

## ЗАМЕЧАНИЕ О ФОРМУЛАХ ДЛЯ СКОРОСТИ ВОЛН РЭЛЕЯ

**Е.В. Голубев**

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация  
e-mail: golubev@susu.ru

**Аннотация.** Представлен вывод выражения для скорости поверхностных волн на границе упругого полупространства (волн Рэлея) через значения скоростей объемных упругих волн. Получены обобщенные формулы Нкемзи и Малишевского. Приведено решение уравнения, выраженное через тригонометрические и гиперболические функции. Рассмотрены некоторые приближенные формулы.

**Ключевые слова:** поверхностные волны; скорость волны Рэлея; корни характеристического уравнения; точное решение; приближенная формула.

Скорость волны Рэлея в задачах акустики однородных упругих сред может быть найдена с помощью выражения  $c_r = c_t \xi = c_t \sqrt{x}$ , где  $x$  – единственный действительный корень, принадлежащий интервалу  $[0,1)$ , уравнения [1, с. 136]:

$$x^3 - 8x^2 + 8x(3 - 2u^2) - 16(1 - u^2) = 0, \quad (1)$$

где сделана замена  $x = \xi^2$  и введены обозначения:  $u^2 = (c_t/c_l)^2$ ,  $c_r, c_t, c_l$  – скорости поверхностных, поперечных и продольных волн соответственно.

### Решение алгебраическим методом

Решаемое уравнение имеет вид  $f(x) = 0$ , где  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a = 1$ ,  $b = -8$ ,  $c = 8(3 - 2u^2)$ ,  $d = -16(1 - u^2)$ . Дискриминант  $\Delta = -4b^3d + b^2 + c^2 - 4ac^3 + 18abcd - 27a^2d^2 = 128(128u^6 - 340u^4 + 502u^2 - 305) < 0$  при  $u^2 < 1,071$ , и, следовательно, уравнение имеет два комплексно сопряженных корня и один действительный.

Сделаем замену переменных  $x = y - b/3a = y + 8/3$ , тогда уравнение (1) примет вид  $y^3 + py + q = 0$ , где  $p = -8(6u^2 - 1)/3$ ,  $q = -16(45u^2 - 17)/27$ . Применим подстановку Виета  $y = z - p/(3z)$ , которая переводит уравнение в квадратное относительно  $z^3$ :  $z^6 + qz^3 - p^3/27 = 0$ . Получим  $(z^3)_{1,2} = (-9q \mp \sqrt{3}\sqrt{27q^2 - 4p^3})/18$  и  $z_k = \sqrt[3]{(-9q \mp \sqrt{3}\sqrt{27q^2 - 4p^3})/18} \exp(i2\pi k/3)$ , где  $k = 0, 1, 2$  – номер корня. Запишем выражения для корней исходного уравнения:

$$x_k = z_k - \frac{p}{3z_k} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} + \sqrt[3]{\frac{-9q \mp \sqrt{3}\sqrt{27q^2 - 4p^3}}{18}} \exp(i2\pi k/3) - \frac{p \exp(-i2\pi k/3) \sqrt[3]{18}}{3 \sqrt[3]{-9q \mp \sqrt{3}\sqrt{27q^2 - 4p^3}}}.$$

Введем обозначения

$$T = \sqrt{((-64u^2 + 107)u^2 - 62)u^2 + 11}, \quad U_{\pm} = \sqrt[3]{17 - 45u^2 \pm 3\sqrt{3}T}$$

и запишем решения уравнения (1) в виде, аналогичном [2, см. (11)]:

$$x_k = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \left[ U_{\pm} \exp(i2\pi k/3) + \frac{2(6u^2 - 1)}{U_{\pm}} \exp(-i2\pi k/3) \right], \quad k = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Действительный корень уравнения (1) определяется этим выражением при  $k = 0$ :

$$x = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \left[ U_{\pm} + \frac{2(6u^2 - 1)}{U_{\pm}} \right], \quad (3)$$

где в выражении для  $U_{\pm}$  выбор знака произволен.

