Математика

УДК 519.833 **DOI: 10.14529/mmph250101**

ПАРЕТОВСКОЕ РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ИГРАХ *N* ЛИЦ

***В.И. Жуковский*[1], *Л.В. Жуковская*[2], *К.Н. Кудрявцев*[3,4], *С.П. Самсонов*[1], *Л.В. Смирнова*[5]**

[1] *МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация*
[2] *Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация*
[3] *Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация*
[4] *Фининсовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация*
[5] *Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация*
E-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Аннотация. Публикации по математической теории игр со многими (не менее двух) игроками можно условно распределить по четырем направлениям: бескоалиционные, иерархические, кооперативные и коалиционные игры. Новому подходу в первом из них посвящена настоящая статья. Последние два направления, в свою очередь, разделяются на игры с побочными и без побочных платежей (соответственно на игры с трансферабельными и нетрансферабельными выигрышами). Если первые из них активно исследуются в Санкт-Петербургской научной школе по математической теории игр (Санкт-Петербургский госуниверситет, факультет прикладной математики и процессов управления, Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН), то игры с нетрансферабельными выигрышами не охвачены. Мы предлагаем в перечисленных трех направлениях базироваться на концепции угроз и контругроз. Начало ее положено в публикациях литовского математика Э.Й. Вилкаса в его двух монографиях восьмидесятых годов прошлого века (ученика петербургского профессора Н.Н. Воробьева). Для дифференциальных игр впервые, по-видимому, применил Э.М. Вайсборд в 1974 г., затем подхватил первый автор настоящей статьи в совместной с Э.М. Вайсбордом книге «Введение в теорию дифференциальных игр нескольких лиц и её приложение», М.: Советское радио, 1980 г. и затем продолжено В.И. Жуковским в монографии «Равновесие угроз и контругроз», М.: КРАСАНД, 2010.

Ключевые слова: бескоалиционные игры; равновесие по Нэшу; равновесие по Бержу; равновесие угроз и контругроз; санкции и контрсанкции; оптимальность по Парето.

Введение

Рассмотрим бескоалиционную игру в нормальной форме, определенную упорядоченной тройкой

$$G_N = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle . \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, N \geq 2\}$ – множество порядковых номеров игроков, каждый из которых выбирает свою *стратегию* $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ (где символом $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, как обычно, обозначается k-мерное действительное евклидово пространство, элементами которого являются наборы из k действительных чисел, используется также евклидова норма $\|\cdot\|$ и скалярное произведение); в результате в игре G_N образуется ситуация $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{i\in\mathbb{N}} n_i}$. На множестве X ситуаций x определена функция выигрыша $f_i(x)$ каждого i-го игрока:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j' D_{ij} x_j + 2d_{ii} x_i \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

значения которых называются *выигрышем* i-го игрока (который i-й игрок стремится увеличить). Не ограничивая общности, далее предполагаем, что $n_j \times n_j$ – матрицы D_{ij} постоянны и симметричны, штрих сверху означает операцию транспонирования, например: x'_j – n_j-вектор-строка, d_{ii} – постоянный n_i-вектор.

В экономических моделях квадратичная форма из (2) иногда описывает инвестиции, внесённые j-м игроком в i-е производство. Тогда i-й игрок стремится увеличить (2), при $D_{ii} > 0$ (квадратичная форма $x'_i D_{ii} x_i$ определенно положительна), все же ограничивая ее беспредельный рост (с помощью линейного слагаемого – скалярного произведения $2d'_{ii}x_i$ из (2)), при этом ориентируясь на противодействие остальных игроков, конечно, для $D_{ij} < 0$ $(j \neq i)$. Как раз это обстоятельство и объясняет название настоящей статьи. Далее построение равновесия угроз и контругроз осуществлено как раз при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j \in \mathbb{N};\, j \neq i)$.

По мнению корифеев математической теории игр, равновесию как приемлемому решению игры и должно быть присуще свойство *устойчивости*: отклонение от него отдельного игрока не должно увеличить выигрыш отклонившегося. Решение, предложенное [1, 2] и названное впоследствии равновесием по Нэшу (РН), полностью отвечает этому требованию; РН уверенно завоевало «царствующее положение» в экономике, социологии, военных науках. Однако «And in the Sun there are the spots»: множество ситуаций равновесия по Нэшу может быть внутренне и внешне неустойчивым. Так, в простейшей бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме

$$\langle \{1,2\},\ \{X_i = [-1,1]\}_{i=1,2},\ \{f_i(x_1,x_2) = 2x_1x_2 - x_i^2\}_{i=1,2} \rangle$$

множество равновесных ситуаций по Нэшу будет

$$X^e = \{x^e = (x_1^e, x_2^e) = (\alpha,\alpha) \mid \forall \alpha = \mathrm{const} \in [-1,1]\},\quad f_i(x^e) = \alpha^2\ (i \in 1,2)\,.$$

Для элементов этого множества (отрезка биссектрисы 1-й и 3-й четверти координатного угла), во-первых, для $x^{(1)} = (0,0) \in X^{(e)}$ и $x^{(2)} = (1,1) \in X^e$ имеем $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i(x^{(2)}) = 1$ $(i = 1,2)$, и поэтому множество X^e *внутренне неустойчиво*, во-вторых, $f_i(x^{(1)}) = 0 < f_i\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ $(i = 1,2)$, и поэтому множество X^e *внешне неустойчиво*. Внешняя и внутренняя неустойчивость множества равновесий по Нэшу – негатив при его практическом использовании. В первом случае существует ситуация, которая доминирует РН (по всем игрокам), а во втором такая ситуация даже не является равновесной по Нэшу. Избежать последствия внешней и внутренней неустойчивости позволила бы максимальность по Парето ситуации равновесия по Нэшу. Однако такое совпадение явление скорее экзотическое (нам известны лишь три случая [3; 4, с. 92–93; 5], где имеется такое совпадение). Итак, чтобы избежать неприятностей, связанных с внешней и внутренней неустойчивостью, далее добавляем требование максимальности по Парето к определению равновесия санкций и контрсанкций, формализованному ниже. Однако прежде всего приведем общепринятые в бескоалиционных играх понятия решений – равновесие по Нэшу (РН) и равновесие по Бержу (РБ) для игры G_N.

Определение 1. [1, 2]. Пару $(x^e, f^e = f_1(x^e), \ldots, f_N(x^e)) = X \times \mathbb{R}^N$ называют равновесием по Нэшу (РН) в игре G_N, если

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x^e \,\|\, x_i) = f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N})\,.$$

Определение 2. [6, с. 27]. Пару $(x^B, f^B = f_1(x^B), \ldots, f_N(x^B)) \in X \times \mathbb{R}^N$ называют равновесием по Бержу (РБ) в G_N, если

$$\max_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i\left(x \,\|\, x_i^B\right) = f_i\left(x^B\right)\ (i \in \mathbb{N})\,.$$

Далее

$$-i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\},\ x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in X_{-i} = \prod_{k \in \mathbb{N}, k \neq i} X_k\,.$$

Если определение 1 отвечает «эгоистическим стремлениям каждого игрока» «обогатиться» только самому, то определение 2 соответствует Золотому правилу нравственности: поступай с другими так, как бы хотел, чтобы поступали с тобой. Этот чисто альтруистический подход получил широкое распространение в христианстве, исламе, иудаизме, магометанстве и буддизме.

