УДК 004.94 DOI: 10.14529/mmph240409

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ УНИФИЦИРОВАННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ С НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ ПРИ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ЗНАНИЙ

А.В. Спесивцев, Б.В. Соколов
Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: sokolov_boris@inbox.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы нечеткого представления и манипулирования явными и неявными экспертными знаниями. Предложено использовать нечеткие числа, позволяющие осуществлять описание факторов неопределенности. Разработана новая форма задания симметризованных форм представления нечетких чисел, а также расширенные и дополнительные арифметические операции над ними, сохраняющие исходный уровень нечеткости знаний экспертов и упрощающие процесс их формализации при решении прикладных задач.

Ключевые слова: нечеткие числа; расширенные и дополнительные арифметические операции; имитационное моделирование; точность; достоверность; адекватность модели; сложная техническая система.

Введение

В настоящее время происходит широкое распространение процесса цифровизации, который является следующим и более эффективным этапом развития информационных технологий в различных предметных областях (ПрО). Одной из важных функций цифровизации является интеграция данных и информации, представленных в количественной форме и вербальной (неколичественной) информации для решения задач оценивания состояния сложных объектов. Понятие «сложные объекты» (СлО) обычно ассоциируется как «сложные технические объекты», но в широком смысле оно включает, как в данном исследовании, практически все изучаемые явления, технологии, системы и даже субъектов (людей) как интеллектуальных источников знаний.

В процессе эволюции человеческий мозг приобрел уникальные способности при решении сложных задач распознавания, прогнозирования и принятия решений, которые, в первую очередь, связаны с учетом факторов неопределенности (НЕ-факторов), имеющих объективную (субъективную), внешнюю (внутреннюю) природу. Использование таких природных способностей человека следует рассматривать как объективный способ преодоления проблем сложности, например, в научных исследованиях. Так, в различных областях науки и техники уже созрело понимание того, что сложность управления СлО можно преодолеть только с помощью равной или большей сложности управляющей системы [1]. При реализации этого принципа существенно возрастают требования к интеллектуализации управленческих систем, что вызывает необходимость более широкого использования явных и неявных экспертных знаний. При этом следует особо подчеркнуть особенность человеческого мозга, в котором база знаний и логический вывод на ее основе не разделяются, как это имеет место в компьютерах, что позволяет эксперту выступать в качестве высокоэффективной «интеллектуальной информационно-диагностической системы» [2]. Это обстоятельство подчеркивает важность и актуальность создания и повсеместного использования технологии формализации явных и неявных экспертных знаний.

Экспертная информация обычно требует особых методов извлечения, представления и формализации для последующего использования на компьютере. В этом отношении весьма перспективен нечетко-возможностный подход (НВП), который позволяет представлять экспертные знания аналитическими моделями для оценки состояния конкретного СлО [3]. Экспертные знания и опыт, как правило, описываются в лингвистической форме и формируются в процессе «мягких измерений и вычислений» [4], что приводит к широкомасштабной реализации на практике концепции «мягкой оценки» [5] при построении математических моделей управления и оценки состояния СлО.

Существенным компонентом представления экспертной оценки состояния СлО является лингвистическая переменная. При отображении любой части вектора состояния СлО через лингвистическую переменную устанавливается соответствие между лингвистическими и количественными шкалами, как показано на рис. 1. Эту операцию называют «арифметизацией» [3, 6].

Проведем краткое, но значимое объяснение необходимости процесса арифметизации рассматриваемых нечетко-возможностных процессов. В ходе проведения экспертизы часто требуется ранжировать объекты на основе измерения интенсивности проявления оцениваемого конкретного атрибута (параметра) его качества. Это подразумевает измерение в линейной ординальной шкале. Из теории шкал известно, что порядковые (ординальные) шкалы не предусматривают операции сложения (например, порядковые номера телефонов), что делает недопустимым применение общепринятых арифметических и статистических методов [6]. Для преобразования ординальных данных в числовую шкалу обычно используется дополнительная информация о градациях, позволяющая определить соответствие между пунктами шкалы и реальными числами. Самым удобным и наглядным способом арифметизации вербальных экспертных данных является построение лингвистической переменной изучаемого признака, как показано на рис. 1.

В соответствии с работой [3] зададим лингвистическую переменную следующим кортежем:

$$< S, T(S), X, M, G >$$

где S – имя лингвистической переменной; $T(S)$ – терм-множество лингвистической переменной S; X – базисное множество значений лингвистической переменной, при этом $T(S)$ представляет собой семейство нечетких подмножеств X; M – правила вычисления функции принадлежности; G – синтаксическое правило, порождающее множество всех значений S на $T(S)$.

Геометрический образ лингвистической переменной, принятой в НВП для построения нечетко-возможностной модели (НВМ) [7], приведен на рис. 1.

