УДК 517.958 DOI: 10.14529/mmph240305

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ТИПА БЕЛЛМАНА

***Д.И. Камалетдинова*[1], *В.О. Лукащук*[2]**
[1] *ООО ИК «СИБИНТЕК», г. Уфа, Российская Федерация*
[2] *Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Российская Федерация*
E-mail: voluks@gmail.com

Аннотация. Исследуется уравнение с квадратичной нелинейностью, которое является частным случаем дифференциального уравнения типа Беллмана. В результате решения задачи групповой классификации установлено, что в случае произвольного вида двух функций, входящих в нелинейные члены, уравнение допускает четырехпараметрическую группу преобразований, которая расширяется до пятипараметрической и шестипараметрической в случае параметрической и линейной зависимости функций. Построены некоторые инвариантные решения.

Ключевые слова: уравнение типа Беллмана; группа точечных преобразований; инвариантное решение.

Введение

Уравнение Беллмана [1] является одним из основных инструментов теории оптимального управления и динамического программирования. Оно широко используется в технических науках и экономике, является ключевым элементом многих алгоритмов машинного обучения и искусственного интеллекта.

Одной из актуальных задач теории управления является задача оптимальной коррекции траектории движения материальной точки при малых возмущениях. Согласно подходу академика Ф.Л. Черноусько [2, 3], исследование таких процессов может быть сведено к решению краевой задачи для нелинейного уравнения в частных производных второго порядка (уравнения типа Беллмана).

Характерной особенностью уравнения, существенно усложняющей его аналитическое исследование, является его многомерность: даже в простейшей постановке оно содержит три независимые переменные – временную и две пространственные. Одним из эффективных методов анализа нелинейных уравнений является групповой анализ [4]. Данный метод позволяет не только установить ряд качественных свойств уравнения, но и найти его частные решения уравнения. Его преимущество при решении задач оптимального управления лазером, например, подробно описаны в работе [5]. Групповой анализ применяется и в задачах об оптимальном управлении пограничным слоем [6].

В работе рассматривается уравнение с квадратичной нелинейностью, которое является частным случаем дифференциального уравнения Беллмана, вида [7, с. 259]

$$u_t u_x - \mathrm{f}(t) u_x u_{yy} - \mathrm{g}(t)\left(u_y\right)^2 = 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$ – произвольные функции, $\mathrm{f}(t) \neq 0, \mathrm{g}(t) \neq 0.$ Решается задача групповой классификации относительно функций $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$ по допускаемым этим уравнением однопараметрическим группам Ли точечных преобразований. Также строятся некоторые инвариантно-групповые решения уравнения (1).

Следуя работе [8], в дальнейшем используется обозначение $\partial/\partial t = \partial_t$.

1. Групповая классификация

Будем искать для уравнения (1) допускаемую группу преобразований с оператором вида

$$X = \tau(t,x,y,u)\partial_t + \xi(t,x,y,u)\partial_x + \zeta(t,x,y,u)\partial_y + \eta(t,x,y,u)\partial_u. \tag{2}$$

Действуя вторым продолжением оператора (2) на уравнение (1), получаем определяющее уравнение

$$\underset{2}{X}\left(u_t u_x - \mathrm{f}(t) u_x u_{yy} - \mathrm{g}(t)\left(u_y\right)^2\right)\Big|_{(1)} = 0.$$

Расщепляя его по независимым переменным $u_x, u_y, u_{xy}, \ldots,$ приходим к довольно громоздкой определяющей системе, большая часть уравнений которой легко решается. В результате находим

$$\tau = \tau(t), \qquad \xi = C_1 x + C_2, \qquad \zeta = C_3 y + C_4, \qquad \eta = C_5 u + C_6, \tag{3}$$