Перейдем к равновесию санкций и контрсанкций (синоним угроз и контругроз). Впервые в русскоязычной литературе похожее появилось в учебнике [7] (см. также [8]). Дело в том, что, как уже упоминалось выше, исследование позитивных и негативных свойств, господствующих в экономике концепции равновесия по Нэшу (как решения бескоалиционной игры), посвящен непрекращающийся поток публикаций. В основном они связаны с описанной выше неединственностью и, как следствие, отсутствием эквивалентности, взаимозаменяемости, внешней неустойчивости, а также неустойчивостью к одновременному отклонению от таких решений двух и более игроков. Игра «дилемма заключенных» выявила также свойство «улучшаемости» – внешней неустойчивости. Подробному анализу таких «отрицательных» свойств для дифференциальных игр посвящена книга В.И. Жуковского и Т.Н. Тынянского [9]. Вывод, к которому приводят авторы книги: либо использовать те ситуации равновесия по Нэшу, которые одновременно свободны от некоторых из указанных недостатков, либо следует вводить новые понятия решения бескоалиционной игры, которые, обладая достоинствами ситуации равновесия по Нэшу, позволяли бы избавиться от отдельных ее недостатков. Одной из таких возможностей и является концепция санкций и контрсанкций, которой и посвящена настоящая статья. Используемые в ней понятия основываются на известной в классической теории игр концепции угроз и контругроз. Теоретическим основанием этой концепции стали работы Э.Й. Вилкаса [10, 11], упоминалась в [12, 13]. Термин «активное равновесие» предложил Э.Р. Смольяков [14] в 1983 г., понятие равновесия угроз и контругроз в дифференциальных играх было использовано, по-видимому, впервые в 1974 г. советским математиком Э.М. Вайсбордом в [15], а затем подхвачено первым автором настоящей статьи в [16, 17], но применялась и применяется эта концепция в дифференциальных играх, по нашему мнению, недостаточно активно.

В заключение несколько слов об используемой терминологии. «Угроза – обещание привнести какое-либо зло, неприятности» [18, с. 317]. Угрозы – необязательно реальные действия, они могут заключаться в сообщении о такого рода действиях (запугивание!). Иногда для смягчения «агрессивного характера» слова «угроза» используют в некоторых публикациях (как синоним) «возражения», «санкция». Сообщение о действии игрока, «обнуляющего» угрозу, называют «контругрозой» (контрвозражением, контрсанкцией). Концепция угроз и контругроз, как уже упоминалось, появляется уже в начальных публикациях по матричной теории игр [13], но ограничиваются они, как правило, либо статическим вариантом игры, либо дифференциальными играми, но только двух лиц [19–24]. Игры с $N > 2$ участников почти не затрагивались, что и явилось (не в последнюю очередь!) толчком к написанию этой работы.

Перейдем к некоторым пришедшим недавно новым понятиям, часто встречающимся в математической теории игр (и, к сожалению, не только в ней).

«Санкция (от лат. sanctionis): мера, применяемая государством к правонарушителям, и мера, принимаемая против стороны, нарушившей соглашение, договор» [18, с. 1148]. Экономические санкции включают экономические и торговые санкции по отношению к другому участнику с целью принудить последнего к изменению политического курса. Запад ввел санкции против России в 2014 г. из-за событий в Крыму и на Востоке Украины (Википедия). Санкции обычно представляют собой ограничение или полное прекращение торговых и финансовых операций.

Угроза – запугивание, обещание причинить кому-либо вред, зло, неприятности (Википедия). «Коалиция (от лат. coalitus) – объединение, соглашение, союз (государств, индивидуумов, партий) для достижения общих целей» [18, с. 435]. Члены коалиции могут на «коалиционных совещаниях» координировать свои действия, стратегии, но не могут, в силу нетрансферабельности выигрышей, перераспределять выигрыши между собой. Сами коалиции (с географической точки зрения!) могут быть местными, региональными, могут создаваться для решения одной или нескольких масштабных долгосрочных проблем. Примерами служат коалиции за спасение лесов, озера Байкал, национальные координационные советы НКО. Коалиции обычно обладают наибольшей силой, если они органично вырастают из общих интересов (например, Национальная коалиция российских организаций инвалидов «За образование для всех» или коалиция «Регионы»). Опыт показывает, что навязанные извне коалиции редко выживают. Примером могут служить коалиции по противодействию коррупции, создававшиеся в рамках проекта «Партнерство в противодействии коррупции» в Самарской, Томской, Иркутской областях. Формируют коалиции по разным причинам. Некоторые из причин являются по сути общими, а некоторые конкретно связаны с защитой общественных интересов.

Общие причины предоставляют возможность:

– делиться информацией и ресурсами;
– предоставлять обучение и техническое содействие;
– реагировать на местный кризис;
– координировать планы и их реализацию;
– избегать дублирования или заполнять пробелы в предоставляемых услугах.

Причины, связанные с защитой общественных интересов, позволяют:

– привлекать внимание общества к определенным вопросам и просвещать целевые группы;
– усиливать политическое влияние;
– обеспечивать последовательность коммуникаций и расширять освещение прессой гражданских, избирательных, юридических и просветительских инициатив в местном сообществе;
– поддерживать определенные политические решения и кандидатуры;
– достигать политических побед, которые иначе были бы невозможны.

1. Вспомогательные сведения

Напомним, что для симметричной постоянной $n\times n$-матрицы $D>0$ (<) означает, что квадратичная форма $x'Dx$ определена положительно (отрицательно): при $\forall x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$ квадратичная форма $x_i'Dx_i$ принимает только положительные значения и обращается в ноль тогда и только тогда, когда все $x_i=0_{n_i}$ (нулевому n_i-вектору), поэтому справедлива эквиваленция $D>0\Leftrightarrow -D<0$ ($-D$ означает, что все элементы матрицы D умножаются на *-1*).

Рассмотрим некоторые свойства корней характеристического уравнения $\Delta(\lambda)=\det[D-\lambda E_n]=0$ и их оценки из [25–27]. В следующих свойствах 1–5, не оговаривая особо, считаем $n\times n$-матрицу D вещественной и симметричной (т. е. $D=D'$), E_n – единичная $n\times n$-матрица.

Далее используем $n\times n$-матрицу $D=(d_{i\,j})$

Свойство 1 Если вещественная, симметричная $n\times n$-матрица $D>0$, то

a) все корни уравнения $\Delta(\lambda)=0$ положительны;

b) для Λ-наибольшего и λ-наименьшего из них $(\Lambda\ge\lambda>0)$ имеет место цепочка неравенств

$$0<\lambda x'x\le x'Dx\le\Lambda x'x\quad \forall x\in\mathbb{R}^n \text{ и } x\ne 0_n, \tag{3}$$

где 0_n – нулевой n-вектор.

Свойство 2 При $D<0$ все корни $\Delta(\lambda)=0$ отрицательны и для наибольшего $-\lambda$ и наименьшего $-\Lambda$ из них ($-\Lambda\le-\lambda<0$) выполняется цепочка неравенств

$$-\Lambda x'x\le x'Dx\le-\lambda x'x\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,\, x\ne 0_n. \tag{4}$$

Свойство 3 (теорема А. Гирша и И. Бендиксона [28]). Если $D=D'>0$, то для наибольшего корня $\Delta(\lambda)=0$ будет

$$\Lambda\le nM\,, \tag{5}$$

где M – максимум модулей элементов симметричной вещественной $n\times n$-матрицы D.

Свойство 4 (теорема Г. Фробениуса [29]). Если для постоянной симметричной $n\times n$-матрицы $D=(d_{ij})$ и $D>0$, то наибольший корень Λ уравнения $\Lambda(\lambda)=0$ удовлетворяет условию

$$\Lambda\le R\,, \tag{6}$$

где $R=\max\limits_{i=1,\dots,n}R_i$, $R_i=\sum\limits_{j=1}^{n}|d_{ij}|$.