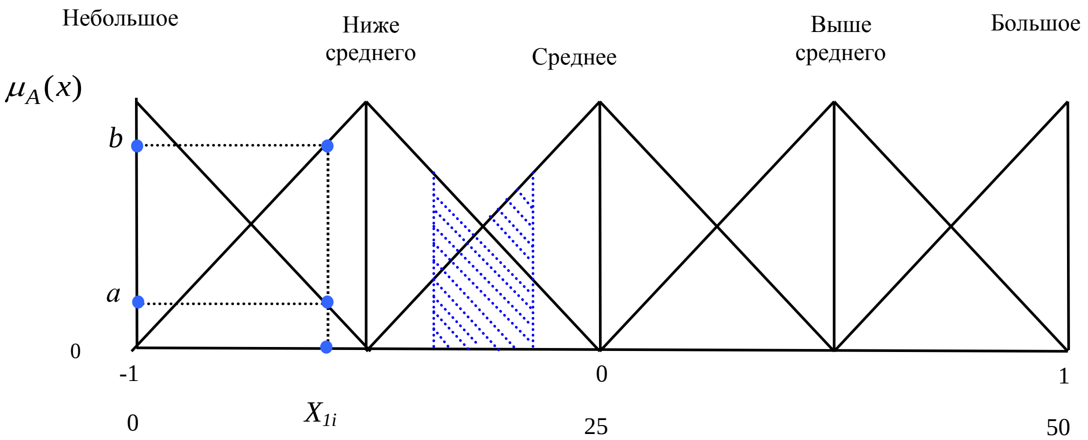

Рис. 1. X1 – время простоев оборудования в минутах как лингвистическая переменная

На рис. 1 по оси абсцисс расположены три шкалы. На первом уровне располагается шкала лингвистических переменных с модами «небольшое – большое», далее следует шкала в интервале [–1, +1] для задания безразмерных значений признаков; на третьем уровне расположена числовая шкала с оценками значений переменной в натуральных физических единицах от 0 до 50 мин.

Обратим внимание, что лингвистическая переменная включает термы $T(S)$ с модами «небольшое, ..., большое» в форме нечетких чисел. Строго говоря, нечеткое число представляет собой интервал на числовой оси. Например, на рис. 1 терм «ниже среднего» соответствует интервалу [0–25] на числовой шкале, но для удобства восприятия и облегчения дальнейших действий нечеткое число изображают в форме треугольника. Таким образом, треугольные нечеткие числа (LR)-типа удобно представить как тройку параметров $A = (a, \alpha, \beta)$, где a – мода нечеткого числа, α и β – соответственно левая и правая нечеткости (*Left*, *Right*), что показано на рис. 2.

Для манипулирования нечеткими числами профессор Лотфи Заде, базируясь на принципе расширения, провел модификацию таких классических арифметических операций, как сложение, вычитание, умножение и деление. В качестве примера реализации принципа расширения можно привести результат сложения двух нечетких чисел. В этом случае происходит интеграция функций принадлежности каждого слагаемого и формируется новая функция принадлежности, описывающая результат суммирования двух нечетких чисел.

Однако использование нечетких чисел при описании экспертных знаний осложняется рядом недостатков, главным из которых является накопление нечеткости в процессе выполнения расширенных операций [3, 7]. Покажем это на примере сложения–вычитания двух нечетких чисел (LR)-типа $A(a,\alpha,\beta)$ и $B(b,\gamma,\delta)$. Так, согласно общепринятым арифметическим операциям, результат сложения задается следующим выражением:

$$A+B=(a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta),$$

а при вычитании из этой суммы нечеткого числа B получаем результат, описываемый выражением

$$(A+B)-B=(a+b-b,\alpha+\gamma+\delta,\beta+\delta+\gamma)=(a,\alpha+\gamma+\delta,\beta+\delta+\gamma)$$

В геометрическом виде полученные результаты иллюстрируются рис. 2.

Симметризованная параметрическая форма представления нечетких чисел

Результаты выполнения операций над нечеткими числами (LR-типа) зависят от используемых форм их представления [3,7]. Вместе с тем, операции с двумя нечеткими числами имеют по три модели представления в зависимости от сочетания знаков мод нечетких чисел. Так умножение выглядит следующим образом:

$$A\otimes B=\begin{cases}(a,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(b,\gamma,\delta)_{LR}=(ab,a\gamma+b\alpha,a\delta+b\beta)_{LR}\,a>0,b>0;\\(a,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(b,\gamma,\delta)_{LR}=(ab,b\alpha-a\delta,b\beta-a\gamma)_{LR}\,a>0,b<0;\\(a,\alpha,\beta)_{LR}\otimes(b,\gamma,\delta)_{LR}=(ab,-b\beta-\alpha\delta,-b\alpha-a\gamma)_{LR}\,a<0,b<0.\end{cases}\qquad(1)$$

Использование нечетких числа (LR)-типа в представленном виде арифметических операций определило потребность поиска и создания новых форм их выражений, в т. ч. математических операций различной сложности. Так, была введена симметризованная параметрическая форма задания нечетких чисел (LR)-типа $A=(a,\alpha,\beta)$, $\alpha\ge 0$, $\beta\ge 0$ двумя показателями:

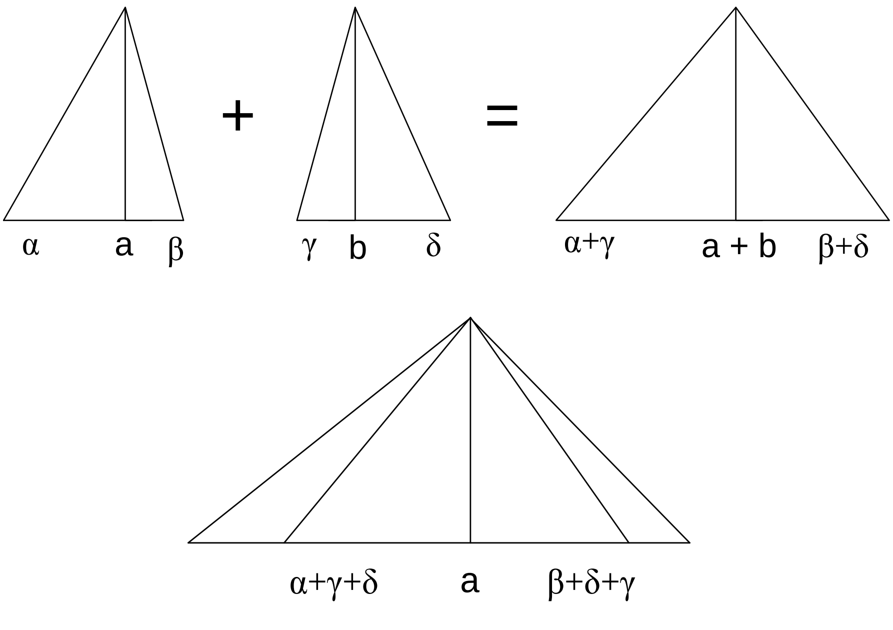

Рис. 2. Геометрическая интерпретация накопления нечеткости результата при сложении–вычитании нечетких чисел (LR)-типа

нечеткости

$$d(A)=\frac{\alpha+\beta}{2}\ge 0\qquad(2)$$

и коэффициента асимметрии

$$\Delta A=\frac{\beta-\alpha}{2}.\qquad(3)$$

Выражение (кортеж) (4) в этом случае является симметризованным параметрическим представлением нечеткого числа A (LR)-типа

$$A=(a,d(A),\Delta(A)) . \tag{4}$$

На основе вышеизложенного можно показать, как связаны между собой общепринятая и симметризованная параметрические формы представления нечетких чисел:

$$A=(a,\alpha,\beta) \Leftrightarrow A=(a,d(A),\Delta(A)) ,\ \alpha=d(A)-\Delta(A),\ \beta=d(A)+\Delta(A) .$$

Доказательство корректности предложенного преобразования:

$$A=(a,\alpha,\beta)=(a,\frac{(\alpha+\beta)-(\beta-\alpha)}{2},\frac{(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)}{2})=(a,d(A)-\Delta(A),d(A)+\Delta(A))=(a,d(A),\Delta(A))$$

Для конструктивного выполнения арифметических операций с нечеткими числам в случае их симметризованного параметрического представления в виде $A=(a,d(A),\Delta(A))$ и $B=(b,d(B),\Delta(B))$ предложены следующие расширенные арифметические операции:

$$\begin{gathered}
A\oplus B=(a+b,d(A)+d(B),\Delta(A)+\Delta(B)) \\
A\ominus B=(a-b,d(A)+d(B),\Delta(A)-\Delta(B)) \\
A\otimes B=(ab,|a|d(B)+|b|d(A),a\Delta(B)+b\Delta(A)) \\
A\oslash B=(\frac{a}{b},\frac{|a|d(B)+|b|d(A)}{b^2},\frac{b\Delta(A)-a\Delta(B)}{b^2}) \\
\frac{1}{B}=(\frac{1}{b},\frac{d(B)}{b^2},\frac{-\Delta(B)}{b^2}) \text{ при условии } 0\notin B .
\end{gathered} \tag{5}$$

Исследование выражений, приведенных выше, показывает (см формулу (5)), что результаты выполнения предложенных расширенных арифметических операций с нечеткими числами не зависят от знака нечетких чисел. Доказательство корректности остальных арифметических операций над нечеткими числами (LR)-типа, представленных в симметризированной форме, приведено в работе [7].

Введение дополнительных арифметических операций

Анализ вышеизложенного материала показывает, что использование стандартных расширенных арифметических операций искусственно увеличивает нечеткость (см. рис. 2) В то же время экспертная практика утверждает, что уровень исходной нечеткости не может меняться от количества оценок и всегда остается постоянным, по крайней мере в одном исследовании. Поэтому учеными уже давно предпринимались попытки поиска выхода из такой противоречивой ситуации [8, 9], пока не была высказана идея о возможности расширения арсенала арифметических операций путем введения дополнительных арифметических операций [10, 11] для возможности решения нечетких уравнений. Далее прилагательное «расширенные» опустим.

