УДК 517.968.73: 537.8 DOI: 10.14529/mmph240306

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕМАГНИТНОМ ПРОВОДЯЩЕМ ТЕЛЕ С ДЕФЕКТОМ

С.В. Марвин
Уральский федеральный университет им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация
E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении применительно к случаю неферромагнитного проводящего тела, находящегося в поле стороннего тока. Предполагается, что тело неоднородно по своим проводящим свойствам и, кроме того, содержит в себе объемный дефект в виде полости (непроводящую подобласть). Задача рассматривается в классической постановке: напряженности электрического и магнитного полей предполагаются непрерывно-дифференцируемыми вне границ раздела проводящих и непроводящих областей и непрерывным образом продолжаемыми на границы этих областей; при этом границы областей являются поверхностями Ляпунова. На этих поверхностях напряженности электрического и магнитного поля удовлетворяют обычным условиям сопряжения: их тангенциальные компоненты непрерывны; кроме того, на бесконечности напряженности достаточно быстро убывают. На основе указанных допущений выводятся интегро-дифференциальные уравнения для напряженностей электрического и магнитного поля; полученные интегро-дифференциальные уравнения учитывают как предполагаемую неоднородность проводника, так и наличие указанного объемного дефекта в нем. Доказывается равносильность полученных интегро-дифференциальных уравнений и исходной начально-краевой задачи для уравнений Максвелла: как для электромагнитного поля внутри проводника, так и снаружи проводящего тела.

Ключевые слова: начально-краевая задача; уравнения Максвелла; квазистационарное приближение; интегро-дифференциальные уравнения; объемный потенциал; потенциал простого слоя.

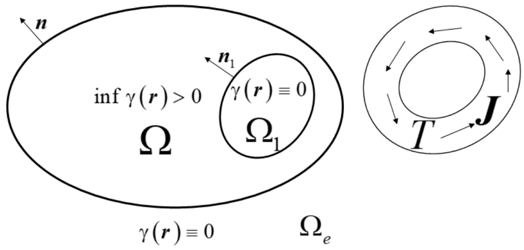
Введение

Краевые и начально-краевые задачи электродинамики применительно к проводящим средам имеют существенную прикладную значимость для электротехники, радиотехники и неразрушающего контроля. Уравнения электродинамики в интегро-дифференциальной форме более удобны, чем дифференциальные уравнения Максвелла (как для исследований общего характера, так и для конкретных численных расчетов). Поэтому не теряет актуальность вывод, исследование и решение интегро-дифференциальных уравнений для различных пространственных комбинаций материальных сред (в том числе для задач вихретоковой дефектоскопии).

Ранее были выведены и исследованы интегро-дифференциальные уравнения для неферромагнитного проводника с объемным дефектом [1–3]. Но в этих уравнениях не была использована квазистационарность, типичная для вихретоковых методов неразрушающего контроля. Для квазистационарного электромагнитного поля в неферромагнитных проводящих телах тоже были получены интегро-дифференциальные уравнения, но применительно к случаям бездефектных проводников [4, 5]. Однако в контексте вихретоковой дефектоскопии немалый интерес представляет случай неоднородного проводника с объемным дефектом-полостью – в представленной работе получена соответствующая система интегро-дифференциальных уравнений.

Вывод интегро-дифференциальных уравнений

Предположим, что проводящее тело с полостью занимает ограниченную область Ω в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$; введем обозначение $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Полость занимает область Ω_1, замыкание которой включается в Ω: $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Сторонний ток протекает только в ограниченной области T; замыкания Ω и T не пересекаются: $\bar{\Omega} \cap \bar{T} = \varnothing$. Будем считать, что $\partial\Omega$, $\partial\Omega_1$ и ∂T являются поверхностями Ляпунова (символ ∂ для множества обозначает его границу). Кроме того, предположим, что $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ гомеоморфны сфере; из этого, в частности, следует, что Ω и Ω_1 объемно и поверхностно односвязны. ∂T гомеоморфна тору; из этого вытекает, что T объемна, но не поверхностно однозвязна (см. рисунок).



