УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph250102

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ТИПИЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ С НУЛЕВОЙ (m – 1)-СТРУЕЙ

В.Ш. Ройтенберг
Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Согласно теореме Гробмана–Хартмана динамическая система, задаваемая конечномерным векторным полем в окрестности особой точки, топологически эквивалентна (и даже топологически сопряжена) динамической системе, задаваемой линеаризованным векторным полем в типичном случае, когда собственные значения матрицы линейной части поля в особой точке имеют ненулевые действительные части. Топологическая классификация таких особых точек простая: число собственных значений с отрицательной действительной частью является полным топологическим инвариантом. В настоящей работе дается следующее обобщение этих результатов. Показано, что для векторного поля на плоскости, имеющего нулевую (*m* – 1)-струю в особой точке, *m*-струя (*m* > 1) в «типичном случае» определяет топологический тип особой точки. Дана топологическая классификация таких особых точек.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости; динамическая система; особая точка; топологическая эквивалентность; топологическая классификация.

Введение. По теореме Гробмана–Хартмана [1–3] C^2-векторное поле $\vec{v}(z) = Az + o(|z|)$, $z \in \mathbf{R}^n$ в типичной ситуации, когда собственные значения матрицы A имеют ненулевые действительные части, топологически эквивалентно в некоторой окрестности особой точки $z = 0$ его «главной» части – линейному векторному полю $\vec{v}_0(z) = Az$. В таком случае имеется топологическая классификация векторных полей $\vec{v}(z)$ в окрестности особой точки: число собственных значений A с отрицательной действительной частью – полный топологический инвариант [3].

Дадим обобщение этих результатов на случай, когда «главная» часть векторного поля $\vec{v}(z)$, $z \in \mathbf{R}^2$ является однородным полиномиальным векторным полем степени $m \geq 2$.

Пусть C^{m+1}–векторное поле $\vec{v}(x,y) = P(x,y)\partial/\partial x + Q(x,y)\partial/\partial y$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ имеет нулевую $(m-1)$-струю $(m \geq 2)$ в особой точке $O = (0,0)$, то есть функции P и Q имеют нулевые многочлены Тейлора $(m-1)$-й степени в O. Тогда

$$P(x,y) = P_m(x,y) + p(x,y), \quad Q(x,y) = Q_m(x,y) + q(x,y),$$

где

$$P_n(x,y) = \sum_{i=0}^{m} a_{i,m-i} x^i y^{m-i}, \; Q_n(x,y) = \sum_{i=0}^{m} b_{i,m-i} x^i y^{m-i}$$

– однородные многочлены степени m,

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{m} p_{i,m-i}(x,y) x^i y^{m-i}, \; q(x,y) = \sum_{i=0}^{m} q_{i,m-i}(x,y) x^i y^{m-i},$$

а $p_{i,m-i}, q_{i,m-i}$ – C^1-функции, $p_{i,m-i}(0,0) = q_{i,m-i}(0,0) = 0$.

Однородное полиномиальное векторное поле $\vec{v}_m(x,y) = P_m(x,y)\partial/\partial x + Q_m(x,y)\partial/\partial y$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ назовем *главной частью* векторного поля $\vec{v}$ в особой точке O. Множество всех таких векторных полей обозначается HP_m [4].

Динамические системы на проективной плоскости $\mathbf{RP}^2$, задаваемые типичными однородными полиномиальными векторными полями, изучались в [4–6].

В предлагаемой заметке показано, что в «типичном» случае векторное поле $\vec{v}$ в некоторой окрестности особой точки O топологически эквивалентно его главной части $\vec{v}_m$, и дана локальная топологическая классификация таких векторных полей.

1. Условия топологической эквивалентность $\vec{v}$ и $\vec{v}_m$. Обозначим

$R(\varphi)=P_m(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi+Q_m(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi$, $\Phi(\varphi)=Q_m(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi-P_m(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi$.