Введем следующую новую дополнительную арифметическую операцию, для которой должно выполняться следующее условие [3, 7]:

$$C=A \underset{ДОП}{*} B \to C*B=A, \tag{6}$$

где $\underset{ДОП}{*}$ – обозначение дополнительной операции, противоположной по отношению к операции $*$.

Пусть A,B и C – нечеткие числа (LR)-типа в симметризованной форме. Тогда дополнительные арифметические операции над нечеткими числами (LR)-типа $A=(a,d(A),\Delta(A))$ и $B=(b,d(B),\Delta(B))$ как частный случай (5) с учетом определения (6) примут вид:

$$\begin{gathered}
A\oplus_{ДОП} B=(a+b,|d(A)-d(B)|,\Delta(A)+\Delta(B)) ; \\
A\ominus_{ДОП} B=(a-b,|d(A)-d(B)|,\Delta(A)-\Delta(B)) ; \\
A\otimes_{ДОП} B=(ab,||b|d(A)-|a|d(B)|,|a|\Delta(B)+|b|\Delta(A)) ; \\
A\oslash_{ДОП} B=(\frac{a}{b},\frac{||b|d(A)-|a|d(B)|}{b^2},\frac{|b|\Delta(A)-|a||\Delta(B)|}{b^2}) .
\end{gathered} \tag{7}$$

Проведем сравнение результата примера, приведенного на рис. 2, когда арифметические операции выполнялись по правилам (5) с результатом использования дополнительных операций (6):

$$(A+B)\ominus_{\text{доп}} B=(a+b-b,d(A)+d(B)-d(B),\Delta A+\Delta B-\Delta B)=(a,d(A),\Delta A)=A\,.$$

На рис 3 приведено графическое описание результатов использования дополнительных арифметических действий с нечеткими числами (LR)-типа.

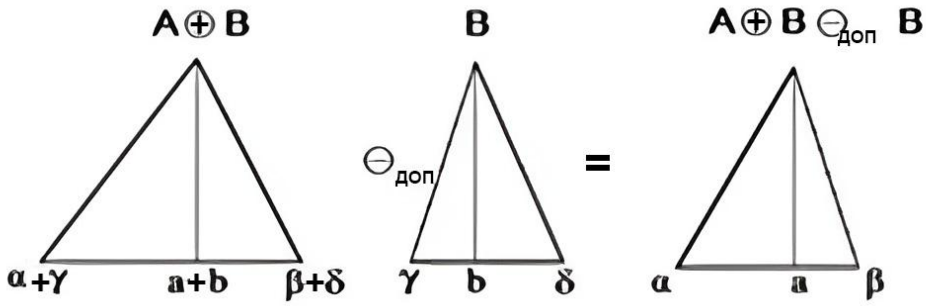

Рис. 3. Геометрическая интерпретация использования дополнительных арифметических действий с нечеткими числами (LR)-типа

Сравнение рис. 2 с рис. 3 демонстрирует преимущество введения дополнительных операций. Новые дополнительные арифметические операции, которые были введены по определению (6), обладают свойствами, применяемыми в процессе обработки опросных матриц, заполненных специалистом.

$$\begin{gathered}
A\oplus_{ДОП} 0=A,\\
A\oslash_{\text{доп}}1=A,\\
A\ominus_{\text{доп}}A=0;\\
A\oslash_{\text{доп}}A=1,\\
(A\oplus B)\ominus_{\text{доп}}B=A,\\
(A\otimes B)\oslash_{\text{доп}}B=A,\\
(A\oplus_{ДОП} B)\ominus_{\text{доп}}B=(-1)A,\\
(A\otimes_{ДОП} B)\oslash_{\text{доп}}B=(-1)A.
\end{gathered}\tag{8}$$

На основе формул (6)–(8) можно по-новому подойти к решению нечетких уравнений. Продемонстрируем, какие возможности при решении нечетких уравнений открываются при использовании дополнительных арифметических действий с нечеткими числами (LR)-типа.

Пример решения нечетких уравнений

Принципиально значимым для решения нечетких уравнений является строгое поддержание одинакового уровня нечеткости в обеих его частях. Поэтому ниже будет более детально рассмотрен вопрос о равносильных нечетких уравнениях и аналогичных переходах, т. е. переносах нечетких слагаемых из одной части уравнения на другую [3, 7].

Пусть даны два нечетких выражения $r(\tilde{x})$ и $q(\tilde{x})$ и требуется установить условия их идентичности $r(\tilde{x})=q(\tilde{x})$. Согласно веденному Л.А. Заде понятию лингвистической переменной и его применению к приближенным решениям [12] идентичность $r(\tilde{x})=q(\tilde{x})$ свидетельствует о равенстве соответствующих функций принадлежности. На практике это означает [3, 7], что при переносе нечеткой части $r(\tilde{x})$ в правую часть выражения $q(\tilde{x})$ необходимо проводить только по правилам эквивалентных преобразований с использованием дополнительных арифметических операций (7) и их свойств (8).