Проводящее тело с объемным дефектом и сторонний ток

Удельная электропроводность γ проводящей подобласти $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ не зависит от времени t. Как функция пространственных координат $\mathrm{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\gamma(\mathrm{r})$ равномерно непрерывна в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ вместе со своими первыми производными. Кроме того, $\inf\limits_{\mathrm{r}\in\Omega/\bar{\Omega}_1} \gamma(\mathrm{r}) > 0$. В точках, внешних по отношению к проводящей подобласти $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, то есть в $\Omega_1 \cup \Omega_e$, $\gamma(\mathrm{r}) \equiv 0$ и диэлектрическая проницаемость равна 1. Рассматриваются исключительно немагнитные среды, поэтому магнитная проницаемость равна 1 во всем пространстве. Относительно плотности стороннего тока $\mathrm{J}(\mathrm{r},t)$ будем предполагать, что это непрерывно дифференцируемая векторная функция $t \in [0;+\infty)$ и $\mathrm{r} \in \bar{T}$. Кроме того, $\operatorname{div} \mathrm{J} \equiv 0$ и $J_n\big|_{\partial T} = 0$, где индекс n обозначает нормальную компоненту.

Заметим, что при отсутствии проводника в области Ω квазистационарное электромагнитное поле определялось бы по известным формулам через объемный векторный потенциал от заданного источника $\mathrm{J}(\mathrm{r},t)$; такое поле называется первичным [5]. Напряженность первичного электрического поля E_0 непрерывно дифференцируема по пространственным координатам при $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^3$. Напряженность первичного магнитного поля H_0 непрерывна при $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^3$, но ее производные терпят разрыв на ∂T. Появление проводника в области Ω равносильно появлению вторичных источников в $\bar{\Omega}$, что не должно сказаться на непрерывности и гладкости итоговых напряженностей в Ω_e. Поэтому при постановке задачи от напряженности электрического поля E и напряженности магнитного поля H при $\mathrm{r} \in \Omega_e$ мы будем требовать наличие тех же свойств непрерывности и дифференцируемости.

Кроме того, E и H должны быть непрерывно дифференцируемыми векторными функциями пространственных координат при $\mathrm{r} \in \Omega_1$ и $\mathrm{r} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, а также должны быть непрерывным образом продолжаемыми на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ с каждой стороны поверхности (хотя при переходе через поверхности раздела сред могут быть разрывы). Кроме того, E и H непрерывно дифференцируемы по времени. То есть речь идет о классическом решении.

В квазистационарном случае, за пределами проводящей подобласти [4]:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathrm{E} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu_0 \dot{\mathrm{H}} \\ \operatorname{rot} \mathrm{H} = \mathrm{J}(\mathrm{r},t),\ \mathrm{r} \in T \\ \operatorname{rot} \mathrm{H} = 0,\ \mathrm{r} \in \Omega_1 \cup \Omega_e \setminus \bar{T} \end{cases}, \tag{1}$$

где μ_0 – магнитная постоянная; точка над функцией обозначает ее дифференцирование по времени.

В проводящей подобласти ($\mathrm{r} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$) нет необходимости в уравнении с дивергенцией, потому что выводы для $\operatorname{div} \mathrm{E}$ непосредственно вытекают из уравнений с роторами [4]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathrm{E} = -\mu_0 \dot{\mathrm{H}} \\ \operatorname{rot} \mathrm{H} = \gamma(\mathrm{r}) \mathrm{E} \end{cases}. \tag{2}$$

E и H на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ должны удовлетворять следующим условиям сопряжения [4]:

$$\begin{cases} \mathrm{E}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathrm{E}_{\tau,ext} \\ \mathrm{H}_{\tau,\mathrm{int}} = \mathrm{H}_{\tau,ext} \end{cases}, \tag{3}$$

где индекс τ обозначает касательную компоненту вектора; индексы «int» и «ext» обозначают предельное значение соответственно изнутри и снаружи области.