Свойство 5 (теорема В. Паркера [30]). В условиях свойства 4

$$\Lambda \le \frac{1}{2} S, \qquad (7)$$

где S – есть сумма элементов *i*-й строки и *j*-го столбца D, а S является наибольшей из этих сумм.

Замечание 1. В книге [27] приведен и ряд других оценок величины характеристических корней уравнения $\Delta(\lambda) = \det[D - \lambda E_n] = 0$.

Перейдем к двум мажорантным утверждениям, играющим главенствующую роль далее при построении явного вида равновесия санкций и контрсанкций игры G_N. Они будут связаны со знакоопределенностью квадратных форм в функциях выигрыша (2). Демонстрацию этих свойств для наглядности проведем для функции выигрыша $f_1(x)$ первого игрока:

$$f_1(x) = x_1' D_{11} x_1 + 2d_{11}' x_1 + x_2' D_{12} x_2 + \ldots + x_N' D_{1N} x_N. \qquad (8)$$

Напомним обозначение $-1 = 2, 3, \ldots, N = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Так как все $n_j \times n_j$-матрицы симметричны и вещественны, то (8) можно представить в виде

$$f_1(x) = f_1(x_1, x_{-1}) = x_1' D_{11} x_1 + 2d_{11}' x_1 + \varphi_1(x_{-1}), \qquad (9)$$

причём $\varphi_1(x_{-1}) = \sum_{j=2}^{N} x_j' D_{1j} x_j$.

Утверждение 1. Каковы бы ни были стратегии $\overline{x_1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ первого и стратегии остальных $x_{-1}^* = (x_2^*, \ldots, x_N^*) \in X_{-1} = \prod_{j=2}^{N} X_j \subseteq \mathbb{R}^{\sum_{j=2}^{N} n_j}$, если $D_{11} > 0$, то существует постоянная $\alpha_{11}^*(\overline{x_1}, x_{-1}^*) > 0$ такая, что при $\forall \alpha > \alpha_{11}^*(\overline{x_1}, x_{-1}^*)$ для стратегии $x_1^T = \alpha e_{n_1}$ будет

$$f_1(x_1^T, x_{-1}^*) > f_1(\overline{x_1}, x_2^*, \ldots, x_N^*), \qquad (10)$$

здесь e_{n_1} – n_1-вектор-столбец, все компоненты которого равны единице.

Аналогично для случая $D_{12} < 0$ получаем

Утверждение 2. Какими бы ни были стратегия $\overline{x_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ второго и стратегии остальных $x_{-2}^* = (x_1^*, x_3^*, \ldots, x_N^*) \in X_{-2} = \prod_{j \in \mathbb{N}, j \ne 2} X_j \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{\sum_{j=3}^{N} n_j}$, если $D_{12} < 0$, то существует постоянная $\alpha_{12}^*(\overline{x_2}, x_{-2}^*) > 0$ такая, что при $\forall \alpha > \alpha_{12}^*(\overline{x_2}, x_{-2}^*)$ для стратегии $x_2^C = \alpha e_{n_2}$ будет

$$f_2(x_1^*, x_2^C, x_3^*, \ldots, x_N^*) < f_2(x_1^*, \overline{x_2}, x_3^*, \ldots, x_N^*, \qquad (11)$$

где аналогично e_{n_1}, e_{n_2} – n_2-вектор-столбец, все компоненты которого равны единице.

Заметим, наконец, что, во-первых, именно санкции и соответствующие контрсанкции будут реализованы в G_N с помощью строгих неравенств, аналогичных (10) и (11), во-вторых, с помощью утверждений 1 и 2 далее будет доказано, что в игре G_N из (1) и (2) отсутствует равновесие по Нэшу (при $D_{11} > 0$), а условие $D_{12} < 0$ приводит к тому, что для $f_1(x)$ не выполнено условие индивидуальной рациональности, а именно, не существует f_1^g, для которого при $\forall x \in X$ будет

$$f_1(x) \ge \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_{-1} \in X_{-1}} f_1(x_1, x_{-1}) = \min_{x_{-1} \in X_{-1}} f_1(x_1^g, x_{-1}) = f_1^g.$$

2. Максимальность по Парето в игре G_N

Поставим игре G_N в соответствие *N*-критериальную задачу

$$G_\upsilon = \left\langle X, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \right\rangle,$$

в которой множество X альтернатив $x = (x_1, \ldots, x_N)$ совпадает с множеством X ситуации x игры G_N, а N критериев $f_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ определены в (2). *На содержательном уровне* цель ЛПР (лица, принимающего решение) в задаче G_υ – выбор такой альтернативы $x^P \in X$, при которой все N критериев принимали бы одновременно возможно *большие* значения. Общепринятым здесь является понятие максимума по Парето, предложенного в 1909 г. итальянским экономистом, социологом и, кстати, богатым наследником Вильфредо Парето.

Определение 3. Альтернатива $x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P) \in X$ называется *максимальной по Парето в задаче* G_υ, если для $\forall x \in X$ несовместна система из N неравенств

$$f_i(x) \geq f_i(x^P) \quad (i \in \mathbb{N}),$$

из которых хотя бы одно строгое; при этом вектор $f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P) = (f_1(x^P), \ldots, f_N(x^P))$ называется *максимумом по Парето в задаче* G_υ.

Отметим здесь два обстоятельства, сразу следующих из определения 3.

Свойство 6. Справедлива импликация: если при $\tilde{x} \in X$ будет $f_i(\tilde{x}) > f_i(x^P)$, то $\exists j \in \mathbb{N}(j \neq i): f_j(\tilde{x}) < f_j(x^P)$.

Свойство 7. Если при каких-либо положительных постоянных $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ имеет место

$$\max_{x \in X} \left\{ f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_N f_N(x) \right\} = Idem\left\{x \to x^P\right\}, \tag{12}$$

то альтернатива x^P максимальна по Парето в задаче G_υ. Напомним, что $Idem\left\{x \to x^P\right\}$ означает, что в выражении в фигурных скобках x заменено на x^P.

Перейдем к другому понятию решения бескоалиционной игры G_N – равновесию угроз и контругроз, где, напомним, используем N-вектор $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^N$. Оно (понятие) выглядит более громоздко, чем определение равновесного решения по Нэшу и по Бержу из определений 1 и 2.

Именно, пусть $x^P \in X$ – максимальная по Парето ситуация в задаче G_υ. Будем считать, что у первого игрока имеется угроза на ситуацию x^P, если у него существует такая стратегия $x_1^T \in X_1$, что

$$f_1(x_1^T, x_2^P, \ldots, x_N^P) > f_1(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{13}$$

Наличие угроз не означает ее обязательное применение, а лишь animus denuntiandi (намерение пригрозить (*лат.*)). Применение санкций выгодно первому игроку, ибо при этом, согласно (13), его выигрыш увеличивается по сравнению с выигрышем в ситуации x^P. В ответ на угрозу первого игрока x_1^T, у второго имеется «неполная» контругроза, если у него существует стратегия $x_2^C \in X_2$, при которой

$$f_1(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P) < f_1(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{14}$$

И у второго имеется «полная» контругроза (или просто контругроза), если существует у него такая стратегия $x_2^C \in X_2$, что одновременно с неравенством (14) выполняется

$$f_2(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P) > f_2(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P). \tag{15}$$

Аналогично определяем контругрозу всех остальных игроков от 3-го до N-го в ответ на угрозу первого.