Рассмотрим уравнение вида

$$A\otimes X\oplus B=C\,,\quad \text{при } (A\neq 0).\tag{9}$$

Из обеих частей уравнения (9) выполним дополнительное вычитание нечеткого числа B. В результате данной операции и получим равносильное уравнение ($\Leftrightarrow$ – знак равносильности):

$$A\otimes X\oplus B\ \ominus_{\text{доп}}\ B=C\ \ominus_{\text{доп}}\ B\Leftrightarrow A\otimes X=C\ \ominus_{\text{доп}}\ B\tag{10}$$

Нечеткое уравнение (10) после дополнительного вычитания равносильно уравнению (11), так как нечеткое число A не равно четкому нулю.

$$X = (C \ominus_{\text{ДОП}} B) \oslash_{\text{ДОП}} A. \tag{11}$$

Можно показать, что уравнение (11) имеет единственный корень – нечеткое число (LR)-типа следующего вида $(C \ominus_{\text{ДОП}} B) \oslash_{\text{ДОП}} A$.

Так как уравнение (9) равносильно нечеткому уравнению (11), то и исходное (9) имеет также единственный корень – нечеткое число (LR)-типа.

Решение нечетких уравнений второй степени

Пусть имеется нечеткое уравнение вида

$$A \otimes X^2 \oplus B \otimes X \oplus C = 0, \ (A \neq 0) \tag{12}$$

Ранее в работах [9–11] было показано, что уравнение в форме (12) не имеет решение, так как не выполняются условия равенства нечеткости в обеих частях данного выражения.

Вместе с тем в указанных работах было показано, что для ряда частных случаев возможны решения нечеткого уравнения (12):

$$A \otimes X^2 = 0 \ominus_{\text{ДОП}} B \otimes X \oslash_{\text{ДОП}} C, (A \neq 0); \tag{13}$$

$$A \otimes X^2 \oplus B \otimes X = \ominus_{\text{ДОП}} C, (A \neq 0); \tag{14}$$

$$A \otimes X^2 \oplus C = \ominus_{\text{ДОП}} B \otimes X, (A \neq 0). \tag{15}$$

Для примера покажем решение (14) при $X = (x, \Delta X, d(X))$ в симметризованном виде.

С учетом формул (7) уравнение (14) примет вид:

$$A \otimes X^2 \oplus B \otimes X \oplus_{ДОП} C = 0, \ (A \neq 0) \tag{16}$$

Дальнейшее преобразование (14) затруднено из-за выполнения для нечетких чисел закона дистрибутивности в ослабленной форме. Для преодоления указанного недостатка представим (16) системой уравнений для каждого параметра нечеткого числа. Согласно (5), (7) она примет вид:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \Delta(X)(2ax + b) + x(x\Delta(A) + \Delta(B)) - \Delta C = 0 \\ d(X)(|2ax| + |b|) + x^2 d(A) + |x|\, d(B) - d(C) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Точное решение параметров нечеткой переменной x получим из системы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ \Delta(X) = \dfrac{\Delta(C) - x(x\Delta(A) + \Delta(B))}{2ax + b} \\ d(X) = \dfrac{d(C) - (x^2 d(A) + |x|\, d(B))}{|2ax| + |b|} \end{cases} \tag{18}$$

при $D \geq 0$.

Другие виды (13)–(15) нечетких квадратных уравнений решаются аналогично.

Обсуждение результатов и возможные направления их практической реализации

Основное содержание данной статьи посвящено разработке нового подхода к заданию нечетких чисел и математическим моделям выполнения унифицированных арифметических операций над ними на основе расширения данных операций. Для эффективного применения предлагаемого подхода и моделей крайне важно учитывать такие свойства нечетких чисел, как выпуклость и нормализованность. Выпуклость гарантирует, что все промежуточные значения между минимальным и максимальным элементами нечеткого числа также принадлежат ему. Нормализованность подразумевает, что наибольшая степень принадлежности равна единице. Эти свойства важны и критичны при вычислении операций и позволяют обеспечить адекватную интерпретацию результатов.

