УДК 517.9 DOI: 10.14529/mmph240304

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

О.Г. Китаева
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: kitaevaog@susu.ru

Аннотация. Рассматривается линейная стохастическая система уравнений Осколкова, которая моделирует течение вязкоупругой несжимаемой жидкости. Изучается вопрос об устойчивости решений этой системы. Для этого стохастическая система уравнений Осколкова рассматривается в виде стохастического линейного уравнения соболевского типа. В качестве искомой величины выступает стохастический процесс, который не имеет производной по Ньютону–Лейбницу ни в одной точке. Поэтому мы используем производную стохастического процесса в смысле Нельсона–Гликлиха. Показано, что при определенных значениях параметров, характеризующих упругие и вязкие свойства жидкости, существование неустойчивого и устойчивого инвариантных пространств стохастической системы уравнений Осколкова.

Ключевые слова: стохастическая система уравнений Осколкова; производная Нельсона–Гликлиха; инвариантные пространства.

Введение

Рассмотрим систему Осколкова

$$\left(\lambda-\nabla^2\right)u_t=\nu\nabla^2 u-p,\ \nabla u=0, \tag{1}$$

$$u(x,t)=0,\ (x,t)\in\partial D\times\mathbb{R},\ u(x,0)=u_0,\ x\in D,$$

где $u(x,t)=\left(u_1(x,t),u_2(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right)$ и p характеризуют вектор скоростей и градиент давления. Система (1) является линеаризацией системы

$$\left(\lambda-\nabla^2\right)u_t=\nu\nabla^2 u-\left(u\cdot\nabla\right)-\nabla p,\nabla u=0,$$

которая была получена А.П. Осколковым [1] для описания течения вязких жидкостей, обладающих свойством упругости.

Мы будем исследовать вопрос об устойчивости решений системы (1) со стохастическими начальными данными. В качестве начального условия выберем случайную величину

$$\eta(0)=\eta_0 \tag{2}$$

и систему (1) будем рассматривать в виде стохастического уравнения соболевского типа [2–5]

$$L\overset{o}{\eta}=M\eta\ . \tag{3}$$

Решением стохастического уравнения является стохастический процесс, который не дифференцируем ни в одной точке. Поэтому в качестве производной стохастического процесса η будем рассматривать производную Нельсона–Гликлиха $\overset{o}{\eta}$ [6].

Исследование разрешимости детерминированной системы Осколкова начато в [1] при условии, что параметры $\lambda,\nu\in\mathbb{R}_+$. В работе [7] вопрос о существовании решений решался с помощью метода фазового пространства при $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\nu\in\mathbb{R}_+$. Было показано существование экспоненциальной дихотомии решений.

Нашей целью является изучение устойчивости решений стохастической системы (1) в терминах устойчивых и неустойчивых инвариантных пространств. Статья состоит из двух частей. В первой части рассматривается система (1) в пространствах случайных K -величин, показана разрешимость стохастической системы (1). Во второй части доказывается существование устойчивого и неустойчивого инвариантных пространств.

1. Система Осколкова в пространствах случайных *K*-величин

Систему (1) будем рассматривать в пространствах случайных *K*-величин. Для этого обозначим $H^2=\left(W_2^2(D)\right)^n$, $L^2=\left(L_2(D)\right)^n$, где D – ограниченная область с гладкой границей (класса $\mathbb{C}^\infty$). Замыкание линеала $\{u\in\mathbb{C}^\infty:\ \nabla u=0\}$ обозначим H_σ, причем существует расщепление $L^2=H_\sigma\oplus H_\pi$, где H_π – ортогональное дополнение к H_σ, а Π – отропроектор соответствующий этому дополнению. Обозначим $\Sigma=I-\Pi$.

Положим $\mathfrak{U}=H_\sigma^2\times H_\pi^2\times H_\pi$ и $\mathfrak{F}=H_\sigma\times H_\pi\times H_\pi$. Элемент $u\in\mathfrak{U}$ имеет вид $u=\left(u_\sigma,u_\pi,p\right)$. В [7] показано, что оператор $A=\left(-\nabla^2\right)^n$ является линейным непрерывным оператором, причем $\sigma(A)$ положительный и дискретный, сгущающийся к +∞.