Также E должна удовлетворять следующему интегральному условию на $\partial\Omega$ [4]:

$$\int\limits_{\partial\Omega} E_{n,ext} dS = 0, \tag{4}$$

где dS – элемент площади поверхности.

Кроме того, E и H должны удовлетворять следующим предельным условиям на бесконечности:

$$\begin{cases} \mathrm{E} = O\left(1/r^2\right), \ r \to +\infty \\ \mathrm{H} = O\left(1/r^2\right), \ r \to +\infty \end{cases}, \tag{5}$$

где $r = |\mathrm{r}|$.

Также в постановке задачи должны фигурировать начальные условия для H:

$$\mathrm{H}(\mathrm{r}, 0) = \mathrm{h}(\mathrm{r}). \tag{6}$$

Вектор начальной напряженности электромагнитного поля $\mathrm{h}(\mathrm{r})$ из физических соображений должен удовлетворять условию соленоидальности: $\operatorname{div} \mathrm{h}(\mathrm{r}) = 0$; тогда из уравнений (1) и (2) вытекает, что при всех $t \in [0; +\infty)$ $\operatorname{div} \mathrm{H}(\mathrm{r}, t) \equiv 0$ [4].

Решение начально-краевой задачи (1)–(6) – единственное, что доказывается теми же методами, которые были использованы ранее для случая однородного бездефектного проводника [4] (здесь следует обратить внимание на важную роль степеней r в условиях (5)). Кроме того, из (1)–(6) вытекают следующие равенства для H в $\mathbb{R}^3$ и E в $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ [6]:

$$\mathrm{H}(\mathrm{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot} \left[\int\limits_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{\gamma(\mathrm{r}') \mathrm{E}(\mathrm{r}', t)}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dV' + \int\limits_T \frac{\mathrm{J}(\mathrm{r}', t)}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dV' \right], \tag{7}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{\gamma(\mathrm{r}') \dot{\mathrm{E}}(\mathrm{r}', t)}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_T \frac{\dot{\mathrm{J}}(\mathrm{r}', t)}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int\limits_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{r}', t) \operatorname{grad} \gamma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'| \gamma(\mathrm{r}')} dV' -$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{grad} \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\sigma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{grad} \oint\limits_{\partial\Omega_1} \frac{\sigma_1(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r} - \mathrm{r}'|} dS', \tag{8}$$

где dV – элемент объема; штрих указывает на переменную, по которой производится интегрирование; ε_0 – диэлектрическая постоянная; σ и σ_1 – поверхностная плотность вторичных источников, соответственно, на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$. Заметим, что слагаемые в (7) и (8), содержащие интегралы от J, определяют напряженности первичного поля H_0 и E_0 соответственно. Также заметим, что в силу (7) H, по существу, является исключенной неизвестной: H выражается через E. А систему уравнений следует решать для E, σ и σ_1.

Уравнения для σ и σ_1 можно вывести, исходя из граничных условий [4], которые, как следствие, вытекают из (1)–(3): $\mathrm{n}\mathrm{E}_{\mathrm{int}} = 0$ и $\mathrm{n}_1 \mathrm{E}_{ext} = 0$, где n и n_1 – внешние единичные нормали соответственно для $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ (см. рисунок). В силу формул для предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя [6]:

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\gamma(\mathrm{r}')\mathrm{n}(\mathrm{r})\dot{\mathrm{E}}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV'+\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{T}\frac{\mathrm{n}(\mathrm{r})\dot{\mathrm{J}}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV'+\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1}\frac{\mathrm{E}(\mathrm{r}',t)\operatorname{grad}\gamma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3\gamma(\mathrm{r}')}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}(\mathrm{r})dV'-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}(\mathrm{r})dS'-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\sigma_1(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}(\mathrm{r})dS'+\sigma(\mathrm{r})=0,\ \mathrm{r}\in\partial\Omega\,; \quad (9)$$

$$\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\frac{\gamma(\mathrm{r}')\mathrm{n}_1(\mathrm{r})\dot{\mathrm{E}}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV'+\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{T}\frac{\mathrm{n}_1(\mathrm{r})\dot{\mathrm{J}}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV'+\frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int\limits_{\Omega\setminus\bar{\Omega}_1}\frac{\mathrm{E}(\mathrm{r}',t)\operatorname{grad}\gamma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3\gamma(\mathrm{r}')}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}_1(\mathrm{r})dV'-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}_1(\mathrm{r})dS'-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega_1}\frac{\sigma_1(\mathrm{r}')}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|^3}(\mathrm{r}-\mathrm{r}')\mathrm{n}_1(\mathrm{r})dS'-\sigma_1(\mathrm{r})=0,\ \mathrm{r}\in\partial\Omega_1. \quad (10)$$

В знаках (9) и (10) учтено, что для $\partial\Omega$ речь идет о пределе изнутри, а для $\partial\Omega_1$ – снаружи. В отличие от ранее полученных уравнений для немагнитных бездефектных проводников [4, 5], в (8)–(10) совокупно учтены неоднородность и дефектность (присутствуют соответствующие объемные и поверхностные вторичные источники), и одновременно с этим исключена H, что, очевидно, упрощает решение. Непосредственным дифференцированием, с использованием свойств объемных и поверхностных потенциалов, доказывается, что решение (7)–(10) удовлетворяет не только уравнениям (2) при $\mathrm{r}\in\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$, но также уравнениям (1) при $\mathrm{r}\notin\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$ и граничным условиям (3).

Условие (4) для nE_{ext} равносильно следующему:

$$\int\limits_{\partial\Omega}\sigma dS=0\,. \quad (11)$$

У σ и σ_1 есть конкретный физический смысл: это поверхностные плотности зарядов, индуцируемых на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ соответственно (делитель $4\pi\varepsilon_0$ в (8) делает это соответствие не пропорциональным, а буквальным). Таким образом, условие (4) – это условие электронейтральности внешней поверхности проводника $\partial\Omega$ (заметим, что для $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$ и для $\partial\Omega_1$ электронейтральность следует из самих уравнений и граничных условий, так что ее не нужно отдельно требовать). Уравнения (8) и (9) сами по себе содержат неоднозначность, связанную с σ [7]: к σ можно прибавить любое равновесное распределение зарядов на $\partial\Omega$ – условие (11) эту неоднозначность устраняет.

Из (2) и (6) следуют начальные условия для E в $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$:

$$\mathrm{E}(\mathrm{r},0)=\frac{1}{\gamma(\mathrm{r})}\operatorname{rot}\mathrm{h}(\mathrm{r})\,. \quad (12)$$

Уравнения (8)–(10) удобны тем, что их достаточно решить для $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$, $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ при условиях (11) и (12): тогда E в Ω_1 и Ω_e определяется из (8) прямым интегрированием (можно найти E, например, на каком-либо измерительном контуре в Ω_e). Так как $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_1$ являются поверхностями Ляпунова, на (8)–(10) распространяются все основные теоремы, касающиеся интегральных уравнений со слабой особенностью [7]. H можно найти прямым интегрированием в (7).

Заметим, что выражение (8) для E содержит не только производные от объемных потенциалов и потенциалов простого слоя, но и непродифференцированные объемные потенциалы (первая пара слагаемых в правой части). В общем случае при $r\to+\infty$ для объемного потенциала гарантирована асимптотика $O(1/r)$, но не $O(1/r^2)$. Покажем, что тем не менее условие (5) для (8) выполняется (в ранее рассмотренных случаях бездефектных проводников [4, 5] этому внимание не уделялось).