Ясно, что

$$R(\varphi+\pi)\equiv(-1)^{m+1}R(\varphi),\ \Phi(\varphi+\pi)\equiv(-1)^{m+1}\Phi(\varphi). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется одно из двух следующих условий:*

(А) *Функция* $\Phi(\varphi)$ *имеет нули, и все они простые. Если* $\Phi(\varphi_0)=0$, *то* $R(\varphi_0)\neq 0$.

(Б) *Функция* $\Phi(\varphi)$ *не имеет нулей, при этом* $\chi:=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{R(\varphi)}{\Phi(\varphi)}d\varphi\neq 0$.

Тогда существуют окрестности U *и* V *точки* O *и гомеоморфизм* $h:U\to V$, *переводящий ориентированные траектории поля* $\vec{v}\big|_U$ *в ориентированные траектории поля* $\vec{v}_m\big|_U$.

Доказательство. В полярных координатах ρ,φ ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$)

$$\vec{v}(x,y)=\rho^m(R(\varphi)+R_1(\rho,\varphi))\partial/\partial\rho+\rho^{m-1}(\Phi(\varphi)+\Phi_1(\rho,\varphi)),$$

где $R_1(\rho,\varphi)$ и $\Phi_1(\rho,\varphi)$ – C^1-функции, 2π-периодические по φ, $R_1(0,\varphi)=\Phi_1(0,\varphi)\equiv 0$.

На цилиндре $C:=[0,\infty)\times\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ рассмотрим векторные поля

$\vec{v}^*(\rho,\varphi)=\rho(R(\varphi)+R_1(\rho,\varphi))\partial/\partial\rho+(\Phi(\varphi)+\Phi_1(\rho,\varphi))\partial/\partial\varphi$ и $\vec{v}_m^*(\rho,\varphi)=\rho R(\varphi)\partial/\partial\rho+\Phi(\varphi)\partial/\partial\varphi$.

Они имеют инвариантную окружность $\Gamma_0:=\{0\}\times\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Отображение

$$\mathrm{pr}:C\ni(\rho,\varphi)\mapsto(x,y)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\in\mathbf{R}^2$$

переводит траектории поля $\vec{v}^*$ ($\vec{v}_m^*$) в траектории поля $\vec{v}$ ($\vec{v}_m$).

При условии (А) все особые точки векторного поля $\vec{v}_m^*$ лежат на Γ_0 и имеют вид $(0,\varphi_i)$, где φ_i – нули функции Φ, а их характеристические показатели $R(\varphi_i)\neq 0$ и $\Phi'(\varphi_i)\neq 0$. Эти точки являются особыми и для векторного поля $\vec{v}^*$ с теми же характеристическими показателям. Так как $\forall\varphi\in\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ $\Phi^2(\varphi)+R^2(\varphi)>0$, то $(R(\varphi)+R_1(\rho,\varphi))^2+(\Phi(\varphi)+\Phi_1(\rho,\varphi))^2>0$ в точках некоторой окрестности Γ_0, и потому в этой окрестности у поля $\vec{v}^*$ нет других особых точек. Согласно [7] векторные поля $\vec{v}_m^*$ и $\vec{v}^*$ топологически эквивалентны в окрестности Γ_0: существует гомеоморфизм $h^*:U^*\to V^*$, где U^* и V^* некоторые окрестности Γ_0 в C, тождественный на Γ_0 и переводящий траектории поля $\vec{v}^*\big|_{U^*}$ в траектории поля $\vec{v}_m^*\big|_{V^*}$. Множества $U:=\mathrm{pr}(U^*)$ и $V:=\mathrm{pr}(V^*)$ – окрестности особой точки O. Равенства $h(z):=\mathrm{pr}(h^*(\mathrm{pr}^{-1}(z)))$ для $z\in U\setminus\{O\}$ и $h(O):=O$ задают гомеоморфизм $h:U\to V$, переводящий траектории поля $\vec{v}\big|_U$ в траектории поля $\vec{v}_m\big|_V$.

