УДК 517.642.8 DOI: 10.14529/mmph240404

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ЗАДАННОГО НА ГРАФЕ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ

С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова
Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова,
г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: sikadchenko@mail.ru

Аннотация. Разработаны алгоритмы вычисления значений собственных чисел начально-краевых задач для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе-звезда с изменяющими во времени длинами ребер. С помощью замены переменных удалось свести рассматриваемые спектральные задачи к начально-краевым задачам с неподвижными ребрами. При этом были получены формулы, позволяющие находить собственные числа для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе-звезда с изменяющими во времени ребрами с любыми порядковыми номерами. Полученные в работе формулы вычисления собственных чисел позволят разработать алгоритмы решения обратных спектральных задач, заданных на квантовых графах с изменяющимися ребрами.

Ключевые слова: графы; собственные числа и собственные функции; дискретные и самосопряженные операторы; метод регуляризованных следов; метод Галеркина.

Введение

В работе разработаны методы нахождения собственных чисел начально-краевых задач для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе-звезда с переменными ребрами. При моделировании многих природных явлений и процессов возникает необходимость нахождения собственных чисел дифференциальных операторов в частных производных. Поэтому есть потребность разработки вычислительно эффективных алгоритмов их нахождения. В статье методика численного решения спектральных задач, заданных на квантовых графах с постоянными ребрами, описанными в статьях [1–4], применена для спектральных задач на квантовых графах с изменяющимися во времени длинами ребер. Построенный метод позволит распространить ранее полученную методику решения обратных спектральных задач на графах с неподвижными ребрами на графы с изменяющимися ребрами [5].

Рассмотрим некоторые необходимые нам в дальнейшем определения и понятия. Пусть задан конечный ориентированный граф-звезда $G = G(V, E)$ имеющий j_0 ребер и $j_0 + 1$ вершин. Через $E = (E_1, E_2, \ldots, E_{j_0})$ обозначим множество ребер графа G, а через $V = V(V_i)_{i=1}^{j_0}$ – множество его вершин. Нас будут интересовать два вида графа G: граф G_0, у которого длины ребер L_j постоянные и равны l_j; граф G_t, у которого длины ребер изменяются во времени по законам

$$L_j(t) = l_j L(t), \quad l_j \in R_+, \quad j = \overline{1, j_0}. \tag{1}$$

Здесь $L(t)$ – дважды дифференцированная функция такая, что все ребра E графа G_t всегда остаются положительными. Введем два вида пространства функций: $L^2(G)$ – пространство суммируемых с квадратом вектор-функций заданных на графе G со скалярной произведением

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} u_j(y_j) v_j(y_j) dy_j, \quad u = \left(u_1(y_1), u_2(y_2), \ldots, u_{j_0}(y_{j_0})\right), \quad y_j \in \left(0, l_j\right), \quad j = \overline{1, j_0};$$

$L^{2,1}(\Gamma)$ – пространство вектор-функций f из $\Gamma = G \times (0, t)$ со скалярным произведением

$$(f, w) = \int_0^t \sum_{j=1}^{j_0} \int_0^{l_j} f_j(x_j, \tau) w_j(x_j, \tau) dx_j d\tau, \; f = (f_1(x_1, t), f_2(x_2, t), \ldots, f_{j_0}(x_{j_0}, t)), \; x_j \in (0, L_j(t)), \; j = \overline{1, j_0}.$$

На графе G_0 рассмотрим прямую спектральную задачу для вектор-оператора $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_{j_0}\right)$

$$S\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dy^2},\ \varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{j_0}\right),\ y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_{j_0}\right),\ j = \overline{1, j_0}$$

с областью определения $D_s = L^2\left(G_0\right)$. Нас будут интересовать собственные числа λ_n и собственные вектор-функции φ_n вектор-оператора S. Используя краевые задачи

$$-\frac{d^2\varphi_j}{dy_j^2} = \lambda\varphi_j,\ y_j \in \left(0, l_j\right),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{2}$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_{j_0}(0) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_1\left(l_1\right) = \varphi_2\left(l_2\right) = \ldots = \varphi_{j_0}\left(l_{j_0}\right), \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{d\varphi_j}{dy_j}\left(l_j\right) = 0 \tag{5}$$