В тексте статьи был употреблен термин «недоопределенность» алгебры нечетких чисел. Рассмотрим практический смысл термина «доопределение» на примере решения конкретной задачи. В исследовании [13] с помощью НВП решалась задача минимизации рисков появления опасных вибраций при эксплуатации насосных агрегатов заправочного оборудования ракетно-космических комплексов (ЗО РКК). Известно, что перед запуском ракет космического назначения согласно инструкциям по эксплуатации проводится штатная операция проверки работоспособности насосных агрегатов по вибрационной скорости, предельное значение которой составляет 11,2 мм/с. При построении на практике нечетко-возможностной модели (НВМ) появления опасных вибраций при эксплуатации насосных агрегатов ЗО РКК [13] опросная матрица эксперта содержала 64 строки из нечетких продукционных правил в семимерном факторном пространстве нечетких лингвистических переменных. Результирующая адекватная полиномиальная модель содержала 15 слагаемых, что по методу наименьших квадратов обусловливало 64 – 15 = 49 степеней свободы для проверки адекватности сформированной модели. При алгебраическом сложении 64 нечетких чисел знакопеременного ряда значений зависимой переменной было получено среднее арифметическое значение вибрационной скорости 11,25 мм/с. При исходном уровне нечеткости экспертной информации 2 мм/с нечеткий интервал этого среднего в общепринятых арифметических операциях будет $11{,}25 \pm 2*49$ мм/с или от 89 до 110 мм/с, что по своей сути абсурдно, поскольку критическое значение вибрационной скорости по регламенту составляет 11,2 мм/с и «теряется» в таком огромном интервале, не говоря уже о его конечных значениях. В то же время истинное значение допустимой вибрационной скорости в пределах начальной нечеткости экспертных оценок находится в пределах

$$11{,}25 \pm 2 \text{ мм/с или } 9{,}25 < 11{,}25 < 13{,}25 \text{ мм/с.}$$

В целом в рассматриваемой прикладной задаче удалось корректно «доопределить» логику описания исследуемой предметной области с сохранением исходной степени нечеткости, базируясь на введении оригинальной симметризованной формы представления и дополнительных арифметических операций над нечеткими числами (LR)-типа (в соответствии с разработанным подходом и моделями).

Заключение

Анализ показывает, что практическое применение разработанных математических моделей нечетких арифметических операций над нечеткими числами (LR)-типа целесообразно при решении различных классов задач мониторинга и управления сложными объектами (СлО) в условиях возмущающих воздействий. В таких случаях широко применяются экспертные системы (ЭС), в которых используют базы знаний, основанные на экспертных оценках, представленных в различном виде. Опираясь на разработанные математические модели и введенные расширения для выполнения арифметических операций с нечеткими числами (LR)-типа можно доработать существующие ЭС и повысить их возможности по эффективному решению различных классов задач синтеза, анализа СлО, а также интеграции данных, информации и знаний, что значительно повышает точность и надежность принимаемых управленческих решений.

Говоря о перспективах практической реализации разработанного математического аппарата, основанного на введении унифицированных арифметических операций с нечеткими числами при формализации экспертных знаний, хочется отметить работы, выполняемые ведущей научной школой Р.В. Мещерякова и ориентированные на создание и использование полимодальных интеллектуальных интерфейсов в современных и перспективных человеко-машинных системах [14–18]. Авторы выражают признательность за плодотворные дискуссии с д.т.н., профессором РАН Р.В. Мещеряковым по рассматриваемой в статье тематике и считают своим приятным долгом поздравить его с юбилеем.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-19-00823, https://rscf.ru/project/24-19-00823).

Литература

1. Эшби, У.Р. Введение в кибернетику / У.Р. Эшби; под ред. В.А. Успенского – М.: ИЛ, 1959. – 432 с.

2. Спесивцев, А.В. Эксперт как «интеллектуальная измерительно-диагностическая система» / А.В. Спесивцев, Н.Г. Домшенко // Сб. докладов. XIII Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM 23–25 июля 2010, Санкт-Петербург. – СПб: Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. – Т. 2. – С. 28–34.

3. Спесивцев, А.В. Управление рисками чрезвычайных ситуаций на основе формализации экспертной информации / А.В. Спесивцев. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. – 237 с.

4. Аверкин, А.Н. Мягкие вычисления и измерения / А.Н. Аверкин, С.В. Прокопчина // Интеллектуальные системы (МГУ). – 1997. – Т. 2, Вып. 1–4. – С. 93–114.

5. Tarassov, V.B. General Approaches to the Modelling of Soft Estimates and Beliefs in Strategic Decision Engineering / V.B. Tarassov // Proceedings of 2002 IEEE International Conference on Artificial Intelligence Systems (ICAIS 2002, Divnomorskoe, Russia, 5–10 September). – Los Alamitos CA: IEEE, 2002. – P. 45–49.

6. Орлов, А.И. Прикладная теория измерений / А.И. Орлов // Прикл. многомерн. стат. анализ. – М., 1978. – С. 68–138.

7. Игнатьев, М.Б. Моделирование слабо формализованных систем на основе явных и неявных экспертных знаний / М.Б. Игнатьев, В.Е. Марлей, В.В. Михайлов, А.В. Спесивцев. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕЕСС, 2018. – 500 с.

8. Mizumoto, M. Some Properties in Fuzzy Sets on Type 2 / M. Mizumoto, K. Tanaka // Information and Control. – 1976. – Vol. 31, Iss. 4. – P. 312–340.

9. Гвоздик, А.А. Решение нечетких уравнений / А.А. Гвоздик // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1984. – № 5. – С. 176–183.

10. Алексеев, А.В. Применение нечеткой математики в задачах принятия решений / А.В. Алексеев // Прикладные задачи анализа решений в организационно-технических системах. – Рига.: Риж. политехн. Ин-т, 1983. – С. 38–42.

11. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьев и др. – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с.

12. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. – М.: Мир, 1976. – 162 с.

13. Астанков, А.М. Снижение рисков возникновения опасных последствий при эксплуатации насосных агрегатов заправочного оборудования ракетно-космических комплексов / А.М. Астанков, А.В. Спесивцев, А.В. Вагин // Проблемы управления рисками в техносфере. – 2016. – №1. – С. 6–14.

14. Ходашинский, И.А. Методы нечеткого извлечения знаний в задачах обнаружения вторжений / И.А. Ходашинский, Р.В. Мещеряков, И.В. Горбунов // Вопросы защиты информации. – 2012. – № 1 (96). – С. 45–50.

15. Резанова, З.И. Задачи авторской атрибуции текста в аспекте гендерной принадлежности (к проблеме междисциплинарного взаимодействия лингвистики и информатики) / З.И. Резанова, А.С. Романов, Р.В. Мещеряков // Вестник Томского государственного университета. – 2013. – № 370. – С. 24–28.

16. Рахманенко, И.А. Анализ идентификационных признаков в речевых данных с помощью gmm-ubm системы верификации диктора / И.А. Рахманенко, Р.В. Мещеряков // Труды СПИИРАН. – 2017. – № 3 (52). –С. 32–50.

17. Романов, А.С. Методика проверки однородности текста и выявления плагиата на основе метода опорных векторов и фильтра быстрой корреляции / А.С. Романов, Р.В. Мещеряков, З.И. Резанова // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. – 2014. – № 2 (32). – С. 264–269.

18. Мещеряков, Р.В. Перспективные направления развития человеко-машинных интерфейсов / Р.В. Мещеряков, Я.А. Туровский // Сборник трудов IX Международной научно-технической конференции «Информационные технологии в науке, образовании и производстве» (ИТНОП-2023). – Белгород, 2023. – С. 23–29.

Поступила в редакцию 2 августа 2024 г.

Сведения об авторах

Спесивцев Александр Васильевич – доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: sav2050@gmail.com, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8928-4585

Соколов Борис Владимирович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: sokolov_boris@inbox.ru, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0002-2295-7570

***Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2024, vol. 16, no. 4, pp. 75–84***

DOI: 10.14529/mmph240409

MATHEMATICAL MODELS FOR PERFORMING UNIFIED ARITHMETIC OPERATIONS WITH FUZZY NUMBERS IN THE FORMALIZATION OF EXPERT KNOWLEDGE

A.V. Spesivtsev, B.V. Sokolov
Saint Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation
E-mail: sokolov_boris@inbox.ru

Abstract. The paper considers fuzzy representation and manipulation of explicit and implicit expert knowledge. It proposes to use fuzzy numbers that allow describing uncertainty factors. It also presents a new form of specifying symmetrized forms of representation of fuzzy numbers, as well as extended and additional arithmetic operations on them which preserve the original level of fuzzy knowledge of experts and simplify the process of their formalization in solving applied problems.

Keywords: fuzzy numbers; extended and additional arithmetic operations; simulation modeling; accuracy; reliability; adequacy of the model; complex technical system.

References

1. Ashby W.R. *An Introduction to Cybernetics*. London, Chapman and Hall, 1956, 304 p.

2. Spesivtsev A.V., Domshenko N.G. Ekspert kak "intellektual'naya izmeritel'no-diagnosticheskaya sistema" (Expert as an "Intelligent Measuring and Diagnostic System"). *Proc. XIII International Conference on Soft Computing and Measurements SCM July 23–25, 2010, St. Petersburg,* St. Petersburg: ETU "LETI" Publishing House, 2010, Vol. 2, P. 28–34. (in Russ.).

3. Spesivtsev A.V. *Upravlenie riskami chrezvychaynykh situatsiy na osnove formalizatsii ekspertnoy informatsii* (Emergency Risk Management Based on Formalization of Expert Information). St. Petersburg, Polytechnic University Publ., 2004, 237 p. (in Russ.).

4. Averkin A.N., Prokopchina S.V. Soft Calculations and Measurements. *Intelligent systems (Moscow State University)*, 1997, Vol. 2, Iss. 1-4, pp. 93–114.

5. Tarassov B. General Approaches to the Modelling of Soft Estimates and Beliefs in Strategic Decision Engineering. *Proc. 2002 IEEE International Conference on Artificial Intelligence Systems (ICAIS 2002)*, Divnomorskoe, Russia, 2002, pp. 45–49. DOI: 10.1109/ICAIS.2002.1048050.

6. Orlov A.I. Prikladnaya teoriya izmereniy (Applied Theory of Measurements). *Prikladnoy mnogomernyy statisticheskiy analiz* (Appl. Multivariate Statistical Analysis). Moscow, 1978, pp. 68–138.