Для случая «+» формула (3) получена Д. Нкемзи [2, см. (10)], а П.Г. Малишевским формулы (2) и (3) получены из более простых и удобных для вычисления выражений для корней уравне-

ния Рэлея [2, см. (5) и (6); 3, см. (3) и (4); 4, см. (3)–(6)], которые, с учетом наших рассуждений, можно записать в обобщенном виде ( $\gamma = u^2$ ):

$$\begin{aligned} h_1(\gamma) &= 3\sqrt{33 - 186\gamma + 321\gamma^2 - 192\gamma^3}, \\ h_2(\gamma) &= -17 + 45\gamma \pm h_1(\gamma), \quad h_3(\gamma) = 17 - 45\gamma \pm h_1(\gamma), \quad h_4(\gamma) = 1/6 - \gamma, \\ x(\gamma) &= \frac{2}{3} \left[ 4 - \sqrt[3]{h_3(\gamma)} + \text{sign}[h_4(\gamma)] \sqrt[3]{\text{sign}[h_4(\gamma)] \cdot h_2(\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в выражениях для  $h_2(\gamma)$  и  $h_3(\gamma)$  выбор знака, как и в (3), на значение  $x$  не влияет. Связь между (3) и (4) устанавливается путем преобразований, аналогичных приведенным в [2]. При  $\gamma > \gamma_0 \approx 0,321498\dots$  [4], что соответствует переходу подкоренного выражения  $h_1(\gamma)$  к отрицательным значениям, корень остается действительным, так как в квадратных скобках суммируются комплексно сопряженные числа. Для случая выбора знака « $\leftarrow$ », выражение для действительного корня приведено и проанализировано в [5, 6]. Выражения (3) и (4) также можно использовать в аналитическом выражении для производной определителя Рэлея при нахождении вычета, приведенного в [6].

При численной реализации формул (3) и (4) в конкретной системе необходима проверка качества реализации функции извлечения кубического корня из комплексного числа и коррекция ее выбора корня при необходимости. Так, например, в одних системах  $\sqrt[3]{-1} = -1$ , в других – выбирается значение корня, лежащее в первой четверти ( $\text{Re}, \text{Im} \geq 0$ ).

#### Решение с использованием тригонометрических и гиперболических функций

Запишем, следуя работе Г. Холмса [7], решение исходного уравнения  $f(x) = 0$ . Введем обозначения:

$$\begin{aligned} x_N &= -\frac{b}{3a} = \frac{8}{3}, \quad y_N = f(x_N) = \frac{16(17 - 45u^2)}{27}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{3ac - b^2}{9a^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 - 6u^2}, \\ \delta &= i\Delta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{6u^2 - 1}, \quad h = 2a\delta^3 = \frac{32\sqrt{3}}{27} (6u^2 - 1)^{3/2}, \quad H = 2a\Delta^3 = \frac{32\sqrt{3}}{27} (1 - 6u^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

В работах [7, 8] при использовании тригонометрических и гиперболических формул получены выражения для корней в трех случаях, которые реализуются для нашего уравнения на разных интервалах значения параметра  $u^2$ :

$$1) \text{Re}(y_N/h) = 0: \quad x = x_N - 2\Delta \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( \frac{y_N}{H} \right) \right], \text{ т. е.}$$

$$x = \frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 - 6u^2} \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( \frac{17 - 45u^2}{2\sqrt{2}(1 - 6u^2)^{3/2}} \right) \right] \text{ при } u^2 \leq 1/6; \quad (5)$$

$$2) y_N/h > +1: \quad x = x_N - 2\delta \cosh \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left( \frac{y_N}{h} \right) \right], \text{ т. е.}$$

$$x = \frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{6u^2 - 1} \cosh \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left( \frac{17 - 45u^2}{2\sqrt{2}(6u^2 - 1)^{3/2}} \right) \right] \text{ при } 1/6 < u^2 < u_0^2, \quad (6)$$

$$3) |y_N/h| \leq -1: \quad x = x_N + 2\delta \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{y_N}{h} \right) \right], \text{ т. е.}$$

$$x = \frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{6u^2 - 1} \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{17 - 45u^2}{2\sqrt{2}(6u^2 - 1)^{3/2}} \right) \right] \text{ при } u^2 \geq u_0^2, \quad (7)$$

где  $u_0^2 = \gamma_0 \approx 0,321498\dots$ . Формула (7) для уравнения (1) была впервые представлена в [9] и, как (5) и (6), не содержит кубических радикалов или интегральных выражений.