При наличии указанной неполной контругрозы второй игрок за счет выбора своей стратегии x_2^C приводит, согласно (14), выигрыш первого (угрожающего) игрока к значению, не превосходящему его первоначальный выигрыш в ситуации x^P (но может и уменьшиться!). Все происходит, как по девизу Наполеона I: «Order, contre-order, disorder» (распоряжение – контрраспоряжение – беспорядок (*фр.*)). Таким образом, наличие «неполной» контругрозы «сводит к нулю» применение угрозы первым игроком. В дополнение к этому «полная» контругроза побуждает второго к применению x_2^C, ибо в полученной в результате угроз и контругроз ситуации $(x_1^T, x_2^C, x_3^P, \ldots, x_N^P)$ выигрыш второго увеличится по сравнению с выигрышем в ситуации $(x_1^P, x_2^P, \ldots, x_N^P)$, сложившейся при реализации максимальной по Парето ситуации.

В результате становится ясным следующий факт: если в ответ на любую угрозу какого-либо игрока хотя бы у одного из оставшихся имеется контругроза, то угрозу применять не имеет смысла!

Определение 4. Пару $(x^P, f^P = f^P(x^P)) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем равновесием угроз и контругроз в игре G_N, если

a) ситуация $x^P \in X$ максимальна по Парето в *N*-критериальной задаче G_υ,

b) в игре G_N в ответ на любую угрозу любого игрока по крайней мере у одного из оставшихся имеется контругроза.

Здесь снова напомним, что *N*-вектор $f = (f_1, \ldots, f_N)$, и поэтому определение 4 рекомендует всем *N* игрокам следовать своим стратегиям из ситуации $x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P)$, ибо, во-первых, максимальная по Парето ситуация x^P внешне и внутренне устойчива.

3. Сведения из математического программирования

Для скалярной функции

$$F(x,\alpha) = f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_N f_N(x) \tag{16}$$

векторных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{\sum_{i\in\mathbb{N}} n_i}$, $\alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$ вводится [25, с. 109] предел

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty) - F(x)}{t} = (y,z); \tag{17}$$

если предел (17) существует и равен скалярному произведению $y'z$, то вектор z называют градиентом $F(x,\alpha)$. Сводка явных видов градиентов в [25, с. 109]: в частности,

$$\operatorname{grad}_x x'd = d,\ \operatorname{grad}_x x'Dx = (D + D')x,\ grad_x d = 0_n,$$

кроме того, гессиан

$$\frac{\partial^2 x'Dx}{\partial x^2} = D + D',$$

где использованы постоянные *n*-вектор *d*, $n \times n$-матрицы D; причем, если $D = D'$, то $\operatorname{grad}_x x'Dx = 2Dx$.

Наконец, с учетом явного вида $f_i(x)$ из (2) получаем (с учетом (17))

$$F(x,\alpha) = x_1' D_1(\alpha) x_1 + 2d_{11}' x_1 + x_2' D_2(\alpha) x_2 + 2\alpha_2 d_{22}' x_2 + \ldots + x_N' D_N(\alpha) x_N + 2\alpha_N d_{NN}' x_N. \tag{18}$$

Тогда

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x_i}\Big|_{x=x^P} = 2D_i(\alpha) x_i + 2d_{ii} \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial x_i^2}\Big|_{x=x^P} = 2D_i(\alpha) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{20}$$

Достаточным условием существования максимальной по Парето ситуации x^P задачи G_υ, в силу свойства 7, сводится к выполнению двух групп требований

a) градиенты

$$\frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial x_i}\Big|_{x=x^P} = 0_n \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{21}$$

b) гессианы

$$\frac{\partial^2 F(x,\alpha)}{\partial x_i^2}\Big|_{x=x^P} < 0 \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{22}$$

Перейдем к нахождению явного вида максимума по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ (определение 4). Здесь прежде всего отметим, что фигурирующие в (18)–(20) матрицы

$$D_i(\alpha) = D_{1i} + \alpha_2 D_{2i} + \ldots + \alpha_N D_{Ni} \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{23}$$

Объединение (19) с (21) и (20) с (23) приводит к справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. Если существуют $N-1$ положительных чисел $\alpha_2,\ldots,\alpha_N$ таких, что квадратичные формы $x_i' D_i(\alpha) x_i$ $(i \in \mathbb{N})$ определенно отрицательны, то максимум по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ будет

$$x^P = (x_1^P,\ldots,x_N^P),\quad x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha) d_{ii} \quad (i \in \mathbb{N}),\quad f^P = (f_1^P,\ldots,f_N^P) = f(x^P),$$

$$\begin{gathered} f_1^P = -d_{11}' D_1^{-1}(\alpha) D_{11} D_1^{-1}(\alpha) d_{11} + d_{22}' D_2^{-1}(\alpha) D_{12} D_2^{-1}(\alpha) d_{22} + \ldots \\ \ldots + d_{NN}' D_N^{-1}(\alpha) D_{1N} D_2^{-1}(\alpha) d_{NN}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_N^P = d_{11}' D_1^{-1}(\alpha) D_{N1} D_1^{-1}(\alpha) d_{11} + \ldots - d_{NN}' D_N^{-1}(\alpha) D_{NN} D_N^{-1}(\alpha) d_{NN}. \end{gathered} \tag{24}$$

Завершает нахождение максимума по Парето в G_N *рекуррентный алгоритм построения вектора* $\alpha^* = (\alpha_2^*,\ldots,\alpha_N^*)$ с положительными компонентами α_j^* $(j = 2,\ldots,N)$, «обеспечившего» выполнение соотношения $D_i(\alpha^*) < 0$ $(i \in \mathbb{N})$ Это имеет место, если компоненты $\alpha^* \in \mathbb{R}^N$ являются положительным решением системы

$$\begin{cases} D_1(\alpha^*) = D_{11} + \alpha_2^* D_{12} + \ldots + \alpha_N^* D_{N1} < 0, \\ D_2(\alpha^*) = D_{12} + \alpha_2^* D_{22} + \ldots + \alpha_N^* D_{N2} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_N(\alpha^*) = D_{1N} + \alpha_2^* D_{2N} + \ldots + \alpha_N^* D_{NN} < 0. \end{cases} \tag{25}$$

С учетом (3) и (4), где при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $i, j \in \mathbb{N}$, $j \ne i$ и числа $\Lambda_{ij} > 0$, $(i, j \in \mathbb{N})$, будет

$$x_i' D_{ii} x_i \le \Lambda_{ii} x_i' x_i \ \ (i \in \mathbb{N}),\quad x_j D_{ij} x_j \le -\Lambda_{ij} x_j x_j \ \ (j \in \mathbb{N}). \tag{26}$$

Здесь $\Lambda_{ii} > 0$ – наибольший корень характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$, а $-\Lambda_{ij} < 0$ – наименьший корень $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Принимая во внимание $D_{ij} < 0 \Leftrightarrow (-1) D_{ij} > 0$, согласно (26), условия (25) выполняются, если

$$\begin{cases} \Lambda_{11} - \alpha_2^* \Lambda_{21} - \alpha_3^* \Lambda_{31} - \ldots - \alpha_N^* \Lambda_{N1} < 0, \\ -\Lambda_{12} + \alpha_2^* \Lambda_{22} - \alpha_3^* \Lambda_{32} - \ldots - \alpha_N^* \Lambda_{N2} < 0, \\ -\Lambda_{13} - \alpha_2^* \Lambda_{23} + \alpha_3^* \Lambda_{33} - \ldots - \alpha_N^* \Lambda_{N3} < 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\Lambda_{1N-1} - \alpha_2^* \Lambda_{2N-1} - \ldots + \alpha_{N-1}^* \Lambda_{N-1N-1} - \alpha_N^* \Lambda_{NN-1} < 0, \\ -\Lambda_{1N} - \alpha_2^* \Lambda_{2N} - \ldots - \alpha_{N-1}^* \Lambda_{N-1N} + \alpha_N^* \Lambda_{NN} < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Далее будем предполагать, что $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j) \in \mathbb{N}$, $j \ne i$ и среди игроков в игре G_N существуют, по крайней мере, два: *i*-й и *j*-й из $\mathbb{N}$, таких, что $j \ne i$ и

$$\Lambda_{ii} \Lambda_{jj} < \Lambda_{ij} \Lambda_{ji} \quad (i, j \in \mathbb{N}, j \ne i), \tag{28}$$