По условию J как функция пространственных координат имеет нулевую дивергенцию в T и нулевую нормальную составляющую на границе T; очевидно, такими же свойствами обладает

$\dot{\mathrm{J}}$. $\gamma\mathrm{E}$ и $\gamma\dot{\mathrm{E}}$ обладают аналогичными свойствами в $\Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Для неодносвязных областей с гладкими границами, гомеоморфными сфере или тору, доказано, что любое такое поле представимо в виде $\mathrm{rot}\,\mathrm{w}$, где $\mathrm{div}\,\mathrm{w}=0$ и на границе области $\mathrm{w}_\tau=0$ [8]. Преобразуем интеграл из второго слагаемого в правой части (8) (для первого слагаемого преобразования выполняются аналогично):

$$\int_T \frac{\dot{\mathrm{J}}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV' = \int_T \frac{\mathrm{rot}_{\mathrm{r}'}\,\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV' = \int_T \mathrm{rot}_{\mathrm{r}'}\left(\frac{\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}\right)dV' - \int_T\left[\mathrm{grad}_{\mathrm{r}'}\left(\frac{1}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}\right)\times\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)\right]dV' =$$

$$= \oint_{\partial T}\frac{\left[\mathrm{n}_T(\mathrm{r})\times\mathrm{w}_\tau(\mathrm{r}',t)\right]}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dS' + \int_T\left[\mathrm{grad}_{\mathrm{r}}\left(\frac{1}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}\right)\times\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)\right]dV' = \int_T \mathrm{rot}_{\mathrm{r}}\left(\frac{\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}\right)dV' = \mathrm{rot}\int_T\frac{\mathrm{w}(\mathrm{r}',t)}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}'|}dV',$$

где индекс у дифференциальной операции указывает на переменную, по которой происходит дифференцирование; n_T – внешняя единичная нормаль к T. Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть представлен, как ротор от объемного потенциала, и тогда асимптотика $O(1/r^2)$ гарантирована.

Заключение

Несомненную актуальность представляет обобщение полученных результатов, во-первых, на ферромагнитные проводники и, во-вторых, на проводящие тела с негладкими границами (с возможным переопределением функциональных классов, в которых ставится задача, с отказом от классического решения и переходом к решению обобщенному). Это станет предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Дякин, В.В. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле / В.В. Дякин, В.А. Сандовский. – Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. – 389 с.

2. Марвин, С.В. Существование и единственность решения начально-краевой задачи для однородной системы уравнений Максвелла в случае неферромагнитного дефектного металлического тела / С.В. Марвин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2016. – № 1. – С. 105–117.

3. Марвин, С.В. Начально-краевая задача структуроскопии неферромагнитного металлического тела с инородными диэлектрическими включениями остаточным полем мгновенно выключенного стороннего тока / С.В. Марвин // Дефектоскопия. – 2016. – № 2. – С. 42–54.

4. Тозони, О.В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / О.В. Тозони, И.Д. Маергойз. – Киев: Техника, 1974. – 352 с.

5. Тозони, О.В. Метод вторичных источников в электротехнике / О.В. Тозони. – М.: Энергия, 1975. – 295 с.

6. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н.Е. Кочин. – М.: Наука, 1965. – 426 с.

7. Гюнтер, Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 416 с.

8. Быховский, Э.Б. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / Э.Б. Быховский, Н.В. Смирнов // Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости: сборник работ, Тр. МИАН СССР. – 1960. – Т. 59. – М.–Л.: Изд-во АН СССР. – С. 5–36.

Поступила в редакцию 9 февраля 2024 г.