нетрудно показать, что собственные числа λ_n краевых задач являются корнями трансцендентного уравнения

$$\sum_{j=1}^{j_0} \operatorname{ctg}\left(\lambda l_j\right) = 0, \tag{6}$$

а соответствующие компоненты собственных вектор-функций φ_n имеют вид

$$\varphi_{jn} = \frac{B_{jn}}{\sin(\lambda_n l_j)}\cos(\lambda_n y_j),\ B_{jn} = \sqrt{2 \Big/ \sum_{j=1}^{j_0} \frac{l_j - \sin(2\lambda_n l_j)/(2\lambda_n)}{\sin^2(\lambda_n l_j)}},\ j = \overline{1, j_0}. \tag{7}$$

При этом система вектор-функций $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормированная на $L^2\left(G_0\right)$. Кроме того, используя теоремы 7, 8, доказанные в статье [6], можно показать, что система функций $\left\{\varphi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом пространства $L^2\left(G_0\right)$.

Далее на графе G_0 с ребрами постоянной длины l_j, введем вектор-оператор $M = \left(M_1, M_2, \ldots, M_{j_0}\right)$ [7, 8]

$$M\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2},\quad \omega = \left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{j_0}\right),\quad y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_{j_0}\right),\quad j = \overline{1, j_0} \tag{8}$$

с областью определения $D_M = L^{2,1}(\Gamma)$, где функции $\omega_j\left(y_j, t\right) \in L^{2,1}\left(0, l_j\right) \times (0, t)$. На ребрах графа G_0 найдем решение следующих начально-краевые задач

$$\frac{\partial^2\omega_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\omega_j}{\partial y_j^2} = 0,\quad \omega_j = \omega_j\left(y_j, t\right),\quad j = \overline{1, j_0}, \tag{9}$$

$$\omega_1(0,t) = \omega_2(0,t) = \ldots = \omega_{j_0}(0,t) = 0, \tag{10}$$

$$\omega_1\left(l_1, t\right) = \omega_2\left(l_2, t\right) = \ldots = \omega_{j_0}\left(l_{j_0}, t\right), \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \left.\frac{\partial\omega_j}{\partial y_j}\right|_{y=l_j} = 0, \tag{12}$$

$$\omega_j\left(y_j, 0\right) = \zeta\left(y_j\right),\ \left.\frac{\partial\omega_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \xi\left(y_j\right). \tag{13}$$

Граничные условия (10) определяют условие Дирихле на крайних вершинах графа G_0, а (11) и (12) – условия непрерывности и Кирхгофа. Условия (13) являются начальными. Используя метод разделения переменных для (9)–(12), найдем все функции, которые удовлетворяют уравнениям (9) и граничным условиям (10)–(12)

$$\omega_{jn}\left(y_j,t\right)=\left[a_n\cos\left(\lambda_n t\right)+b_n\sin\left(\lambda_n t\right)\right]\varphi_{jn}\left(y_j\right). \tag{14}$$

Составим функциональные ряды

$$\omega_j\left(y_j,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\lambda_n t\right)+b_n\sin\left(\lambda_n t\right)\right]\varphi_{jn}\left(y_j\right), \quad j=\overline{1,j_0}. \tag{15}$$

Коэффициенты a_n и b_n найдем, используя начальные условия (12) и (13)

$$a_n=\sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j}\varsigma\left(y_j\right)\varphi_{jn}\left(y_j\right)dy_j,\ b_n=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j}\xi\left(y_j\right)\varphi_{jn}\left(y_j\right)dy_j. \tag{16}$$

Таким образом, найдено решение начально-краевой $M\,\omega=0$ с начально-краевыми условиями (10)–(13).