где $\Lambda_{ii} > 0$ – *наибольший* из корней характеристического уравнения $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$ и $-\Lambda_{ij} < 0$ – *наименьший* из корней $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Перестановкой порядковых номеров в N можно добиться, чтобы соотношение (28) выполнялось для $i = 1$ и $j = 2$. Здесь следует иметь в виду, что порядковый номер игрока выполняет в математической модели роль имени (фамилии) участника конфликта. Более того, часто задается ЛПР (лицом, принимающим решение) произвольно.

Итак, далее, фактически не уменьшая общности, будем полагать, дополнительно к $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j \in \mathbb{N}, j \ne i)$, выполнение

$$\Lambda_{11} \Lambda_{22} < \Lambda_{12} \Lambda_{21}, \tag{29}$$

где, напомним, $\Lambda_{11} > 0$ – наибольший корень $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$, и $-\Lambda_{12} < 0$ – наименьший корень $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$. Итак, перейдем к рекуррентному способу нахождения положительных $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$, являющимися решением N строгих неравенств (27) при $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ ($i, j \in \mathbb{N}, j \neq i$) и (29).

Утверждение 3. Предположим, что для игры G_N (см. (1) и (2))

1) постоянные, вещественные, симметричные матрицы

$$D_{ii} > 0,\ D_{ij} < 0 \quad (i, j \in \mathbb{N}, j \neq i); \tag{30}$$

2) имеют место строгие неравенства

$$\Lambda_{ii}\Lambda_{jj} < \Lambda_{ij}\Lambda_{ji} \tag{31}$$

Тогда система уравнений (27) имеет положительные решения $\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*$, определяемые рекурсивными соотношениями

$$\forall \alpha_2^* \in \Big(\frac{\Lambda_{11}}{\Lambda_{21}}, \frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{22}}\Big),\ \forall \alpha_3^* \in \Big(0, \frac{\Lambda_{13} + \alpha_2^*\Lambda_{23}}{\Lambda_{33}}\Big),\ \forall \alpha_4^* \in \Big(0, \frac{\Lambda_{14} + \alpha_2^*\Lambda_{24} + \alpha_3^*\Lambda_{34}}{\Lambda_{44}}\Big), \tag{32}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall \alpha_{N-1}^* \in \Big(0, \frac{\Lambda_{1N-1} + \alpha_2^*\Lambda_{2N-1} + \alpha_3^*\Lambda_{3N-1} + \ldots + \alpha_{N-1}^*\Lambda_{N-2N-1}}{\Lambda_{N-1N-1}}\Big),$$

$$\forall \alpha_N^* \in \Big(0, \frac{\Lambda_{1N} + \alpha_2^*\Lambda_{2N} + \alpha_3^*\Lambda_{3N} + \ldots + \alpha_N^*\Lambda_{N-1N}}{\Lambda_{NN}}\Big).$$

4. Отсутствие равновесия по Нэшу и существование равновесия угроз и контругроз

Объединение леммы 1 и утверждения 3 приводит к справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Предположим, что для игры G_N (см. (1) и (2)) выполняется (30) и (31). Тогда максимальное по Парето решение $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ имеет вид

$$x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P), \quad x_i^P = -D_i^{-1}(\alpha^*)d_{ii} \ \ (i \in \mathbb{N})$$

$$f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P),$$

причем

$$f_1^P = -d'_{11}D_1^{-1}(\alpha^*)D_{11}D_1^{-1}(\alpha^*)d_{11} + d'_{22}D_2^{-1}(\alpha^*)D_{12}D_2^{-1}(\alpha^*)d_{22} + \ldots \tag{33}$$
$$\ldots + d'_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)D_{1N}D_N^{-1}(\alpha^*)d_{NN}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_N^P = d'_{N1}D_1^{-1}(\alpha^*)D_{N1}D_1^{-1}(\alpha^*)d_{N1} + \ldots - d'_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)D_{NN}D_N^{-1}(\alpha^*)d_{NN}.$$

Для игры G_N (см. (1) и (2)) рассмотрим оптимизационную задачу: найти $\max\limits_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N})$ при ограниченных $X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и фиксированных стратегиях $\overline{x_2} \in \mathbb{R}^{n_2}$ второго, … , N-го $\overline{x_N} \in \mathbb{R}^{n_N}$ игроков.

Покажем, что эта задача не имеет решения (при выполнении $D_{11} > 0$). В самом деле, какую бы стратегию $\tilde{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ первый игрок ни выбрал, в силу $D_{11} > 0$ и утверждения 1 существует стратегия $x_1^T = \alpha e_{n_1}$ такая, что для $\forall \alpha > \alpha^* = \mathrm{const} > 0$ будет

$$f_1(x_1^T, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}) > f_1(x_1, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_N}).$$

Этот факт одновременно означает (согласно определению 1), что в игре G_N при $D_{ii} > 0$ $(i \in \mathbb{N})$ не выполняется ни одного из N равенств из определения 1. Данное обстоятельство мы бы назвали *сильным отсутствием равновесия по Нэшу*. Таким образом, получим

Утверждение 4. Если в игре G_N (см. (1) и (2)) матрица $D_{11} > 0$, то в G_N не существует равновесия по Нэшу.

Однако «экономический смысл» математической модели требует все же принятия какого-либо равновесного устойчивого решения, т. е. необходимо рекомендовать игрокам использовать свои стратегии из некоторой устойчивой ситуации и в результате получить определенные выигрыши (доходы). Как следует из утверждения 4, «общепризнанная» ситуация равновесия по Нэшу здесь не существует (и поэтому не подходит). Поэтому и предлагаем использовать Паретовское равновесие угроз и контругроз (определение 4).

Во-первых, оно максимально по Парето (тем самым «снимает» внешнюю и внутреннюю неустойчивость, присущую, как правило, равновесию по Нэшу).

Во-вторых, оно устойчиво к отклонениям отдельного игрока (за счет контругроз).

В-третьих, существует (при выполнении (30) и (31)), даже когда не существует равновесия по Нэшу.

В-четвертых, обладает тремя неоспоримыми достоинствами равновесия по Нэшу: устойчивостью к отклонению от x^P отдельного игрока, выполнено условие индивидуальной рациональности и совпадает с седловой точкой – общепризнанным решением антагонистического варианта игры G_N (поэтому применение равновесия угроз и контругроз имеет как раз те же «неоспоримые достоинства», что и равновесие по Нэшу).

В-пятых, для дифференциальных линейно-квадратичных игр *трех лиц* уже ранее доказано существование равновесия угроз и контругроз и найден его явный вид в [31, 32].

Приведем аналогичный результат, касающийся статического варианта игры $N > 2$ лиц. Заметим, что использование концепции угроз и контругроз в качестве решения бескоалиционной игры $N \geq 2$ лиц, по-видимому, впервые.