Пространства $W_2^2(D)$, $L_2(D)$ – сепарабельные гильбертовы пространства, поэтому пространства $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ являются сепарабельными гильбертовыми пространствами как их конечные произведения. Через $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ обозначим базис в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Построим пространства $U_K L_2$ и $F_K L_2$. Выберем последовательность равномерно ограниченных случайных величин $\{\xi_k\}\in L_2$ и $K=\{\lambda_k\}$ – монотонная последовательность такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k<+\infty$. Здесь L_2 – пространство случайных *K*-величин ξ с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Элементами пространств $U_K L_2$ и $F_K L_2$ являются векторы

$$\eta=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\varphi_{k,}\varsigma=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k\psi_k.$$

Операторы $L,M:U_K L_2\to F_K L_2$ зададим следующими формулами:

$$L=\begin{pmatrix}\Sigma(\lambda I+A) & O & O\\ O & \mathrm{P}(\lambda I+A) & O\\ O & O & O\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}-\nu\Sigma A & O & O\\ O & -\nu\mathrm{P}A & -\mathrm{P}\\ O & -\mathrm{P}B & O\end{pmatrix}.$$

Тогда стохастическую систему уравнений (1) можно рассматривать в виде стохастического линейного уравнения (3). Очевидно, что операторы $L,M\in\mathfrak{L}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, причем $\operatorname{im}L=H_\sigma^2\oplus H_\pi^2\oplus\{0\}$, $\ker L=\{0\}\oplus\{0\}\oplus H_\pi$. В [8] показано, что оператор $A\in\mathfrak{L}(\mathcal{U},\mathcal{F})$, тогда и только тогда, когда оператор $A\in\mathfrak{L}\left(U_K L_2,F_K L_2\right)$. Поэтому $L,M\in\mathfrak{L}\left(U_K L_2,F_K L_2\right)$. В работе [7] показано, что оператор M $(L,1)$-ограничен, если операторы $L,M:\mathcal{U}\to\mathcal{F}$.

Лемма 1. *Операторы* $L,M\in\mathfrak{L}\left(U_K L_2,F_K L_2\right)$, *причем оператор* M $(L,1)$*-ограничен при* $\lambda\in R\setminus\sigma(A),\nu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Решением уравнения (3) назовем стохастический *K*-процесс $\eta\in C^1\left(\mathfrak{I};U_K L_2\right)$, если при подстановке его (3) он почти наверное обращает уравнение в тождество ($\mathfrak{I}$ – некоторый промежуток из $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, наделенных борелевой σ-алгеброй). *Стохастическим фазовым пространством* уравнения (3) назовем множество $P\in U_K L_2$, если почти наверное каждая траектория решения $\eta=\eta(t)$ уравнения (3) лежит в P, для почти всех $\eta_0\in P$ существует решение уравнения (3), удовлетворяющее условию (2).

Фазовое пространство стохастической системы Осколкова имеет вид

$$U_K^1 L_2=\left\{\eta\in U_K L_2:\mathrm{P}\eta=0,\mathrm{P}B\Sigma\eta=p\right\}.$$

Пусть $\{\nu_k\}$ – спектр оператора $\tilde{A}:H_\pi^2\to H_\pi^2$, являющегося сужением оператора A на H_π^2. Разрешающую группу можно представить в виде

$$U^t = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu_k \neq \lambda} e^{\frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda} t} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *При любых* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A), \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и при любой случайной величине* $\eta_0 \in U_K^1 L_2$ *существует решение стохастической системы уравнений (1) с начальным условием (3), которое имеет вид* $\eta(t) = U^t \eta_0$, $t \in \mathfrak{J}$.

2. Инвариантные пространства стохастической системы уравнений Осколкова

Определение 1. Инвариантное пространство I_+ называется *устойчивым (неустойчивым) инвариантным пространством* уравнения (3), если существуют такие положительные константы $N_{1(2)}, m_{1(2)}$, что выполнено

$$\left\| \eta^1(t) \right\|_{U_K L_2} \le N_1 e^{-m_1(s-t)} \left\| \eta^1(s) \right\|_{U_K L_2}, s \ge t, \left(\left\| \eta^2(t) \right\|_{U_K L_2} \le N_2 e^{-m_2(t-s)} \left\| \eta^2(s) \right\|_{U_K L_2}, t \ge s, \right),$$

где $\eta^1 \in I_+$ ($\eta^2 \in I_-$) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Относительный спектр стохастической системы Осколкова имеет вид

$$\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cap \sigma_2^L(M),$$

где

$$\sigma_1^L(M) = \left\{ \frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda}, \lambda > \nu_k \right\},\ \sigma_2^L(M) = \left\{ \frac{\nu \nu_k}{\nu_k - \lambda}, \lambda < \nu_k \right\}.$$

Рассмотрим пространства

$$I^1 = \{\eta \in U_K^1 L_2 : \lambda > \nu_k\},\ I^2 = \{\eta \in U_K^1 L_2 : \lambda < \nu_k\}.$$

Сcправедлива следующая

Теорема 2. *Если* $\lambda \in R \setminus \sigma(A)$, $\lambda > \nu_1$ *и* $\nu > 0$ ($\nu < 0$), *то* I^1 *является устойчивым инвариантным пространством и* I^2 *является неустойчивым инвариантным пространством стохастической системы уравнений (1).*

Доказательство. Если $\nu > 0$ ($\nu < 0$), тогда $\sigma_1^L(M)$ ($\sigma_2^L(M)$) лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости, а $\sigma_2^L(M)$ ($\sigma_1^L(M)$) – в правой полуплоскости комплексной плоскости. Поэтому в силу результатов [9] пространство I^1 (I^2) является устойчивым инвариантным пространством, пространство I^2 (I^1) является неустойчивым инвариантным пространством.

