$:

$$\Phi_0^+(z)=z^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\,,\ \Phi_1^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\,,\ \lambda_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k, \quad z\in T^+\,. \tag{21}$$

Подставляя вместо функций $\Phi_0^+(z)$, $\Phi_1^+(z)$, $\lambda_0(z)$ их разложения (21) в правые части формул (19) и (20), будем иметь:

$$W_0^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k-\left(z\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p_k z^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k-z\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)a_k z^{k+1}\,,$$

$$W_1^+(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k-\left(z\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p_k z^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k-3z\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)a_k z^{k+1}\,.$$

Из последних разложений видно, что условия $\Pi\{W_0^+;0\}\ge 2$ и $\Pi\{W_1^+;0\}\ge 1$ будут обеспечены, если выполняются равенства вида:

$$\begin{cases} b_0-p_0a_0=0, \\ b_1-p_0a_1-(2p_0-1)a_0=0. \end{cases} \tag{22}$$

Тем самым, установлена достоверность следующей теоремы.

Теорема 1. Если $T^+=\{z:|z|<1\}$ *является единичным кругом, то решение задачи* K_M *в классе функций вида* (2) *сводится к решению двух классических задач типа Карлемана* (14) *и* (15) *относительно голоморфных в* T^+ *функций* $\Phi_0^+(z)$ *и* $\Phi_0^+(z)$, *причем задача* K_M *в единичном круге разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы вспомогательные задачи* (14) *и* (15), *а также выполняются условия* (22).

3. О нетеровости задачи K_M в случае, когда $T^+=\{z:|z|<1\}$. Теорема 1 показывает, что картина разрешимости задачи K_M складывается из картин разрешимости задач (14) и (15).

В силу тождества (7) из краевого условия (14) можно получить равенство [5, с. 172]

$$\left(1-G_{10}[\alpha(t)]\cdot\overline{G_{10}(t)}\right)\cdot\Phi_0^+(t)=G_{10}[\alpha(t)]\cdot\overline{g_{10}(t)}+g_{10}[\alpha(t)],\quad t\in L, \tag{23}$$

а из (15) – равенство

$$\left(1-G_{11}[\alpha(t)]\cdot\overline{G_{11}(t)}\right)\cdot\Phi_1^+(t)=G_{11}[\alpha(t)]\cdot\overline{g_{11}(t)}+g_{11}[\alpha(t)],\quad t\in L. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что если хотя бы при одном из значений параметра k $(k=0,1)$ будем иметь $1-G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{G_{1k}(t)}=0$, но $G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{g_{1k}(t)}+g_{1k}[\alpha(t)]\ne 0$, то задача K_M неразрешима. Если же $1-G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{G_{1k}(t)}\ne 0$ и $G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{g_{1k}(t)}+g_{1k}[\alpha(t)]\ne 0$ $(k=0,1)$, то задачи (14) и (15) сводятся к задачам об аналитическом продолжении, а значит, не являются нетеровыми.

Но [5, с. 188] для того, чтобы обе вспомогательные краевые задачи типа Карлемана (14) и (15) были нетеровыми, необходимо и достаточно, чтобы функции $G_{1k}(t)$, $g_{1k}(t)$ $(k=0,1)$ на L удовлетворяли следующим условиям:

$$1-G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{G_{1k}(t)}=0 \ \text{ и } \ G_{1k}[\alpha(t)]\cdot\overline{g_{1k}(t)}+g_{1k}[\alpha(t)]=0 \ \ (k=0,1)\,. \tag{25}$$

Следовательно, на основании теоремы 1 и представления (2) получаем такой результат:

Теорема 2. Если область T^+ *является единичным кругом, то для нетеровости задачи* K_M *в классе функций вида* (2) *необходимо и достаточно выполнение условий* (25).

Литература

1. Расулов, К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения / К.М. Расулов. – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

2. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Гахов, Ф.Д. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

3. Адуков, В.М. О явном и точном решениях задачи Маркушевича на окружности / В.М. Адуков, А.А. Патрушев // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». − 2011. – Т. 11, Вып. 2. − С. 9–20.

4. Расулов, К.М. О явном решении краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций в единичном круге / К.М. Расулов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 31–36.

5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

Поступила в редакцию 22 июня 2023 г.

Сведения об авторах

Гальмукова Ирина Аркадьева – кандидат педагогических наук, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации, г. Смоленск, Российская Федерация.

Расулов Карим Магомедович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Смоленский государственный университет, г. Смоленск, Российская Федерация, e-mail: kahrimanr@yandex.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 3, pp. 12–17

DOI: 10.14529/mmph240302

SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE CARLEMAN TYPE IN CLASSES OF GENERALIZED META-ANALYTIC FUNCTIONS IN A UNIT CIRCLE

I.A. Galmukova[1], K.M. Rasulov[2]

[1] Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation, Smolensk, Russian Federation

[2] Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation

E-mail: kahrimanr@yandex.ru

Abstract. This paper researches the boundary value problems of the Carleman type in classes of generalized meta-analytic functions of a complex variable and develops effective numerical methods to solve these problems. The explicit solution is of substantial significance. In other words there is the possibility of solving these problems with formulas of the classical Carleman problem for analytical functions and a finite number of linear algebraic equations and/or linear differential equations when the matrix of the system can be written in quadratures. The paper considers one of the main boundary value problems of the Carleman type in classes of generalized meta-analytic functions in simply connected domains. Using a representation of generalized meta-analytic functions using a pair of analytic functions of a complex variable, a constructive algorithm for an explicit method for solving the problem is established in the case when the unit circle is the carrier of the boundary conditions.

The paper proves that the solution of the boundary value problem in the unit circle is reduced to the solution of two classical boundary value problems of the Carleman type for analytic functions and some systems of algebraic equations. In addition, the paper describes the solvability of the boundary value problem in the unit circle and obtains conditions for its Noetherian property.

Keywords: generalized meta-analytic function; analytic components; boundary value problem of the Carleman type; solvability picture; conditions for the boundary value problem to be Noetherian; unit circle.

References

1. Rasulov K.M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* (Boundary Value Problems for Polyanalytic Functions and Some of their Applications). Smolensk: SGPU Publ., 1998, 343 p. (in Russ.).

2. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary value problems). Moscow: Nauka Publ., 1977. – 640 p. (in Russ.).

3. Adukov V.M., Patrushev A.A. On Explicit and Exact Solutions of the Markushevich Boundary Problem for Circle. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, Vol. 11, Iss. 2, pp. 9–20. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-2-9-20

4. Rasulov K.M. On the Explicit Solution of the Boundary Value Problem of Neumann Type For The Generalized Analytic Functions in The Unit Circle. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, Vol. 12, no. 1, pp. 31–36. (in Russ.).

5. Litvinchuk G.S. Kraevye zadachi i singulyarnye integral'nye uravneniya so sdvigom (Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with a Shift). Moscow, Nauka Publ., 1977, 448 p. (in Russ.).

Received June 22, 2023

Information about the authors

Galmukova Irina Arkadevna is Cand. Sc. (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Natural Sciences, Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation, Smolensk, Russian Federation.

Rasulov Karim Magomedovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Mathematical Analysis Department, Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation, e-mail: kahrimanr@yandex.ru.