При условии (Б) Γ_0 является замкнутой траекторией обоих векторных полей $\vec{v}_m^*$ и $\vec{v}^*$ с характеристическим показателем $\chi\,\mathrm{sgn}\,\Phi(0)\neq 0$ [8, с. 126]. Следовательно, векторные поля $\vec{v}_m^*$ и $\vec{v}^*$ топологически эквивалентны в некоторых окрестностях Γ_0. Но тогда $\vec{v}_m$ и $\vec{v}$ топологически эквивалентны в некоторых окрестностях точки O.

Замечание 1. m-струи в точке O векторных полей, удовлетворяющие хотя бы одному из условий (А) или (Б), образуют открытое и всюду плотное множество в множестве всех m-струй векторных полей с нулевой $(m-1)$-струей в точке O [4]. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая особая точка *типична* для особых точек векторных полей с нулевой $(m-1)$-струей.

Замечание 2. Условие (Б) может выполняться только, если m нечетно [4].

2. Топологическая классификация однородных полиномиальных векторных полей, удовлетворяющих условиям (А) и (Б). В [6] дана топологическая классификация фазовых портретов однородных полиномиальных векторных полей, удовлетворяющих условиям (А) и (Б), на проективной плоскости. Конечно, топологическая эквивалентность фазовых портретов на проективной плоскости влечет их топологическую эквивалентность в $\mathbf{R}^2$ и в окрестностях особой точки, но обратное утверждение, конечно, неверно.

Полным топологическим инвариантом особой точки полиномиального векторного поля является ее *локальная схема* [7, с. 351–356]. Опишем возможные локальные схемы особой точки O полей $\vec{v}_m \in \mathrm{HP}_m$ при условиях (А) и (Б).

Так как $\Phi(\varphi)$ – однородный тригонометрический многочлен степени $m+1$ с простыми нулями, то число $2n$ особых точек поля $\vec{v}_m^*$ четно, $n \le m+1$, $n = m+1\,(\mathrm{mod}\,2)$. Пусть φ_1, $\varphi_2,\ldots,\varphi_{2n}, \varphi_{2n+1} = \varphi_1 \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ все нули функции Φ, пронумерованные в циклическом порядке. Тогда условия $\varphi = \varphi_i$, $\rho > 0$ задают траекторию L_i^* (соотв. L_i) поля $\vec{v}_m^*$ (соотв. $\vec{v}_m$) ω-предельную к особой точке $O_i = (\varphi_i, 0)$ (соотв. O) при $R(\varphi_i) < 0$ и α-предельную, если $R(\varphi_i) > 0$.

Если две последовательные точки O_k ($k = i$ и $k = i+1$) седла, то есть $\Phi'(\varphi_k)R(\varphi_k) < 0$, то L_i и L_{i+1} орбитно неустойчивые траектории поля $\vec{v}_m$ – *сепаратрисы* особой точки O, ограничивающие *гиперболический сектор* точки O. Все траектории, принадлежащие этому сектору, выходят из любой окрестности особой точки при возрастании и убывании времени. Вследствие (1) число сепаратрис (если они имеются) четно, и если их пронумеровать в циклическом порядке: $L_{i_1}, L_{i_2},\ldots, L_{i_{2s}}, L_{i_{2s+1}} = L_{i_1}$, то $\varphi_{i_{k+s}} = \varphi_{i_k} + \pi$ для $k = 1,\ldots,s$.

Если две последовательные точки O_k ($k = i$ и $k = i+1$) узлы, то есть $\Phi'(\varphi_k)R(\varphi_k) > 0$, то L_i и L_{i+1} ограничивают *эллиптический сектор*, состоящий из траектории поля $\vec{v}_m$, двоякоасимптотических к O. Ввиду (1) число эллиптических секторов (если они имеются) четно, и для каждого эллиптического сектора есть эллиптический сектор, симметричный ему относительно O.

Если область $\mathbf{R}^2$, заданная условием $\varphi_{i_k} < \varphi < \varphi_{i_{k+1}}$ ($i_{k+1} \ne i_k + 1$), не содержит эллиптических секторов, то все траектории, ей принадлежащие, и ограничивающие ее сепаратрисы L_{i_k} и $L_{i_{k+1}}$ либо ω-предельны, либо α-предельны к O. Эта область является, соответственно, либо устойчивым, либо неустойчивым *параболическим сектором* особой точки O.