Нахождение собственных чисел

В данном разделе опишем методику вычисления приближенных значений собственных чисел для вектор-оператора $F=\left(F_1,F_2,\ldots,F_{j_0}\right)$:

$$F\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad \psi=\left(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{j_0}\right), \quad x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{j_0}\right), \quad j=\overline{1,j_0} \tag{17}$$

с областью определения $L^{2,1}\left(G_t\right)$. Для того чтобы найти собственные числа μ, рассмотрим начально-краевые задачи, заданные на подвижных ребрах графа G_t:

$$\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_j^2}=\mu\,\psi_j, \quad \psi_j=\psi_j\left(x_j,t\right), \quad x_j=\left(0,L_j\left(t\right)\right), \quad j=\overline{1,j_0}, \tag{18}$$

$$\psi_1(0,t)=\psi_2(0,t)=\ldots=\psi_{j_0}(0,t)=0, \tag{19}$$

$$\psi_1(L_1(t),t)=\psi_2(L_2(t),t)=\ldots=\psi_{j_0}(L_{j_0}(t),t), \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0}\left.\frac{\partial\psi_j}{\partial x_j}\right|_{x=L_j(t)}=0, \tag{21}$$

$$\psi_j\left(x_j,0\right)=\zeta\left(x_j\right),\ \left.\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\right|_{t=0}=\xi\left(x_j\right). \tag{22}$$

При записи граничных условий (19)–(21) учитывалось, что центр графа G_t фиксирован, а крайние его вершины движутся.

Для того, чтобы найти решение начально-краевых задач (18)–(22), заданных на G_t с подвижными ребрами, мы воспользуемся полученным решением задач (9)–(13), заданных на неподвижных ребрах. Для этого, сделав замену переменных

$$y_j=x_j/L(t),\ \ t_1=t \tag{23}$$

в начально краевых задачах (18)–(22), перейдем к соответствующим задачам для графа G_t с постоянными ребрами [7–9]. В результате преобразований получим следующие начально-краевые задачи на графе-звезда с постоянными ребрами:

$$\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2}+\frac{\dot{L}^2(t)y_j^2-1}{L^2(t)}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial y_j^2}-2\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}y_j\frac{\partial^2\psi_j}{\partial y_j\partial t}+\frac{2\dot{L}^2(t)-L(t)\ddot{L}(t)}{L^2(t)}y_j\frac{\partial\psi_j}{\partial y_j}=\mu\psi_j,\psi_j=\psi_j(y_j,t),\ 0<y_j<l_j, \tag{24}$$

$$\psi_1(0,t)=\psi_2(0,t)=\ldots=\psi_{j_0}(0,t)=0, \tag{25}$$

$$\psi_1(l_1,t)=\psi_2(l_2,t)=\ldots=\psi_{j_0}(l_{j_0},t), \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j}\bigg|_{x=l_j} = 0, \tag{27}$$

$$\psi_j\left(y_j,0\right)=\zeta\left(y_j\right),\ \frac{\partial \psi_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \xi\left(y_j\right). \tag{28}$$

Функции $\psi_j\left(y_j,t\right)$ для задач (24)–(28) удовлетворяют граничным условиям с постоянными ребрами. Поэтому после замены переменных начально-краевая задача (18)–(22) для графа G_t с изменяющимися ребрами свелась к задаче с постоянными ребрами.

Составим из рассмотренного ранее вектор-функции $\omega=\left(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{j_0}\right)$ следующую систему $\left\{\omega_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ с компонентами

$$\left\{\omega_{jn}\left(y_j,t\right)=\left[a_n\cos\left(\lambda_n t\right)+b_n\sin\left(\lambda_n t\right)\right]\varphi_{jn}\left(y_j\right)\right\}_{j=1}^{\infty}, \tag{29}$$