где C_i – произвольные постоянные, $i = 1, \ldots, 6,$ а из нерешенных в определяющей системе останутся лишь следующие два уравнения:

$$\begin{cases} \mathrm{g}\,\tau' + \mathrm{g}'\tau = \left(2C_3 - C_1\right)\mathrm{g}, \\ \mathrm{f}\,\tau' + \mathrm{f}\,'\tau = 2C_3\,\mathrm{f}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, задача групповой классификации сводится к решению классифицирующей системы на функции $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$, построенной на основе системы (4)

$$\begin{cases} \mathrm{g}(t)\,\mathrm{w}'(t) + \mathrm{g}'(t)\,\mathrm{w}(t) = \left(2A - B\right)\mathrm{g}(t), \\ \mathrm{f}(t)\,\mathrm{w}'(t) + \mathrm{f}\,'(t)\,\mathrm{w}(t) = 2A\mathrm{f}(t), \end{cases}$$

где A, B – произвольные постоянные, $\mathrm{w}(t)$ – произвольная функция. Поскольку $\mathrm{f}(t) \neq 0, \mathrm{g}(t) \neq 0,$ разделим первое уравнение системы на $\mathrm{g}(t)$, а второе – на $\mathrm{f}(t)$. Переходя к логарифмам функций

$$\hat{\mathrm{f}}(t) = \ln\left|\mathrm{f}(t)\right|, \qquad \hat{\mathrm{g}}(t) = \ln\left|\mathrm{g}(t)\right|,$$

имеем систему

$$\begin{cases} \mathrm{w}'(t) + \hat{\mathrm{g}}'(t)\,\mathrm{w}(t) = 2A - B, \\ \mathrm{w}'(t) + \hat{\mathrm{f}}\,'(t)\,\mathrm{w}(t) = 2A. \end{cases} \tag{5}$$

Вычитая первое уравнение из второго, приходим к соотношению

$$(\hat{\mathrm{f}}\,' - \hat{\mathrm{g}}')\,\mathrm{w} = B. \tag{6}$$

Случай 1. Пусть $\hat{\mathrm{f}}\,' \neq \hat{\mathrm{g}}',$ тогда из (6)

$$\mathrm{w} = \frac{B}{\hat{\mathrm{f}}\,' - \hat{\mathrm{g}}'}.$$

Вычисляя производную $\mathrm{w}(t)$ и подставляя в систему (5), получаем уравнение

$$B\hat{\mathrm{f}}\,'\left(\hat{\mathrm{f}}\,' - \hat{\mathrm{g}}'\right) - B\left(\hat{\mathrm{f}}\,'' - \hat{\mathrm{g}}''\right) = 2A\left(\hat{\mathrm{f}}\,' - \hat{\mathrm{g}}'\right)^2, \tag{7}$$

которое связывает функции $\hat{\mathrm{f}}(t), \hat{\mathrm{g}}(t)$ и постоянные A, B.

Если $\hat{\mathrm{f}}(t)$ и $\hat{\mathrm{g}}(t)$ – произвольные функции, то условие (7) выполняется при $A = B = 0.$ Возвращаясь к системе уравнений (4), получаем, что $C_1 = 0, C_3 = 0, \tau = 0.$ Следовательно, уравнение (1) допускает оператор (2) с координатами

$$\tau = 0, \qquad \xi = C_2, \qquad \zeta = C_4, \qquad \eta = C_5 u + C_6.$$

Пусть $\hat{\mathrm{f}}(t)$ и $\hat{\mathrm{g}}(t)$ удовлетворяют условию (7). Выясним их общий вид, когда $A \neq 0, B \neq 0.$ Обозначим

$$\lambda = \frac{2A}{B}, \qquad \mathrm{h}(t) = \hat{\mathrm{f}}(t) - \hat{\mathrm{g}}(t),$$

причем $\mathrm{h}'(t) \neq 0.$ Условие (7) перепишется в виде

$$\hat{\mathrm{f}}\,'\mathrm{h}' - \mathrm{h}'' = \lambda\,\mathrm{h}'^2,$$

откуда

$$\hat{\mathrm{f}} = \lambda\,\mathrm{h} + \ln\mathrm{h}' + \ln b, \qquad \hat{\mathrm{g}} = \left(\lambda - 1\right)\mathrm{h} + \ln\mathrm{h}' + \ln b,$$