Сведения об авторе

Марвин Сергей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент департамента информационных технологий и автоматики, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: s.v.marvin@yandex.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2024, vol. 16, no. 3, pp. 38–44

DOI: 10.14529/mmph240306

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR A QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD IN A NONMAGNETIC CONDUCTIVE BODY WITH A DEFECT

S.V. Marvin
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation
E-mail: s.v.marvin@yandex.ru

Abstract. The initial-boundary value problem (IBVP) for the system of Maxwell’s equations for a quasi-stationary approximation is considered in relation to a non-ferromagnetic conductive body in the field of an external current. It is assumed, that the body is not homogeneous in its conductive properties and includes a volume defect in the form of a cavity (a non-conductive subdomain). The IBVP is considered in the classical formulation: the tensions of the electric and magnetic fields are supposed to be continuously derivatively outside the boundary between conductive and non-conductive domains, and continuous at the boundaries of these domains; in this case, the boundaries of the domains are Lyapunov surfaces. On these surfaces, the usual boundary conditions for the tensions of electric and magnetic field must be satisfied: their tangential components are continuous. In addition, tensions decrease quickly at infinity. Based on these assumptions, integro-differential equations for the tensions of electric and magnetic field are derived. These equations take into account the inhomogeneity of the conductor and the presence of the internal defect. The equivalence of the integro-differential equations and the IBVP for the system of Maxwell’s equations is proved for the electromagnetic field inside and outside the conductor.

Keywords: initial-boundary value problem; Maxwell’s equations; quasi-stationary approximation; volume potential; simple layer potential.

References

1. Dyakin V.V., Sandovskiy V.A. *Zadachi elektrodinamiki v nerazrushayushchem kontrole* (Electrodynamics Problems in the Nondestructive Testing). Ekaterinburg, IFM UrO RAN Publ., 2008, 389 p. (in Russ.).

2. Marvin S.V. Existence and the Uniqueness of Solution of Initial-Boundary Problem for the Uniform System of Equations of Maxwell in the Case of Nonferromagnetic Defective Metallic Body. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 105–117. (in Russ.).

3. Marvin S.V. An Initial-boundary Value Problem of Structurescopy of a Nonferromagnetic Metal Solid with Foreign Dielectric Inclusions using the Residual Field of an Instantaneously Cut-off Extraneous Current. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2016, Vol. 52, no. 2, pp. 85–94. DOI: 10.1134/S1061830916020054

4. Tozoni O.V., Maergoyz I.D. *Raschet trekhmernykh elektromagnitnykh poley* (Calculation of Three-Dimensional Electromagnetic Fields). Kiev, Tekhnika Publ., 1974, 352 p. (in Russ).

5. Tozoni O.V. *Metod vtorichnykh istochnikov v elektrotekhnike* (Secondary Sources Method in the Electrical Engineering). Moscow, Energiya Publ., 1975, 295 p. (in Russ).

6. Kochin N.E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* (The Vector Calculus and Basics of the Tensor Calculus). Moscow, Nauka Publ., 1965, 426 p. (in Russ).

7. Gyunter N.M. Teoriya potentsiala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki (The Theory of Potential and it’s Applications in Problems of the Mathematical Physics). Moscow, GITTL Publ., 1953, 416 p. (in Russ).

8. Bykhovskiy E.B., Smirnov N.V. Ob ortogonal'nom razlozhenii prostranstva vektor-funktsiy, kvadratichno summiruemykh po zadannoy oblasti, i operatorakh vektornogo analiza (About Vector-Functions Space Orthogonal Decomposition, which Quadratically Summed in a Specified Domain, and

the Vector Analysis Operators). Matematicheskie voprosy gidrodinamiki i magnitnoy gidrodinamiki dlya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti: sbornik rabot, Tr. MIAN SSSR, 1960, Vol. 59, Moscow, Leningrad: Izd-vo AN SSSR Publ., pp. 5–36. (in Russ.).

Received February 9, 2024

Information about the author

Marvin Sergey Vladimirovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technologies and Automation, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: s.v.marvin@yandex.ru.