которые ортогональны в пространстве $L^{2,1}\left(G_t\right)$ за счет функций $\varphi_{jn}\left(y_j\right)$. Нормализируем систему функций (29). Для этого вычислим интегралы

$$\int_0^t \sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j}\omega_{jn}^2\left(y_j,\tau\right)dy_j d\tau=\int_0^t\left[a_n\cos\left(\lambda_n\tau\right)+b_n\sin\left(\lambda_n\tau\right)\right]^2 d\tau\sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j}\varphi_{jn}^2\left(y_j\right)dy_j=$$

$$=\int_0^t\left[a_n\cos(\lambda_n\tau)+b_n\sin(\lambda_n\tau)\right]^2 d\tau=\left[a_n b_n\sin^2(\lambda_n t)+0,25(a_n^2-b_n^2)\sin(2\lambda_n t)+0,5(a_n^2+b_n^2)\lambda_n t\right]/\lambda_n=A_n.$$

Тогда функции $\tilde{\omega}_n=\frac{1}{\sqrt{A_n}}\omega_n$ будут образовывать ортонормированную систему $\left\{\tilde{\omega}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L^{2,1}\left(G_t\right)$.

В работах [1–4] разработана методика вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, позволяющая находить необходимые значения собственных чисел спектральной задачи

$$Uu=\mu u,\quad Gu\big|_{\Gamma}=0 \tag{30}$$

используя теорему.

Теорема. Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ задачи (30) находятся по линейным формулам

$$\tilde{\mu}_n=\left(U\nu_n,\nu_n\right)+\tilde{\delta}_n,\ n\in N,\ \lim_{n\to\infty}|\tilde{\delta}_n|=0, \tag{31}$$

где $\tilde{\delta}_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\tilde{\mu}_k\left(n-1\right)-\tilde{\mu}_k\left(n\right)\right]$; $\tilde{\mu}_k\left(n\right)$ – n-е приближение по Галеркину к соответствующим значениям μ_k спектральной задачи (30); функции ν_k образуют ортонормированные базисы пространств $H_n\subseteq H$, удовлетворяющие граничным условиям (30); U – дискретный полуограниченный дифференциальный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H.

Для нахождения формул, по которым можно вычислять собственные значения вектор-оператора F, воспользуемся вышеприведенной теоремой. В результате получим

$$\tilde{\mu}_n\left(t\right)=\int_0^t\int_{G_t}F\left(\tilde{\omega}_n\left(y,\tau\right)\right)\tilde{\omega}_n\left(y,\tau\right)dy\,d\tau=\int_0^t\sum_{j=1}^{j_0}\int_0^{l_j}\Big[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\tilde{\omega}_{jn}\left(y_j,\tau\right)+\frac{\dot{L}\left(\tau\right)y_j^2-1}{L^2\left(\tau\right)}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\tilde{\omega}_{jn}\left(y_j,\tau\right)$$

$$-2\frac{\dot{L}\left(\tau\right)}{L\left(\tau\right)}y_j\frac{\partial^2\tilde{\omega}_{jn}\left(y_j,\tau\right)}{\partial y_j\partial\tau}+\frac{2\dot{L}^2\left(\tau\right)-L\left(\tau\right)\ddot{L}\left(\tau\right)}{L^2\left(\tau\right)}y_j\frac{\partial\tilde{\omega}_{jn}\left(y_j,\tau\right)}{\partial y_j}\Big]\tilde{\omega}_{jn}\left(y_j,\tau\right)dy_j d\tau+\tilde{\delta}_n\left(t\right),\ n\in N. \tag{32}$$

Используя формулы (32), можно вычислить значения собственных чисел вектор-оператора F, заданного на графе G_t с изменяющимися во времени длинами ребер, в необходимый момент времени и необходимого порядка.

Литература

1. Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no. 7. – P. 323–329.

2. Кадченко, С.И. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского Университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6(97). – С. 13–21.

3. Кадченко, С.И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С.И. Кадченко, И.И. Кинзина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, № 7. – С. 1265–1273.

4. Алгоритмы вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах / С.И. Кадченко, А.В. Ставцова, Л.С. Рязанова, В.В. Дубровский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2023. – Т. 15, № 1. – С. 16–25.

