

## ПРИМЕНЕНИЕ АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК ИНТЕГРАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА ДЛЯ ЕГО РЕДУКЦИИ К ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ

О.Л. Бозиев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация

E-mail: boziev@yandex.ru

**Аннотация.** Целью работы является установление априорных оценок для интегральной нагрузки гиперболического уравнения Кирхгофа, моделирующего некоторые нелинейные колебательные процессы. В рассматриваемом случае нагрузкой является рациональная степень  $m/n$  линейной функции от нормы искомого решения в пространстве  $H^1(\Omega)$ . Для достижения указанной цели производятся интегральные преобразования слагаемых скалярного произведения исходного уравнения и временной производной его решения. Применение интегрального неравенства типа Гронуолла–Беллмана приводит к искомым оценкам. Таким способом установлены априорные неравенства, ограничивающие интегральную нагрузку уравнения Кирхгофа известной функцией, зависящей от правой части уравнения и начальных условий, а также от знака и вида показателя степени. Показан способ редукции уравнения Кирхгофа к линейному уравнению путем замены интегральной нагрузки правыми частями этих оценок. Приведен пример такой редукции. Описанный способ установления априорных оценок и последующей редукции нелинейного уравнения к линейному может быть применен к широкому классу нагруженных уравнений, содержащих модуль интеграла рациональной степени искомой функции или ее производной.

**Ключевые слова:** уравнение Кирхгофа; априорная оценка; интегральная нагрузка; редукция к линейному уравнению.

### Введение

В области  $Q = \{(x, t) : x \in \Omega \subseteq R^n, t \in [0, T]\}$  с границей  $\partial\Omega$  класса дважды непрерывно-дифференцируемых функций будем рассматривать уравнение Кирхгофа

$$u_{tt} - a(s)\Delta u = f(x, t) \quad (1)$$

при условиях

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \nabla u|_{\partial\Omega} = 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \quad (2)$$

При этом

$$s = s(t) = \|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \Omega \subset R^n.$$

Уравнение вида (1) моделирует некоторые колебательные процессы, в частности, оно учитывает изменения длины струны, вызванные поперечными колебаниями. Данное уравнение относится к классу нагруженных, так как оно содержит интегральную нагрузку  $a(s)$ , где  $s$  – это интеграл указанного вида. В статье полагается

$$a(s) = (C_1 s + C_2)^p, C_1, C_2 > 0, p \in Q, p \neq 0.$$

В [1] для уравнения указанного вида была установлена разрешимость в целом первой смешанной задачи с однородными начальными условиями при натуральных  $p$ . В [2] разрешимость этой же задачи в целом установлена при  $p = -2$ . В [3] доказывается существование и единственность задачи Коши для однородного уравнения вида (1). Работы [4–9], как и большое количество других, также посвящены подобным уравнениям, в том числе и с младшими членами.

В большинстве случаев непосредственное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных невозможно. В подобных случаях часто прибегают к аппроксимации нелинейных уравнений линейными. При этом процесс, описываемый аппроксимирующим линейным уравнением, может существенно отличаться от моделируемого исходным уравнением нелинейного процесса. В настоящей работе для интегральной нагрузки уравнения устанавливаются априорные оценки, правые части которых являются известными функциями свободного члена уравнения и начальных условий. Они могут быть использованы для редукции нагруженного уравнения к ассоциированному с ним линейному уравнению путем замены ими интегральной нагрузки. Полученное таким образом аппроксимирующее линейное уравнение может быть принято за начальное приближение к исходному нагруженному уравнению в итерационном процессе поиска решения задачи (1), (2). Этот прием применялся в случае одномерного уравнения вида (1) в [10, 11], где были получены априорные оценки производных решения одномерного уравнения вида (1).

В работе неоднократно используются обозначения

$$F_1(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2, \quad K_0(t) = \int_0^t F_2(\tau) e^{t-\tau} d\tau + F_2(t),$$

а при доказательстве теорем возникает неравенство

$$\|u_t\|^2 \leq K_0(t). \quad (3)$$

Легко видеть, что в предположении  $u \in H^1(\Omega)$  имеют место равенства

$$(u_u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \quad -(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2,$$

где скалярное произведение рассматривается в смысле пространства  $L_2(\Omega)$ .