**Построение приближенной формулы для вычисления корня уравнения Рэлея**

Использование приближенных выражений оправдано при недостатке вычислительных мощностей для численного решения исходного уравнения или использования аналитического выражения ввиду его математической сложности, если их погрешность вычисления меньше заданной величины. Обычно, приближенные формулы проще точных аналитических выражений, что позволяет быстро оценить необходимую величину или использовать простое программное обеспечение цифровых двойников и снизить требования к аппаратной части оборудования, сопровождающего технологические процессы.

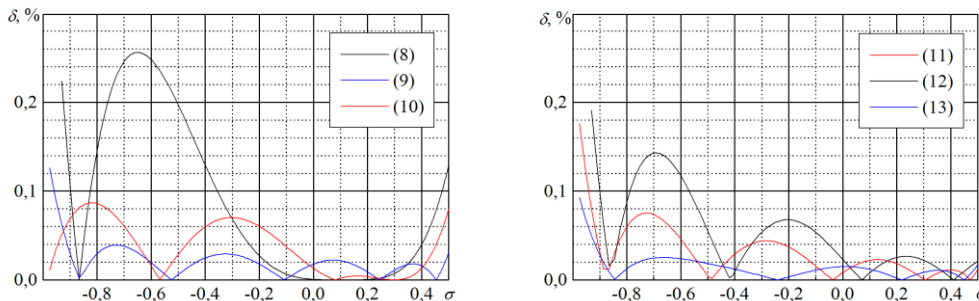
Построение приближенных формул требует интуиции и опыта, например, по графику функции необходимо предложить комбинацию из приближающих ее элементарных функций или предложить преобразование функции и ее переменных для наилучшего ее такого приближения. Также формулы можно конструировать методами математического анализа: заменой переменных, линеаризацией исходного выражения или разложением в ряд по различным, например, ортогональным функциям и т. д.

Для оценки погрешности приближения будем использовать обычную формулу для относительной погрешности:  $\delta = |f_{\text{точн}} - f_{\text{прибл}}| \cdot 100\% / f_{\text{точн}}$ , где  $f_{\text{точн}}$ ,  $f_{\text{прибл}}$  – точное и приближенное значение соответственно.

П.Г. Малишевский в [10] предложил приближать функцию  $\sqrt{x}$  полиномом третьей степени от коэффициента Пуассона  $\sigma = (2\gamma - 1) / 2(\gamma - 1) = (2u^2 - 1) / 2(u^2 - 1)$ . При использовании точной формулы (4) (со знаком «+») и метода наименьших квадратов была получена формула

$$\sqrt{x} \approx 0,874027 + 0,195608\sigma - 0,0425231\sigma^2 - 0,0569549\sigma^3. \tag{8}$$

Погрешность такого приближения не превышает 0,45 % на области определения и 0,1% при  $\sigma \in [0, 0,5]$ , в области  $[0, 0,2]$  относительная погрешность не превышает 0,0006 %. В качестве недостатка можно отметить быстрый рост погрешности вне интервала  $\sigma \in [0, 0,2]$  (см. рисунок).



**Зависимость погрешности приближенных формул (8)–(13) от коэффициента Пуассона  $\sigma$**

Поскольку для очень многих веществ коэффициент Пуассона находится в области  $[0, 0,4]$ , а также за последние 100 лет было открыто много кристаллических и пористых материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона, то можно поставить задачу об уточнении формулы. Будем дальше искать преобразование, которое приведет функцию к виду, который лучше приближается полиномом. Так, замечено, что если аргументом оставить  $\sigma$ , то обратная функция к экспоненте от  $\sqrt{x}$  и обратные тригонометрические и гиперболические функции приближаются полиномом третьей степени с большим коэффициентом корреляции и меньшей дисперсией. Выбор пробных функций был обусловлен в том числе и видом выражений (5)–(7). По возможности будем минимизировать относительную погрешность в «рабочей» области  $\sigma \in [0, 0,4]$  и во вторую очередь – погрешность на всей области определения.