5. Кадченко, С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными возмущенными операторами, методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. – 2013. – № 6(107). – С. 23–30.

6. Провоторов, В.В. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 10. – pp. 105–126.

7. Keating, J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs / J.P. Keating // Quantum Graphs and Their Applications. Contemporary Mathematics. – 2006. – Vol. 415. – P. 191–200.

8. Time-Dependent Quantum Graph / D.U. Matrasulov, J.R. Yusupov, K.K. Sabirov, Z.A. Sobirov // Наносистемы: физика, химия, математика. – 2015. – Том 6, Вып. 2. – С. 173–181.

9. Никифоров, Д.С. Модель квантовых графов с ребрами меняющейся длины: дис....канд. тех. наук / Д.С. Никифоров. – СПб, 2018. – 125 с.

Поступила в редакцию 8 октября 2024 г.

Сведения об авторах

Кадченко Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: sikadchenko@mail.ru.

Рязанова Любовь Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: ryazanovals23@gmail.com.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 4, pp. 29–34

DOI: 10.14529/mmph240404

ALGORITHMS FOR CALCULATING THE EIGENVALUES OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A WAVE DIFFERENTIAL EQUATION SET IN A GRAPH WITH VARYING EDGES

S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sikadchenko@mail.ru

Abstract. The paper develops algorithms for calculating the eigenvalues of initial-boundary value problems for a wave differential equation set in a star graph with time-varying edge lengths. The change of variables helped to reduce the considered spectral problems to initial-boundary value problems with fixed edges. The obtained formulas were used to find eigenvalues for a wave differential equation set in a star graph with time-varying edges with any ordinal numbers. The formulas for calculating the eigenvalues will allow developing algorithms for solving inverse spectral problems set in quantum graphs with varying edges.

Keywords: graphs; eigenvalues and eigenfunctions; discrete and self-conjugate operators; regularized trace method; Galerkin method.

References

1. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, Vol. 10, no. 7, pp. 323–329. DOI: 10.12988/ams.2016.510625

2. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik SSU*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21.

3. Kadchenko S.I., Kinzina I.I. Computation of Eigenvalues of Perturbed Discrete Semibounded Operators. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, Vol. 46, Iss. 7, pp. 1200–1206. DOI: 10.1134/S0965542506070116

4. Kadchenko S.I., Stavtceva A.V., Ryazanova L.S., Dubrovskii V.V. Algorithms for the Computation of the Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Graphs. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2023, Vol. 15, no. 1, pp. 6–25. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph230102

5. Kadchenko S.I. Numerical Method for the Solution of Inverse Problems Generated by Perturbations of Self-Adjoint Operators by Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2013, no. 6(107), pp. 23–30. (in Russ.).

6. Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problem on a Star Graph. *Sbornik: Mathematics*, 2008, Vol. 199, Iss. 10, pp. 1523–1545. DOI: 10.1070/SM2008v199n10ABEH003971

7. Keating J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs. Quantum graphs and their applications. *Contemporary Mathematics*, 2006, Vol. 415, pp. 191–200. DOI:10.1090/conm/415/07869

8. Matrasulov D.U., Yusupov J.R., Sabirov K.K., Sobirov Z.A. Time-Dependent Quantum Graph. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2015, Vol. 6, Iss. 2, pp. 173–181. DOI: 10.17586/2220-8054-2015-6-2-173-181

9. Nikiforov D.S. *Model' kvantovykh grafov s rebrami menyayushcheysya dliny: dis....kand. tekh. nauk* (A Model of Quantum Graphs with Edges of Varying Length: cand. engineering sci. diss.). Saint-Petersburg, 2018, 125 p. (in Russ.).

Received October 8, 2024

Information about the authors

Kadchenko Sergey Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics and Informatics Department, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: sikadchenko@mail.ru.

Ryazanova Lyubov' Sergeevna is Cand. Sc. (Pedagogical), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: ryazanovals23@gmail.com.