Для установления априорных оценок применяется

**Лемма.** [12, теорема 1.4] Если функция  $u(t)$  удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t \beta(\tau) u(\tau) d\tau + f(t), \quad t \geq t_0,$$

где функция  $f(t)$  и неотрицательные функции  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  интегрируемы, то справедливо неравенство

$$u(t) \leq \alpha(t) \int_{t_0}^t f(\tau) \beta(\tau) \exp \left( \int_{\tau}^t \alpha(s) \beta(s) ds \right) d\tau + f(t).$$

## 1. Интегральная нагрузка со степенью $p = m/n$ , $m, n \in N$

Рассмотрим уравнение (1) в виде

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), \quad m, n \in N. \quad (4)$$

**Теорема 1.** Пусть решением задачи (4), (2) является функция  $u \in H^1(\Omega)$ , такая, что  $u_t, u_{tt}, \nabla \varphi_1, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$ . Тогда функция  $(C_1 s + C_2)^{(m+n)/n}$  ограничена зависящей от  $t$  константой.

Доказательство. Скалярное произведение (1) и функции  $u_t$  имеет вид

$$(u_{tt}, u_t) - a(s)(\Delta u, u_t) = (f, u_t). \quad (5)$$

Заметим, что

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2 C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Это позволяет записать соотношение

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} (C_1 s + C_2)^{\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx,$$

интегрирование которого, в свою очередь, приводит к равенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} = 2 \int_0^t \int_{\Omega} f u_t dx d\tau + \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Функцию под интегралом в правой части оценим по модулю и применим к нему неравенство Коши:

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}. \quad (6)$$

Исключая второе слагаемое левой части, получим

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t),$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Применяя к последнему неравенству лемму, получаем оценку (3). В левой части (6) исключим  $\|u_t\|^2$ , а в правой части заменим его на  $K_0(t)$ :

$$\frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s + C_2)^{\frac{m+n}{n}} \leq \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{m+n} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m+n}{n}}.$$

Отсюда перейдем к выполняющейся для всех  $t \in [0, T]$  оценке

$$(C_1 s + C_2)^{(m+n)/n} \leq K(t), \quad (7)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m+n}{n} \left( \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right),$$

Теорема 1 доказана.

С помощью (7) редуцируем нелинейное уравнение (4) к линейному уравнению. Для этого положим в (4)

$$(C_1 s + C_2)^{m/m} = (K(t))^{m/(m+n)},$$

что приводит к линейному уравнению

$$u_{tt} - (K(t))^{m/(m+n)} \Delta u = f(x, t). \quad (8)$$

## 2. Интегральная нагрузка со степенью $p = -m/n$ , $m, n \in N$

При условиях (2) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \Delta u = f(x, t), m, n \in N. \quad (9)$$

Заметим, что при  $a(s) = (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}}$  в скалярном произведении (5) имеет место равенство

$$-a(s)(\Delta u, u_t) = \frac{1}{2} a(s) \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 = \frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2).$$

Продолжим его при  $m = n$  и  $m \neq n$ .

При  $m = n$  ( $p = -1$ ) имеем

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-1} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{d}{dt} \ln(C_1 s + C_2). \quad (10)$$

Пусть  $m \neq n$ . Тогда

$$\frac{1}{2C_1} (C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2) = \frac{1}{2C_1} \frac{n}{n-m} \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}}. \quad (11)$$

**Теорема 2.** Пусть решением задачи (9), (2) является функция  $u \in H^1(\Omega)$ , такая, что  $u_t, u_{tt}, \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$ ,  $m, n \in N$ . Тогда нижеследующие функции ограничены зависящими от  $t$  константами:

- a)  $\ln(C_1s + C_2)$  при  $C_1s + C_2 \geq 1, p = -1$ ;  
 b)  $\ln(C_1s + C_2)^{-1}$  при  $C_1s + C_2 < 1$  и  $s'(t) < 0, p = -1$ ;  
 c)  $(C_1s + C_2)^{(n-m)/n}$  при  $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0, m < n$ ;  
 d)  $(C_1s + C_2)^{(m-n)/n}$  при  $\|\nabla\varphi_1\|^2 > 0, s'(t) > 0, m > n$ .

**Доказательство.**

a) С учетом (10) запишем

$$\frac{d}{dt} \left( \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx.$$

После интегрирования последнего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s + C_2) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t), \quad (12)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \ln(C_1s(0) + C_2).$$

Пусть  $C_1s + C_2 \geq 1$ . Исключая в (12) второе слагаемое левой части и применяя лемму, приходим к оценке (3).

Выбирая верхнюю границу неравенства, в правой части (12) заменим  $\|u_t\|^2$  на  $K_0(t)$ , исключая при этом первое слагаемое левой части. Это приводит к выполняющейся для всех  $t \in [0, T]$  оценке

$$\ln(C_1s + C_2) \leq K_1(t), \quad (13)$$

$$K_1(t) = C_1 \left( \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right);$$

b) Пусть  $C_1s + C_2 < 1$ . С учетом знака логарифма запишем (12) в виде

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t) - \frac{1}{C_1} \ln \frac{C_1s(0) + C_2}{C_1s + C_2},$$

Последний член правой части исключим в силу  $s(0) = \max s(t)$ . После применения леммы при  $F_2(t) = F_1(t)$  получаем неравенство (3).