Теорема 2. Пусть для игры N лиц G_N из (1) и (2)

1) вещественные постоянные симметричные матрицы $D_{ii} > 0$, $D_{ij} < 0$ $(i, j \in \mathbb{N}, j \neq i)$,

2) выполняются неравенства

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} < \Lambda_{12}\Lambda_{21},$$

где $\Lambda_{ii} > 0$ и $\Lambda_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2,\ j \neq i)$ наибольшие, а $-\Lambda_{ij}$ – наименьшие корни характеристических уравнений $\det[D_{ii} - \lambda E_{n_i}] = 0$ и $\det[D_{ij} - \lambda E_{n_j}] = 0$ соответственно.

Тогда в игре G_N пара $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ является равновесием угроз и контругроз, где

$$x^P = (x_1^P, \ldots, x_N^P) \in X, \quad f^P = (f_1^P, \ldots, f_N^P) = (f_1(x^P), \ldots, f_N(x^P)),$$

здесь стратегии $x_i^P = -D_i^{-1} d_{ii}$ $(i \in \mathbb{N})$, постоянные $(\alpha_2^*, \ldots, \alpha_N^*) = \alpha^*$ определяются последовательными рекурсивными соотношениями (32), а числа f_i^P заданы в (33).

Замечание 2. В этом параграфе настоящей статьи найдена бескоалиционная игра $N > 2$ лиц G_N в нормальной форме, в которой не существует равновесия по Нэшу и одновременно существует равновесие угроз и контругроз. Этот факт заставляет исследователей обратить внимание на зарождающееся новое направление математической теории бескоалиционных игр, связанных с новыми понятиями равновесия. Одному из них, равновесию санкций и контрсанкций, и посвящен этот и следующий раздел настоящей статьи.

5. Равновесие санкций и контрсанкций

Как и в предыдущем разделе статьи, рассматриваем бескоалиционную игру $N \geq 2$ лиц в нормальной форме

$$G_N = \langle \mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

Напомним, что $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ – множество порядковых номеров игроков, стратегия *i*-го игрока $x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, каждый *i*-й игрок выбирает и использует свою стратегию x, и в результате образуется ситуация $x = (x_1, \ldots, x_N) \in X = \mathbb{R}^{\sum_{i \in \mathbb{N}} n_i}$. На множестве ситуаций X определена функция выигрыша *i*-го игрока с помощью линейно-квадратичной формы

$$f_i(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x'_j D_{ij} x_j + 2d'_{ii} x_i \quad (i \in \mathbb{N}), \tag{34}$$

где постоянные, вещественные, симметричные матрицы D_{ij} и постоянный n_i-вектор-столбец d_{ii} заданы априори, напомним, что штрих сверху означает операцию транспонирования (x'_i – n_i-вектор-строка).

Различие между концепцией угроз и контругроз и предполагаемой здесь концепцией санкций и контрсанкций заключается как раз в различии понятий «угроза» и «санкция» (приведенных в начале этой статьи). Если «угроза» (в большинстве случаев) подразумевает запугивание, обещание причинить вред, неприятность, то «санкция» связана с практической реализацией угрозы и встает вопрос: как действовать (какую стратегию выбрать игроку) при реализации угрозы, как учитывать эту угрозу при условии ее осуществления? Это обстоятельство потребовало изменения понятия «угрозы» и «контругрозы» на «санкцию» и «контрсанкцию», но сама концепция – как возможный подход к принятию равновесного решения бескоалиционной игры базируется здесь снова на определении 4 равновесия угроз и контругроз и теореме 2 (о существовании равновесия угроз и контругроз).

Перейдем к формальным понятиям. Будем говорить, что в игре G_N имеется санкция на игрока $(i \in \mathbb{N})$, если у контркоалиции $-i = \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\}$ имеется стратегия $x^S_{-i} \in \mathbb{R}^{-i}$, а в ответ на x^S_{-i} стратегия i-го игрока $x^C_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ такая, что функция выигрыша i-го игрока реализует выигрыш $f^C_i = f_i(x^C_i, x^S_{-i})$. Такая ситуация (x^C_i, x^S_{-i}) может, например, образоваться, если в ответ на применение контркоалицией $-i$ ее стратегии x^S_{-i} игрок i вынужден отреагировать стратегией x^C_i. Отметим, что в этом случае может произойти одна из двух возможностей (если, конечно, существует в игре G_N максимум по Парето $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$):

$$f^C_i \le f^P_i = f_i(x^P) \text{ и } f^C_i > f^P_i. \tag{35}$$

Основные изменения с определением угроз и контругроз связаны с понятием контрсанкция (по сравнению с «контругрозой»). Именно в ответ на санкцию $x^S = (x^P_i, x^S_{-i})$ у игрока i имеется контрсанкция, если у него существует стратегия $x^C_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, при которой выполняются два строгих неравенства:

$$f_j(x^C_i, x^S_j, x^S_{\mathbb{N}\setminus\{i,j\}}) < f_j = f_j(x^P), \tag{36}$$

$$f_i(x^C_i, x^S_{-i}) > \max\{f_i = f_i(x^P), n_i M_i\}. \tag{37}$$

Здесь уже M_i есть максимум абсолютных величин элементов матрицы $D_{ii} = (d^{(j,\,i)}_{lk})$, т. е. $M_i = \max_{l,\,k=1,\ldots,n_i} |d^{(j,\,i)}_{lk}|$ (постоянная M_i фигурирует в теореме Гирша и Бендиксона из [28], см. свойство 3).

Определение 5. Пару $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем равновесием санкций и контрсанкций игры G_N, если, во-первых, пара $(x^P, f^P = f(x^P))$ максимальна по Парето в N-критериальной задаче

$$G_\upsilon = \langle X, f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)) \rangle,$$

во-вторых, в ответ на любую санкцию $x^S = (x^P_i, x^S_{-i}) \in X$ у игрока i имеется контрсанкция $x^C_i \in X_i$, которая реализует (36) и (37).

Неравенство (36) говорит о том, что в G_N имеется $j \in -i$, который уменьшает выигрыш i-го игрока по сравнению с его паретовским f^P_i, тем самым добавляет свою «лепту» в санкцию. Согласно утверждению 2 и $D_{ij} < 0$, тогда существует постоянная $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(x^P_i, x^S_{-i}) > 0$ такая, что для стратегии i-го игрока $x^C_i = \alpha e_{n_i}$ при $\forall \alpha > \alpha^{(1)}$ выполнено (36), e_{n_i} – n_i-вектор-столбец с единичными координатами. Наконец, из утверждения 1 и $D_{ii} > 0$ можно аналогично заключить, что имеется постоянная $\alpha^{(2)} = \alpha^{(2)}(x_i^P, x_{-i}^S) > 0$ такая, что для $\alpha > \alpha^{(2)}$ и стратегии i-го игрока $x_i^C = \alpha e_{n_i}$ имеет место (37). Тогда оба неравенства (36) и (37) одновременно выполнимы для стратегии i-го игрока $x_i^C = \alpha e_{n_i}$ при $\forall \alpha > \max\{\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}\}$.

Остановимся на «экономическом смысле» (36) и (37). Первое из них, как уже упоминалось, говорит, что в санкции на i-го игрока могут участвовать все остальные, второе, т. е. выполнение (37), означает, что i-му игроку «выгодно» участвовать в контрсанкции, ибо тогда он может достичь (по теореме Гирша и Бендиксона) самого большого (для себя) выигрыша.