Заключение

В дальнейшем планируется продолжить исследования по изучению устойчивости и неустойчивости решений для стохастических полулинейных уравнений соболевского типа с относительно секториальным оператором [8]. Следуя работам [9–11], предполагается провести численные эксперименты по нахождению устойчивого и неустойчивого решений стохастической системы (1).

Литература

1. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева / А.П. Осколков // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.

2. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

3. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises” / G.A. Sviridiuk, M.A. Sagadeeva // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 13, no. 6. – P. 4607–4621.

4. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – Springer, 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196

5. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.

6. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.

7. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова / Г.А. Свиридюк, М.М. Якупов // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32, № 11. – С. 1538–1543.

8. Свиридюк, Г.А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором / Г.А. Свиридюк // Доклады Академии наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 4. – С. 828–831.

9. Kitaeva, O.G. Exponential Dichotomies of a Non-Classical Equations of Differential Forms on a Two-Dimensional Torus with “Noises” / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2019. – Vol. 6, no. 3. – P. 26–38.

10. Kitaeva, O.G. Stable and Unstable Invariant Spaces of One Stochastic Non-Classical Equation with a Relatively Radial Operator on a 3-Torus / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2020. – Vol. 7, no. 2. – P. 40–49.

11. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 21–29.

Поступила в редакцию 15 июля 2024 г.

Сведения об авторе

Китаева Ольга Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 3, pp. 27–31

DOI: 10.14529/mmph240304

INVARIANT SPACES OF STOCHASTIC SYSTEMS OF OSKOLKOV EQUATIONS

O.G. Kitaeva
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: kitaevaog@susu.ru

Abstract. This paper considers a linear stochastic system of Oskolkov equations, which models the flow of a viscoelastic incompressible fluid and studies the stability of the solutions of this system. For this purpose, the stochastic system of Oskolkov equations is considered in the form of a Sobolev-type stochastic linear equation. The desired value is a stochastic process that does not have a Newton–Leibniz derivative at any point. Therefore, we use the derivative of the stochastic process in the sense of Nelson–Gliklich. It is shown that for certain parameter values characterizing the elastic and viscous properties of a liquid there are unstable and stable invariant spaces of a stochastic system of Oskolkov equations.

Keywords: stochastic system of Oskolkov equations; Nelson-Gliklich equation; invariant spaces.

References

1. Oskolkov A.P. Nelokal'nye problemy dlya odnogo klassa nelineynykh operatornykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii uravneniy tipa S.L. Soboleva (Nonlocal Problems for One Class of Nonlinear Operator Equations that Arise in the Theory of Sobolev Type Equations). *Zapiski nauch. seminarov LOMI*, 1991, Vol. 198, pp. 31–48. (in Russ.).

2. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410

3. Favini A., Sviridiuk G.A., Sagadeeva M.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Radial Operators in Space of “Noises”. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2016, Vol. 13, no. 6, pp. 4607–4621. DOI: 10.1007/s00009-016-0765-x

4. Favini A., Sviridiuk G.A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185

5. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridiuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.

6. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

7. Sviridyuk G.A., Yakupov M.M. The Phase Space of The Initial-Boundary Value Problem for the Oskolkov System. *Differential Equations*, 1996, Vol. 32, no. 11, pp. 1535–1540.

8. Sviridyuk G.A. Semilinear Equations of the Sobolev Type with Relatively Bounded Operators. *Soviet Math. Dokl*., 1992, Vol. 43, no. 3, pp. 797–801.

9. Kitaeva O.G. Exponential Dichotomies of a Non-Classical Equations of Differential Forms on a Two-Dimensional Torus with “Noises”. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2019, Vol. 6, no. 3, pp. 26–38. DOI: 10.14529/jcem190303

10. Kitaeva O.G. Stable and Unstable Invariant Spaces of One Stochastic NonClassical Equation with a Relatively Radial Operator on a 3-Torus. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2020, Vol. 7, no. 2, pp. 40–49. DOI: 10.14529/jcem200204

11. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 1, pp. 21–29. DOI: 10.14529/jcem230103

Received July 15, 2024

Information about the author

Kitaeva Olga Gennadevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kitaevaog@susu.ru.