где b – произвольная постоянная, $b \neq 0$. Получаем общий вид функций $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$, которые удовлетворяют условию (7) в параметрическом виде:

$$\mathrm{f} = b\,\mathrm{h}'e^{\lambda\,\mathrm{h}}, \qquad \mathrm{g} = b\,\mathrm{h}'e^{(\lambda-1)\,\mathrm{h}}.$$

Подставляя функции $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$ в систему (4), находим $\tau = \dfrac{C_1}{\mathrm{h}'(t)}, C_3 = \dfrac{\lambda}{2}C_1.$ Следовательно, в этом случае уравнение (1) допускает оператор (2) с координатами

$$\tau=\frac{C_1}{\mathrm{h}'(t)},\qquad \xi=C_1x+C_2,\qquad \zeta=\frac{\lambda}{2}C_1y+C_4,\qquad \eta=C_5u+C_6.$$

Случай 2. Пусть $\hat{\mathrm{f}}'=\hat{\mathrm{g}}'$, тогда функции линейно зависимы: $\mathrm{g}(t)=k\,\mathrm{f}(t)$, где $k\neq 0$ – произвольная постоянная. Из системы (4) получаем $C_1=0$ и находим функцию τ, а координаты допускаемого оператора (2) будут иметь вид

$$\tau=\frac{2C_3\int\mathrm{f}(t)dt+C_7}{\mathrm{f}(t)},\qquad \xi=C_2,\qquad \zeta=C_3y+C_4,\qquad \eta=C_5u+C_6.$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение. В зависимости от вида функций $\mathrm{f}(t)$ и $\mathrm{g}(t)$ уравнение типа Беллмана (1) допускает четырех-, пяти- или шестипараметрическую группу Ли точечных преобразований. А именно,

1) если $\mathrm{f}(t)$, $\mathrm{g}(t)$ – произвольного вида, $\mathrm{f}(t)\neq 0, \mathrm{g}(t)\neq 0$, то уравнение (1) допускает четырехпараметрическую группу Ли G_4 с операторами

$$G_4:\qquad X_1=\partial_x,\quad X_2=\partial_y,\quad X_3=\partial_u,\quad X_4=u\partial_u,$$

2) если $\mathrm{f}=b\,\mathrm{h}'e^{\lambda\mathrm{h}}, \mathrm{g}=b\,\mathrm{h}'e^{(\lambda-1)\mathrm{h}}$, где $\mathrm{h}(t)$ – произвольная функция, $\mathrm{h}(t)\neq\mathrm{const}$, b,λ – произвольные постоянные, $b\neq 0, \lambda\neq 0$, то группа Ли G_4 расширяется до пятипараметрической оператором

$$X_5=\frac{1}{\mathrm{h}'(t)}\partial_t+x\partial_x+\frac{\lambda}{2}y\partial_y,$$

3) если $\mathrm{g}(t)=k\,\mathrm{f}(t)$, где $k\neq 0$ – произвольная постоянная, то группа Ли G_4 расширяется до шестипараметрической операторами

$$X_5=\frac{1}{\mathrm{f}(t)}\partial_t,\qquad X_6=\frac{2\int\mathrm{f}(t)dt}{\mathrm{f}(t)}\partial_t+y\partial_y.$$

2. Инвариантные решения

Построим некоторые инвариантные решения уравнения (1). Общий инвариант для оператора X_2 есть функция $I(t,x,u)$. Анзац на решение $u=\varphi(t,x)$ приводит к двум возможным инвариантным решениям уравнения (1) вида

$$u=\varphi(t),\qquad u=\psi(x).$$

Для абелевой подалгебры с базисными операторами X_1, X_2 инвариантное решение тоже имеет вид произвольной функции от переменной x: $u=\varphi(x)$. Если взять за основу решения инвариант линейной комбинации операторов $aX_2-b\,X_1$, где a,b – произвольные постоянные, то, предполагая, что решение имеет вид $u=\varphi(t,ax+by)$, получим линейное редуцированное уравнение

$$a\varphi_t=ab^2\,\mathrm{f}(t)\varphi_{zz}+b^2\,\mathrm{g}(t)\varphi_z,$$

где $z=ax+by$.