Поставим в соответствие особой точке O циклическую последовательность

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ldots,\sigma_r,\ \sigma_{r+1} = \sigma_1, \tag{2}$$

где $\sigma_i \in \{\alpha, \omega, e, sn, un\}$, по следующему правилу:

1. Положим $r = 1$, а $\sigma_1 = sn$ ($\sigma_1 = un$) в случае (А), если точка O не имеет ни сепаратрис, ни эллиптических секторов, то есть является устойчивым (неустойчивым) топологическим узлом, и в случае (Б), если $\chi\,\mathrm{sgn}\,\Phi(0) < 0$ ($\chi\,\mathrm{sgn}\,\Phi(0) > 0$), то есть O является устойчивым (неустойчивым) фокусом, а потому и устойчивым (неустойчивым) топологическим узлом.

2. Если у точки O существуют сепаратрисы или эллиптические секторы, то произвольным образом пронумеруем их в циклическом порядке номерами от 1 до r и поставим в соответствие номеру k символ α (ω), если такой номер имеет α (ω)-сепаратриса, и символ e, если такой номер имеет эллиптический сектор.

В случае 2) число членов r в последовательности (2) четно: $r = 2p$. Максимальное значение r достигается в случае, когда точка O не имеет параболических секторов, а гиперболических секторов, не имеющих друг с другом общих граничных лучей, максимальное число. Это значение $r_M = 3n$, если n четно и $r_M = 3n-1$, если n нечетно.

Все последовательности, получающиеся из последовательности (2) циклической перестановкой, будем считать ей эквивалентными. Класс всех последовательностей, эквивалентных последовательности (2), называется *локальной схемой* особой точки O.

Из [7] следует

Теорема 2. *Для векторных полей,* $\vec{v}_m^1$ *и* $\vec{v}_m^2$, *принадлежащих* HP_m *и удовлетворяющих одному из условий* (А) *или* (Б), *существуют окрестности* U_1 *и* U_2 *точки* O *и сохраняющий ориентацию гомеоморфизм* $h: U_1 \to U_2$, *переводящий ориентированные траектории поля* $\vec{v}_m^1$ *в ориентированные траектории поля* $\vec{v}_m^2$ *тогда и только тогда, когда эти векторные поля имеют одинаковые локальные схемы точки* O.

Из (1) получаем для последовательности (2), задающей локальную схему,

(У1) *Если* $\sigma_i = e$ *(соотв.* $\sigma_i = \alpha$ *и* $\sigma_i = \omega$*),* $i = 1,...,p$, *то* $\sigma_{i+p} = e$ *(соотв.* $\sigma_{i+p} = \alpha$ *и* $\sigma_{i+p} = \omega$ *в случае нечетного* m, $\sigma_{i+p} = \omega$ *и* $\sigma_{i+p} = \alpha$ *в случае четного* m*).*

Из определения сепаратрисы следует

(У2) *Если* $\sigma_i = \alpha$ *(*$\sigma_i = \omega$*),* $i = 1,...,r$, *то или следующий элемент последовательности* σ_{i+1} *или предыдущий* σ_{i-1} *равен* ω *(*α*).* (Здесь $\sigma_0 = \sigma_r$).

Из [6] следует, что для любой последовательности $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{2n})$, $n \le m+1$, $n = m+1\,(\mathrm{mod}\,2)$, где $\tau_i \in \{-1, 1\}$, удовлетворяющей условию $\forall i \in \{1,...,n\}$ $\tau_{i+n} = \tau_i$ при нечетных m и $\tau_{i+n} = -\tau_i$ при четных m, за исключением последовательности с $\tau_i = (-1)^i$ при $n = m+1$, существует векторное поле $\vec{v}_m \in \mathrm{HP}_m$, для которого нули функции $\Phi(\varphi)$ образуют циклическую последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$, $\varphi_{2n+1} = \varphi_1 \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ такую, что $\operatorname{sgn}\Phi'(\varphi_i) = (-1)^i$, $\operatorname{sgn} R(\varphi_i) = \tau_i$. В [6] приведена явная конструкция такого поля. На языке локальных схем получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Любая циклическая последовательность* (2), *где* $r = 1$, *а* $\sigma_1 = sn$ $(\sigma_1 = un)$ *или* $r = 2p \le r_M$ *и выполняются условия* (У1) *и* (У2), *задает локальную схему точки* O *некоторого векторного поля* $\vec{v}_m \in \mathrm{HP}_m$, *удовлетворяющего условию* (А).