Заключение

В настоящей статье рассматривается (в (1) и (2)) бескоалиционная игра N лиц $(N > 2)$ в нормальной форме. Такая математическая модель может возникнуть, например, при распределении одной инвестиции в несколько, объединенных тем или иным образом предприятий. Показано, что в такой игре (1) и (2) не существует как равновесия по Нэшу, так и по Бержу, но существуют равновесие угроз и контругроз, а также, введенное в статье, равновесие санкций и контрсанкций. Оба этих равновесия максимальны по Парето, обладают достоинствами общепризнанного равновесия по Нэшу (устойчивостью к отклонению отдельных игроков и совпадает с седловой точкой в антагонистическом случае). Но, в отличие от равновесия по Нэшу, множество их внешне и внутренне устойчиво. Мы надеемся, что эта статья привлечет внимание и побудит далее исследовать равновесия как угроз и контругроз, так и санкций и контрсанкций.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, https://rscf.ru/project/23-21-00539/.

Литература

1. Nash, J. Equilibrium points in N-person games / J. Nash // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1950. – Vol. 36, no. 1. – P. 48–49.

2. Nash, J. Non-cooperative games / J. Nash // The Annals of Mathematics, Second Series. – 1951. – Vol. 54, no. 2. – P. 286–295

3. Мамедов, М. Б. О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето / М.Б. Мамедов // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук. – 1983. – Т. 4, № 2. – С. 11–17.

4. Подиновский, В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Физматлит, 2007. – 255 с.

5. Case, J.H. A Class of Games Having Pareto Optimal Nash Equilibrium / J.H. Case // J. Optimiz. Theory Appl. – 1974. – Vol. 13, no. 3. – P. 378–385.

6. Salukvadze M.E., Zhukovskiy V.I. The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics / M.E. Salukvadze, V.I. Zhukovskiy – Birkhäuser Cham, 2020. – 272 p.

7. Жуковский, В.И. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры: учебное пособие для ВУЗов / В.И. Жуковский, А.А. Чикрий. – М.: Юрайт, 2017. – 322 с.

8. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1984. – 456 с.

9. Жуковский, В.И. Равновесные управления многокритериальных динамических задач / В.И. Жуковский, Н.Т. Тынянский. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 224 с.

10. Вилкас, Э.И. Формализация проблемы выбора теоретико-игрового критерия оптимальности / Э.И. Вилкас // Математические методы в социальных науках: Сб. статей. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН Лит. ССР, 1972. – Вып. 2. – С. 9–55.

11. Вилкас, Э.И. Решения: теория, информация, моделирование / Э.И. Вилкас, Е.З. Майминас. – М.: Радио и связь, 1981. – 328 с.

12. Льюс, Р. Д. Игры и решения. / Р. Д. Льюс, Х. Райфа. – М.: Иностранная литература, 1961. – 642 с.

13. Оуэн, Г. Теория игр / Г. Оуэн. – М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2010. – 216 с.

14. Смольяков, Э.Р. Теория конфликтных равновесий / Э.Р. Смольяков. – М.: УРСС, 2005. – 301 с.

15. Вайсборд, Э.М. О коалиционных дифференциальных играх / Э.М. Вайсборд // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 613–623.

16. Вайсборд, Э.М. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Э.М. Вайсборд, В.И. Жуковский. – М.: Советское радио, 1980. – 304 с.

17. Жуковский, В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз / В.И. Жуковский. – М.: КРАСАНД, 2010. – 192 с.

18. Кузнецов, С.А. Большой толковый словарь русского языка / С.А. Кузнецов. – СПб, М.: Норинт, Рипол классик, 2008. – 1534 с.

19. Rashkov, P.I. Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Spase / P.I. Rashkov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. – P. 91–99.

20. Tersian, St.A. On the *Z*-Equilibrium Points in a Differential Game / St.A. Tersian // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. – P. 106–111.

21. Zhukovskiy, V.I. Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games / V.I. Zhukovskiy // Mathematical Methods in Operations Research. – Sofia: Bulgarian Academy of Sciences. – 1985. – P. 103–195.

22. Dochev, D.T. Existence of *Z*-Equilibrium in a Differential Game with Delay / D.T. Dochev, N.V. Stojanov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. – P. 64–72.

23. Gaidov, S.D. *Z*-Equilibrium in Stochastic Differential Game / S.D. Gaidov // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. – P. 53–63.

24. Biltchev, S.J. ε- *Z*- Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System / S.J. Biltchev // Many Players Differential Game. – Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984. – P. 47–52.

25. Воеводин, В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

26. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

27. Пароди, М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение / М. Пароди. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 170 с.

28. Hursch A. Sup les Racines D'une Equation Fondamentale / A. Hursch, I. Bendikson // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – pp. 367–370.

29. Frobenius G. Uber Matrizen aus Positiven Elementen / G. Frobenius. – Preuss. Acad. Wissenschaften. – 1909. – P. 471–476.

30. Parker, W.V. The Characteristic Roots of a Matrix / W.V. Parker // Duke Math J. – 1937. – Vol. 3, no. 1. – P. 484–487.

31. Жуковский, В.И. Дифференциальная игра трех лиц, в которой не существует равновесия по Нэшу, но имеется равновесие угроз и контругроз / В.И. Жуковский, Л.В. Смирнова, Ю.Н. Житенева, Ю.А. Бельских // ТВИМ. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 39–66.

32. Жуковский, В.И. К индивидуальной устойчивости Паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной игре с нетрансферабельными выигрышами / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев, Л.В. Жуковская, И.С. Стабулит // Математическая теория игр и ее приложения. – 2021. – Т. 13, № 1. – С. 89–101.

Поступила в редакцию 20 сентября 2024 г.

Сведения об авторах

Жуковский Владислав Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра оптимального управления факультета ВМиК, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115.

Жуковская Лидия Владиславовна – доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161.

Кудрявцев Константин Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического обеспечения информационных технологий, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация; доцент, кафедра моделирования и системного анализа, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: kudriavtcevkn@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490.

Самсонов Сергей Петрович– кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптимального управления факультета ВМиК, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: samsonov@cs.msu.su.

Смирнова Лидия Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информатики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация, e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8366-4675.

Bulletin of the South Ural State University Series "Mathematics. Mechanics. Physics" 2025, vol. 17, no. 1, pp. 5–20

DOI: 10.14529/mmph250101

THE PARETO EQUILIBRIUM OF OBJECTIONS AND COUNTEROBJECTIONS IN LINEAR-QUADRATIC GAMES OF N PERSON

V.I. Zhukovskiy[1], L.V. Zhukovskaya[2], K.N. Kudryavtsev[3,4], S.P. Samsonov[1], L.V. Smirnova[5]
[1] Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[2] Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
[3] South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
[4] Finance University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation
[5] State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuevo, Russian Federation
E-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Abstract. Publications on mathematical game theory with many (not less than 2) players can be conditionally distributed in four directions: non-cooperative, hierarchical, cooperative and coalition games. The last two, in turn, are divided into games with side and non-side payments and games with transferable and nontransferable payoffs, respectively. If the first ones are actively studied (St. Petersburg State Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, St. Petersburg Institute of Economics and Mathematics, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre RAS), the games with non-transferable payoffs are not covered. The paper proposes the conception of objections and counter-objections. The initial investigations were published in two monographs of E.I. Vilkas, the Lithuanian mathematician (the student of N.N. Vorobjev, the professor of St. Petersburg University). For the differential games this conception was first applied by E.M. Waisbord in 1974, then it was continued by the first author of the present article together with E.M. Waisbord in the book *Introduction to the theory of differential games of n-persons and its application* (1980), and in the monograph *Equilibrium of objections and counterobjections* (2010) by V.I. Zhukovskiy. The paper proves that in epy mathematical model there is no Nash equilibrium but there are equilibria of objections and conterobjections and simultaneously Pareto maximality.