Рассмотрим двумерную подалгебру $L_2=\{X_1+aX_3, X_2+bX_3\}$, где a,b – произвольные постоянные. Из общего инварианта имеем анзац на решение $u=ax+by+\varphi(t)$, подставляя который в уравнение (1), получим редуцированное уравнение

$$a\varphi'=b^2\,\mathrm{g}(t),$$

которое легко интегрируется. В результате находится инвариантное решение в виде

$$u=ax+by+\frac{b^2}{a}\int\mathrm{g}(t)dt+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим другую двумерную подалгебру $\{X_1 + aX_4, X_2 + bX_4\}$, из общего инварианта которой имеем анзац на решение вида $u = e^{ax+by}\varphi(t)$. В результате решения редуцированного уравнения получаем инвариантное решение

$$u = Ce^{ax+by+b^2\int\left(f(t)+\frac{g(t)}{a}\right)dt},$$

где C – произвольная постоянная.

Для оператора X_5, в случае параметрической зависимости функций f и g, анзац на решение имеет вид $u = \varphi\left(xe^{-h(t)}, ye^{-\frac{\lambda h(t)}{2}}\right)$, а уравнение (1) редуцируется в уравнение с двумя переменными

$$z\varphi_z^2 + \frac{\lambda}{2}v\varphi_z\varphi_v + b\varphi_z\varphi_{vv} + b\varphi_v^2 = 0,$$

где $z = xe^{-h(t)}, v = ye^{-\frac{\lambda h(t)}{2}}$.

В случае линейной зависимости функций f и g для оператора X_5 получаем инвариантное решение $u = \varphi(x, y)$, где φ удовлетворяет редуцированному уравнению

$$\varphi_{yy}\varphi_x + k\varphi_y^2 = 0.$$

Для оператора X_6 инвариантное решение ищется в виде $u = \varphi\left(x, \frac{1}{y^2}\int f(t)dt\right)$, а редуцированное уравнение меньшей размерности по пространству имеет вид

$$4kz^2\varphi_z^2 + (6z-1)\varphi_z\varphi_x + 4z^2\varphi_x\varphi_{zz} = 0,$$

где $z = \frac{1}{y^2}\int f(t)dt.$

Заключение

В работе исследованы симметрийные свойства уравнения типа Беллмана. Установлено, что в случае произвольного вида функций от времени, стоящих при первых производных по пространству, допускаемая группа преобразований для исследуемого уравнения является четырехпараметрической. Если функции связаны через параметрическое соотношение, то группа расширяется до пятипараметрической. В случае, когда функции пропорциональны, группа расширяется до шестипараметрической. Для некоторых допускаемых операторов и на их двумерных подалгебрах построены инвариантные решения, которые могут быть использованы в дальнейшем, например, при решении уравнения (1) с помощью численных методов для тестирования вычислительных программ. С помощью ряда операторов удалось понизить порядок уравнения (1) и выписать соответствующие редуцированные уравнения.

Литература

1. Ванько, В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 488 с.

2. Черноусько, Ф.Л. Автомодельные решения уравнения Беллмана для задач оптимальной коррекции случайных возмущений / Ф.Л. Черноусько // ПММ. – 1971. – Т. 35, № 2. – С. 333–342.

3. Черноусько, Ф.Л Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский. – М.: Наука, 1978. – 351 с.

4. Ибрагимов, Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Физматлит, 2012. – 332 с.

5. Полякевич, А.С. Преимущества группового анализа дифференциальных уравнений при решении задач оптимального управления лазерными системами / А.С. Полякевич, Б.Н. Пойзнер // Оптика атмосферы и океана. – 1995. – Т. 8, № 11. – С. 1697–1699.

6. Гараев, К.Г. Инвариантные краевые задачи оптимально управляемого пограничного слоя / К.Г. Гараев, В.А. Овчинников // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, № 1 (257). – С. 33–38.

7. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

8. Овсянников, Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 238 с.

Поступила в редакцию 19 декабря 2023 г.

Сведения об авторах

Камалетдинова Дарья Ильшатовна – специалист управления информационных систем Lexema, ООО ИК «СИБИНТЕК», г. Уфа, Российская Федерация.

Лукащук Вероника Олеговна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислительных технологий и систем, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Российская Федерация, e-mail: voluks@gmail.com.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 3, pp. 32–37

DOI: 10.14529/mmph240305

SYMMETRY ANALYSIS OF THE BELLMAN EQUATION

D.I. Kamaletdinova[1], V.O. Lukashchuk[2]
[1] SIBINTEK IC LLC, Ufa, Russian Federation
[2] Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation
e-mail: voluks@gmail.com

Abstract. The optimal correction of a material point's trajectory under small perturbations is an important problem in control theory. The study of such processes can be reduced to solving a boundary value problem for a special nonlinear second-order partial differential equation known as the Bellman equation. This paper deals with a partial differential equation with quadratic nonlinearity, which is a special case of the Bellman equation. The equation contains three independent variables—one temporal and two spatial, and two arbitrary time-dependent functions as multipliers. Multidimensionality is a distinctive feature of this equation, which significantly complicates its analytical study. Therefore, we use Lie group analysis which is an effective technique to analytically study nonlinear partial differential equations. It allows the investigation of not only the symmetry properties of equations, but also to find their particular solutions. The problem of group classification for this Bellman equation is solved with respect to two arbitrary time-dependent functions. It is established that in the case of the arbitrariness of these functions, the equation admits a four-parameter group of point transformations. This group expands to five-parameter and six-parameter groups for the parametric representation and linear dependency of the functions, respectively. Several invariant solutions are also constructed.

Keywords: Bellman type equation; group of point transformations; invariant solution.

References

1. Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N. *Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Calculus of Variations and Optimal Control). Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2006, 488 p. (in Russ.).

2. Chernousko F.L. Self-Similar Solutions of the Bellman Equation for Optimal Correction of Random Disturbances. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1971, Vol. 35, no. 2, pp. 333–342. (in Russ.).

3. Chernous'ko F.L., Kolmanovskiy V.B. *Optimal'noe upravlenie pri sluchaynykh vozmushcheniyakh* (Optimal Control for Random Disturbances). Moscow, Nauka Publ., 1978, 351 p. (in Russ.).

4. Ibragimov N.Kh. *Prakticheskiy kurs differentsial'nykh uravneniy i matematicheskogo modelirovaniya* (A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modeling). Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 332 c. (in Russ.). [Ibragimov N.H. A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modeling. Higher Education Press Limited Company, 2009, 364 p.]

5. Polyakevich A.S., Poizner B.N. Advantages of Group Analysis of Differential Equations in Solution of Some Problems of Laser System Optimum Control. *Optika atmosfery i okeana*, 1995, Vol. 8, no. 11, pp. 1697–1699. (in Russ.).

6. Garaev K.G., Ovchinnikov V.A. Invariantnye kraevye zadachi optimal'no upravlyaemogo pogranichnogo sloya (Invariant Boundary Value Problems of an Optimally Controlled Boundary Layer). *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2003, Vol. 44, no. 1 (257), pp. 33–38. (in Russ.).

7. Polyanin A.D., Zaytsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* (Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics). Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 256 p. (in Russ.).

8. Ovsyannikov L.V. *Gruppovye svoystva differentsial'nykh uravneniy* (Group Properties of Differential Equations). Novosibirsk, SO AN SSSR Publ., 1962, 238 p. (in Russ.).

Received December 19, 2023

Information about the authors

Kamaletdinova Daria Ilshatovna is Specialist, Department of Information Systems Management Lexema, Sibintek, Ufa, Russian Federation.

Lukashchuk Veronika Olegovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of High Performance Computing Technologies and Systems, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russian Federation, e-mail: voluks@gmail.com.