В результате численных экспериментов найдены следующие приближенные формулы:

$$\sqrt{x} \approx \exp(-0,13481767 + 0,22245627\sigma - 0,064405126\sigma^2 - 0,050681185\sigma^3). \tag{9}$$

$$\sqrt{x} \approx \exp(-0,13450658 + 0,221488406\sigma - 0,06617292\sigma^2 - 0,04966605\sigma^3). \tag{10}$$

$$\sqrt{x} \approx \sinh(0,78938470 + 0,14577804\sigma - 0,034075524\sigma^2 - 0,035363364\sigma^3). \tag{11}$$

$$\sqrt{x} \approx \cos(0,50694159 - 0,39660365\sigma - 0,057051772\sigma^2 + 0,040189213\sigma^3). \quad (12)$$

$$\sqrt{x} \approx \tanh(1,3493561 + 0,82668967\sigma + 0,43981743\sigma^2 + 0,11823013\sigma^3). \quad (13)$$

Формула (9) была получена логарифмированием функции  $\sqrt{x(\sigma)}$  и вычислением коэффициентов полинома третьей степени методом наименьших квадратов для  $\sigma \in [-1, 0,5]$ . Для уточнения формулы в рабочей области была попытка построить такую же формулу (10), но проходящую через точку  $\sqrt{x(0,3)}$  и имеющую такую же первую производную в этой точке, что и у точной формулы. Минимизация происходила по первым двум параметрам, третий и четвертый – вычислялись по ним для соблюдения поставленных условий. Формулы (11)–(13) построены аналогично (9). Выражения с  $\sin$ ,  $\cosh$  дают большую погрешность вычислений и не приведены.

Анализ погрешности приближенных формул показывает, что наименьшая погрешность (менее 0,0006 %) в диапазоне  $\sigma \in [0, 0,2]$  у самой простой формулы П.Г. Малишевского (8). Для использования в диапазоне  $[-0,5, 0,5]$  с погрешностью менее 0,02 % и в диапазоне  $[-0,9, 0,5]$  с погрешностью менее 0,03 % можно использовать приближенную формулу (13).

### Заключение

Приведены алгебраическое и тригонометрическое решения исходного кубического уравнения, выраженные через квадрат отношения скоростей объемных волн. Алгебраическое решение получено в виде двух эквивалентных форм, которые сохраняются для всего исследуемого диапазона  $0 \leq u^2 \leq 0,75$ . Решение, записанное через тригонометрические функции и их аналитическое продолжение – гиперболические функции, требует разделения исходного диапазона на три интервала, на которых оно определено различными выражениями. Однако оно не требует работы с комплексными числами и вычисления кубических радикалов. Можно предположить, что разнообразие форм записи точных решений может облегчить рассмотрение задач возбуждения и распространения поверхностных волн в аналитическом виде, построения новых приближенных формул для скорости волн Рэлея и задач дифракции.