Keywords: non-cooperative games; Nash equilibrium; Berge equilibrium; equilibrium of objections and counterobjections; sanctions and countersanctions; Pareto optimality.

References

1. Nash J. Equilibrium Points in *N*-Person Games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1950. Vol. 36, no. 1, pp. 48–49. https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48

2. Nash J. Non-Cooperative Games. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 1951, Vol. 54, no. 2, pp. 286–295.

3. Mamedov M.B. *O ravnovesii po Neshu situatsii, optimal'noy po Pareto* (About the Nash Equilibrium of the Pareto Optimal Situation). *Izv. AN Azerbajdzhana. Seriya fiz.-tekh. nauk*, 1983, Vol. 4, no. 2, pp. 11–17. (in Russ.).

4. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* (Pareto Optimal Solution of Multicriteria Problems). Moscow: Fizmatlit, 2007, 255 p. (in Russ.).

5. Case J. H. A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium. *J. Optim. Theory Appl.*, 1974. Vol. 13, no. 3. pp. 378–385. DOI: 10.1007/bf00934872

6. Salukvadze M. E., Zhukovskiy V. I. The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics. Birkhäuser Cham, 2020, 272 p. DOI: 10.1007/978-3-030-25546-6.

7. Zhukovskiy V.I., Chikriy A.A. *Differentsial'nye uravneniya. Lineyno-kvadratichnye differentsial'nye igry* (Differential equations. Linear-quadratic differential games). Moscow, Yurayt Publ., 2017, 322 p. (in Russ.).

8. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Positional-differential games). Moscow, Nauka Publ., 1984, 456 p. (in Russ.) [Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York, Springer, 1988, 517 p.]

9. Zhukovskiy V.I., Tynyanskiy N.T. *Ravnovesnye upravleniya mnogokriterial'nykh dinamicheskikh zadach* (Equilibrium control of multicriteria dynamic problems), Moscow: Izdatel'stvo MGU Publ., 1984, 224 p. (in Russ.).

10. Vilkas E.I. Formalizatsiya problemy vybora teoretiko-igrovogo kriteriya optimal'nosti (Formalization of the Problem of Choosing a Game-Theoretic Criterion of Optimality). *Matematicheskie metody v sotsial'nykh naukakh: sb. statey.* (Mathematical Methods in Social Sciences: a collection of articles). Vil'nyus, Institut matematiki i kibernetiki AN Lit. SSR Publ., 1972, Iss. 2, pp. 9–55. (in Russ.).

11. Vilkas E.I., Mayminas E.Z. *Resheniya: teoriya, informatsiya, modelirovanie* (Solutions: theory, information, modeling). Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981, 328 p. (in Russ.).

12. Luce R.D., Raiffa H. *Games and decisions*. New York, John Wiley and Sons, Inc, 1957, 509 p.

13. Owen G. *Game theory*. New York: Academic Press, 1995, 447 p.

14. Smol'yakov E.R. *Teoriya konfliktnykh ravnovesiy* (Theory of Conflict Equilibria). Moscow, URSS Publ, 2005, 301 p. (in Russ.).

15. Vaisbord E.M. O koalicionnyh differencial'nyh igrah (Coalition Differential Games). *Differ. Uravn.*, 1974, Vol. 10, no. 4, pp. 613–623. (in Russ.).

16. Vaisbord E.M., Zhukovskii V.I. *Introduction to Multi Player Differential Game and Their Application*. New York etc., Gordon and Breach, 1988, 581 p.

17. Zhukovskiy V.I. *Vvedenie v differentsial'nye igry pri neopredelennosti. Ravnovesie ugroz i kontrugroz* (Introduction to Differential Games under Uncertainty. The Equilibrium of Objections and Counterobjections). Moscow, KRASAND Publ., 2010, 192 p. (in Russ.).

18. Kuznetsov S.A. *Bol'shoy tolkovyy slovar' russkogo yazyka* (Large Explanatory Dictionary of the Russian Language). St. Petersburg, Moscow, Norint Publ., Ripol klassik Publ., 2008, 1534 p. (in Russ.).

19. Rashkov P.I. Sufficient Conditions for Z-Equilibrium in a Differential Game in Banach Spase. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984, pp. 91–99.

20. Tersian St.A. On the Z-Equilibrium Points in a Differential Game. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984, pp. 106–111.

21. Zhukovskiy V.I. Some Problems of Non-Antagonistic Differential Games. *Mathematical Methods in Operations Research*. Sofia: Bulgarian Academy of Sciences, 1985, pp. 103-195

22. Dochev D.T., Stojanov N.V. Existence of *Z*-Equilibrium in a Differential Game with Delay. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rousse, Technical Univ., 1984, pp. 64–72.

23. Gaidov S.D. *Z*-Equilibrium in Stochastic Differential Game. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rousse: Technical Univ., 1984, pp. 53–63.

24. Biltchev S.J. ε- *Z*- Equilibrium in a Differential Game Described by a Parabolic System. *Many Players Differential Game*. Bulgaria, Rousse, Technical Univ., 1984, pp. 47–52.

25. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. *Matritsy i vychisleniya* (Matrices and Calculations). Moscow, Nauka Publ., 1984, 320 p. (in Russ.).

26. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* (Theory of Matrices). Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 560 p. (in Russ.).

27. Parodi M. La Localisation des Valeurs Caractéristiques des Matrices et ses Applications. Paris, Gauthier-Villars, 1959, 172 p.

28. Hursch A., Bendikson I. Sup les Racines d'une Equation Fondamentale. Acta Math., 1902, Vol. 25. pp. 367–370. DOI: 10.1007/BF02419031

29. Frobenius G. Über Matrizen aus Positiven Elementen. Preuss. Acad. Wissenschaften, 1909, pp. 471–476.

30. Parker W.V. The Characteristic Roots of a Matrix. *Duke Math J.*, 1937, Vol. 3, no. 1, pp. 484–487. DOI:10.1215/S0012-7094-37-00338-7

31. Zhukovskii V.I., Smirnova L.V., Zhiteneva Yu.N., Bel'skikh Yu.A. Differential Game of Three Persons in which Nash Equilibrium doesn't Exist but Equilibrium of Objections and Counterobjection is Present. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2019, Vol. 43, Iss. 2, pp. 39–66. (in Russ.).

32. Zhukovskii V.I., Kudryavtsev K.N., Zhukovskaya L.V., Stabulit I.S. To the Individual Stability of Pareto Equilibrium of Objections and Counterobjections in a Coalition Differential Positional 3-Person Game without Side Payments. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2021, Vol. 13, Iss. 1, pp. 89–101. (in Russ.).

Received September 20, 2024

Information about the authors

Zhukovsky Vladislav Iosifovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Optimal Control, Faculty of VMiK, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhkvlad@yandex.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9594-0115.

Zhukovskaya Lidiya Vladislavovna is Dr. Sc. (Economics), Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Central Economic and Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, e-mail: zhukovskaylv@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161.

Kudryavtsev Konstantin Nikolaevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Support for Information Technologies, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation; Associate Professor, Department of Modeling and System Analysis, Finance University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation, e-mail: kudriavtcevkn@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9279-4490.

Samsonov Sergey Petrovich Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Optimal Control, Faculty of VMiK, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation, e-mail: samsonov@cs.msu.su, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3237-7091.

Smirnova Lidiya Viktorovna, Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuevo, Russian Federation, Email: smirnovalidiya@rambler.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8366-4675.