7. Ignatiev M.B., Marley V.E., Mikhailov V.V., Spesivtsev A.V. *Modelirovanie slabo formalizovannykh sistem na osnove yavnykh i neyavnykh ekspertnykh znaniy* (Modeling of Weakly Formalized Systems Based on Explicit and Implicit Expert Knowledge). St. Petersburg: POLYTECH-PRESESS Publ., 2018, 500 p.

8. Mizumoto M.,Tanaka K. Some Properties in Fuzzy Sets on Type 2. *Information and Control*, 1976, Vol. 31, Iss. 4, pp. 312–340. DOI: 10.1016/S0019-9958(76)80011-3

9. Gvozdik, A. A. Reshenie nechetkikh uravneniy (Solution of Fuzzy Equations). *Izv. USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics*, 1984, no. 5, pp. 176–183. (in Russ.).

10. Alekseev, A.V. Primenenie nechetkoy matematiki v zadachakh prinyatiya resheniy (Application of Fuzzy Mathematics in Decision-Making Problems). *Prikladnye zadachi analiza resheniy v*

organizatsionno-tekhnicheskikh sistemakh (Applied Problems of Decision Analysis in Organizational-Technical Systems), Riga: Riga Polytechnic Institute, 1983, pp. 38–42. (in Russ.).

11. Borisov A.N., Alekseev A.V., Merkur'eva G.V., Slyadz' N.N., Glushkov V.I. *Obrabotka nechetkoy informatsii v sistemakh prinyatiya resheniy* (Processing Fuzzy Information in Decision-Making Systems). Moscow, Radio and Communications Publ., 1989, 304 p. (in Russ.).

12. Zade L.A. *Ponyatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennykh resheniy* (The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Decision-Making). Moscow, Mir Publ., 1976, 162 p. (in Russ.).

13. Astankov A.M., Spesivtsev A.V., Vagin A.V. Snizhenie riskov vozniknoveniya opasnykh posledstviy pri ekspluatatsii nasosnykh agregatov zapravochnogo oborudovaniya raketno-kosmicheskikh kompleksov (Reducing the Risks of Hazardous Consequences during Operation of Pumping units of Refueling Equipment of Rocket and Space Complexes). *Problemy upravleniya riskami v tekhnosfere* (Problems of Risk Management in the Technosphere), 2016, no. 1, pp. 6–14. (in Russ.).

14. Khodashinsky I.A., Meshcheryakov R.V., Gorbunov I.V. Metody nechetkogo izvlecheniya znaniy v zadachakh obnaruzheniya vtorzheniy (Methods of fuzzy knowledge extraction in intrusion detection problems). *Voprosy zashchity informatsii* (Information Security Issues), 2012, no. 1 (96), pp. 45–50. (in Russ.).

15. Rezanova Z.I., Romanov A.S., Meshcheryakov R.V. Zadachi avtorskoy atributsii teksta v aspekte gendernoy prinadlezhnosti (k probleme mezhdistsiplinarnogo vzaimodeystviya lingvistiki i informatiki) (The Tasks of Author's Text Attribution in Terms of Gender (to the Problem of Interdisciplinary Interaction of Linguistics and Informatics)). *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta* (Bulletin of Tomsk State University), 2013, no. 370, pp. 24–28. (in Russ.).

16. Rakhmanenko I.A., Meshcheryakov R.V. Analiz identifikatsionnykh priznakov v rechevykh dannykh s pomoshch'yu gmm-ubm sistemy verifikatsii diktora (Analysis of Identification Features in Speech Data using the GMM-UBM Speaker Verification System). *Trudy SPIIRAN* (Proceedings of SPIIRAS), 2017, no. 3 (52), pp. 32–50. (in Russ.).

17. Romanov A.S., Meshcheryakov R.V., Rezanova Z.I. Metodika proverki odnorodnosti teksta i vyyavleniya plagiata na osnove metoda opornykh vektorov i fil'tra bystroy korrelyatsii (Methodology for Checking Text Homogeneity and Detecting Plagiarism Based on the Support Vector Machine and Fast Correlation Filter). *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki* (Reports of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics), 2014, no. 2 (32), pp. 264–269. (in Russ.).

18. Meshcheryakov R.V., Turovsky Ya.A. Perspektivnye napravleniya razvitiya cheloveko-mashinnykh interfeysov (Promising Directions of Development of Human-Machine Interfaces). *Sbornik trudov IX Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii “Informatsionnye tekhnologii v nauke, obrazovanii i proizvodstve”* (ITNOP-2023) (Proc. IX International Scientific and Technical Conference “Information Technologies in Science, Education and Production” (ITNOP-2023)). Belgorod, 2023, pp. 23–29. (in Russ.).

Received August 2, 2024

Information about the authors

Spesivtsev Alexander Vasilievich is Dr. Sc. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, Federal State Budgetary Institution of Science “St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences”, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: sav2050@gmail.com, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8928-4585

Sokolov Boris Vladimirovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Federal State Budgetary Institution of Science “St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences”, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: sokolov_boris@inbox.ru, ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0002-2295-7570