### Литература

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
2. Malischewsky, P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters / P.G. Malischewsky // *Geofisica Internacional*. – 2004. – Vol. 43, no. 3. – P. 507–509.
3. Malischewsky, P.G. Discussion Comment to “A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves” by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205] / P.G. Malischewsky // *Wave Motion*. – 2000. – Vol. 31. – P. 93–96.
4. Malischewsky, P.G. Some Special Solutions of Rayleigh’s Equation and the Reflections of Body Waves at a Free Surface / P.G. Malischewsky // *Geofisica Internacional*. – 2000. – Vol. 39, no. 2. – P. 155–160.
5. Mechkour, H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation / H. Mechkour // *Proceedings of the 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2) April 22–27, 2002, Bucharest, Romania*. – P. 96–104.
6. Гуревич, С.Ю. Замечание о вычислении скорости волны Рэлея и производной определителя Рэлея в упругих средах / С.Ю. Гуревич, Е.В. Голубев // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*. – 2023. – Т. 15, № 1. – С. 69–75.
7. Holmes, G.C. The Use of Hyperbolic Cosines in Solving Cubic Polynomials / G.C. Holmes // *The Mathematical Gazette*. – 2002. – Vol. 86, no. 507. – P. 473–477.
8. Nickalls, R.W.D. A New Approach to Solving the Cubic: Cardan’s Solution Revealed / R.W.D. Nickalls // *The Mathematical Gazette*. – 1993. – Vol. 77. – P. 354–359.
9. Rahman, M. Exact Expressions for the Roots of the Secular Equation for Rayleigh Waves / M. Rahman, J.R. Barber // *Journal of Applied Mechanics*. – 1995. – Vol. 62. – P. 250–252.
10. Vinh, P.C. Explanation for Malischewsky’s Approximate Expression for the Rayleigh Wave Velocity / P.C. Vinh, P.G. Malischewsky // *Ultrasonics*. – 2006. – Vol. 45. – P. 77–81.

*Поступила в редакцию 8 декабря 2024 г.*

### Сведения об авторе

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: golubev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2025, vol. 17, no. 1, pp. 48–52*

---

DOI: 10.14529/mmph250106

## NOTES ON FORMULAS FOR THE RAYLEIGH WAVE VELOCITY

**E.V. Golubev**

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation*

*e-mail: golubev@susu.ru*

**Abstract.** The paper derives the expression for the velocity of surface waves on the boundary of an elastic half-space (Rayleigh waves) through the velocities of volume elastic waves. It presents the generalized D. Nkemzi and P.G. Malischewsky's formulas, proposes the solution to the equation expressed through trigonometric and hyperbolic functions and considers some approximate formulas.

**Keywords:** *surface waves; Rayleigh wave velocity; characteristic equation roots; exact solution.*

### References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity* (3rd ed.). Oxford, England: Butterworth Heineemann, 1986, 204 p.
2. Malischewsky P.G. A Note on Rayleigh-Wave Velocities as a Function of the Material Parameters. *Geofisica Internacional*, 2004, Vol. 43, no. 3, pp. 507–509.
3. Malischewsky P.G. Discussion Comment to “A New Formula for the Velocity of Rayleigh Waves” by D. Nkemzi [Wave Motion 26 (1997) 199–205]. *Wave Motion*, 2000, Vol. 31, pp. 93–96.
4. Malischewsky P.G. Some Special Solutions of Rayleigh's Equation and the Reflections of Body Waves at a Free Surface. *Geofisica Internacional*, 2000, Vol. 39, no. 2, pp. 155–160.
5. Mechkour H. The Exact Expressions for the Roots of Rayleigh Wave Equation. *Proc. 2-nd International Colloquium of Mathematics in Engineering and Numerical Physics (MENP-2)* April 22–27, 2002, Bucharest, Romania, pp. 96–104.
6. Gurevich S.Yu., Golubev E.V. A Note on Calculating Rayleigh Wave Velocity and the Derivative of the Rayleigh Determinant in Elastic Media. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2023, Vol. 15, no. 1, pp. 69–75. DOI: 10.14529/mmph230108
7. Holmes G.C. The Use of Hyperbolic Cosines in Solving Cubic Polynomials. *The Mathematical Gazette*, 2002, Vol. 86, no. 507, pp. 473–477.
8. Nickalls R.W.D. A New Approach to Solving the Cubic: Cardan's Solution Revealed. *The Mathematical Gazette*, 1993, Vol. 77, pp. 354–359.
9. Rahman M., Barber J.R. Exact Expressions for the Roots of the Secular Equation for Rayleigh Waves. *Journal of Applied Mechanics*, 1995, Vol. 62, pp. 250–252. DOI: 10.1115/1.2895917
10. Vinh P.C., Malischewsky P.G. Explanation for Malischewsky's Approximate Expression for the Rayleigh Wave Velocity. *Ultrasonics*, 2006, Vol. 45, pp. 77–81.

*Received December 8, 2024*

### Information about the author

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: golubev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.