Литература

1. Гробман, Д.М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений / Д.М. Гробман // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128, № 5. – С. 880–881.

2. Hartman, F. A Lemma in the Theory of Structural Stability of Differential Equations / F. Hartman // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 11. – P. 610–620.

3. Палис, Ж.П. Геометрическая теория динамических систем. Введение / Ж.П. Палис, В. Ди Мелу. – М.: Мир, 1986. – 301 с.

4. Ройтенберг, В.Ш. О типичных однородных векторных полях на плоскости / В.Ш. Ройтенберг // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 2. – С. 15–26.

5. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости / В.Ш. Ройтенберг // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. Математика. Физика. – 2019. – Т. 51, № 2. – С. 192–202.

6. Ройтенберг, В.Ш. О структуре множества грубых однородных полиномиальных векторных полей на плоскости / В.Ш. Ройтенберг // Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 52, № 3. – С. 204–213.

7. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

8. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 487 с.

Поступила в редакцию 14 октября 2024 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, e-mail: vroitenberg@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 1, pp. 21–25

DOI: 10.14529/mmph250102

ON THE TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF GENERIC SINGULAR POINTS OF A PLANAR VECTOR FIELD WITH THE ZERO (m–1)-JET

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Abstract. According to the Grobman-Hartman theorem, a dynamical system defined by a finite-dimensional vector field in the neighborhood of a singular point is topologically equivalent (and even topologically conjugate) to the dynamical system defined by the linearized vector field in the generic case when the eigenvalues of the matrix of the linear part of the field at the singular point have nonzero real parts. The topological classification of such singular points is simple: the number of eigenvalues with negative real part is a complete topological invariant. The paper proposes the following generalization of these results. It shows that for a planar vector field with a zero (m–1)-jet at a singular point, the m-jet ($m > 1$) in the "generic case" determines the topological type of the singular point. It also presents a topological classification of such singular points.

Keywords: vector field on the plane; dynamical system; singular point; topological equivalence; topological classification.

References

1. Grobman D.M. O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravneniy (On Homeomorphism of Systems of Differential Equations). *Dokl. AN SSSR* (Rep. Acad. Sci. USSR), 1959, Vol. 128, no. 5, pp. 880–881. (in Russ.).

2. Hartman F. A Lemma in the Theory of Structural Stability of Differential Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1960, Vol. 11, pp. 610–620. DOI:10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7

3. Palis J., Melo W. *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction*. New York, Heldenberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982, 198 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5703-5

4. Roitenberg V.Sh. On Generic Homogenous Vector Fields on the Plane. *University proceedings. Volga region. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, no. 2, pp. 15–26. (in Russ.). DOI: 10.21685/2072-3040-2018-2-2

5. Roitenberg V.Sh. On Bifurcations of Homogeneous Polynomial Vector Fields on the Plane. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics*, 2019, vol. 51, no. 2. pp. 192–202. (in Russ.). DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-192-202

6. Roitenberg V. Sh. On the Structure of the Set of Homogeneous Polynomial Vector Fields on the Plane. *Applied Mathematics & Physics*, 2020, Vol. 52, Iss. 3, pp. 204–213. (in Russ.). DOI: 10.18413/2687-0959-2020-52-3-204-213

7. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 524 p.

8. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane*. New York, J. Wiley & Sons, 1973. [Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Teoriya bifurkatsiy dinamicheskikh sistem na ploskosti* (The Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on the Plane). Moscow, Nauka Publ., 1967, 487 p. (in Russ.).]

Received October 14, 2024

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation, e-mail: vroitenberg@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998.