В (11) заменим  $\|u_t\|^2$  на  $K_0(t)$ , исключая при этом первое слагаемое левой части, что приводит к выполняющейся для всех  $t \in [0, T]$  оценке

$$\ln(C_1s + C_2)^{-1} \leq K_2(t), \quad (14)$$

$$K_2(t) = C_1 \left( \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right);$$

c) С учетом (11) запишем

$$\frac{d}{dt} \left( \|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s + C_2)^{(n-m)/n} \right) = 2 \int_{\Omega} f u_t dx. \quad (15)$$

После интегрирования перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s + C_2)^{(n-m)/n} \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_2(t). \quad (16)$$

$$F_2(t) = F_1(t) + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} (C_1s(0) + C_2)^{\frac{n-m}{n}}.$$

Исключая в (16) второе слагаемое левой части с применением леммы, имеем оценку (3). Подстановка  $K_0(t)$  в правую часть (16) вместо  $\|u_t\|^2$  с одновременным исключением первого слагаемого левой части приводит к выполняющейся для всех  $t \in [0, T]$  оценке

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} \leq K(t), \quad (17)$$

$$K(t) = C_1 \frac{n-m}{n} \left( \int_0^t K_0 d\tau + F_1(t) \right);$$

д) С помощью (11) перейдем к уравнению (15). Проинтегрируем его, замечая, что в силу возрастания функции  $s$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} (C_1 s + C_2)^{\frac{n-m}{n}} d\tau = \frac{(C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}} - (C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}}}{(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}} = F_0(t) < 0,$$

после чего перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1} \frac{n}{n-m} F_0(t) \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t). \quad (18)$$

Исключая второе слагаемое левой части, запишем оценку

$$\|u_t\|^2 \leq \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F_1(t).$$

Очередное применение леммы при  $F_2(t) = F_1(t)$  дает оценку (3).

Вновь заменяя  $\|u_t\|^2$  на  $K_0(t)$  в правой части (18) с одновременным исключением первого слагаемого левой части, получаем неравенство

$$\frac{n}{n-m} F_0(t) \leq C_1 \left( \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right).$$

Из последнего следует, что для всех  $t \in [0, T]$  выполнено неравенство

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{m-n}{n}} \leq K(t), \quad (19)$$

$$K(t) = C_1 \frac{m-n}{n} \left( \int_0^t K_0(\tau) d\tau + F_1(t) \right) (C_1 s(0) + C_2)^{\frac{m-n}{n}}.$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим применение полученных оценок для редукцирования нелинейного уравнения (8) к соответствующим линейным уравнениям.

а) и б) Переход к равенствам в (13) и (14) позволяет перейти от (9) к линейному уравнению

$$u_{tt} - \exp(K(t)) \Delta u = f(x, t), \quad (20)$$

в котором

$$K(t) = \begin{cases} -K_1(t), & C_1 s + C_2 \geq 1, \\ K_2(t), & C_1 s + C_2 < 1; \end{cases}$$

с) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{m-n}},$$

где  $K(t)$  – правая часть неравенства (17), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{m-n}} \Delta u = f(x, t). \quad (21)$$

д) Полагая в уравнении (9)

$$(C_1 s + C_2)^{-\frac{m}{n}} = (K(t))^{\frac{m}{n-m}},$$

где  $K(t)$  – правая часть неравенства (20), получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - (K(t))^{\frac{m}{n-m}} \Delta u = f(x, t). \quad (22)$$

### 3. Пример

Приведем одномерный пример, соответствующий случаю с) теоремы 2. Пусть задача (9), (2) имеет вид

$$u_{tt} - \left( \int_0^1 |u_x|^2 dx + 1 \right)^{\frac{1}{2}} u_{xx} = x + t,$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{6}x^2(2x - 3), u_t(x, 0) = x, x \in [0, 1], u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, t \in [0, T].$$

Таким образом, в формулировке теоремы 2 имеем

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{6}x^2(2x - 3), \varphi_2(x) = x, f(x, t) = x + t, C_1 = C_2 = 1, m = 1, n = 2.$$

Найдем величины, входящие в (17):

$$\int_0^t \|f\|^2 dx = \int_0^t \int_0^1 |x + t|^2 dx d\tau = t^2 + t + \frac{1}{3}, \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, F_1(t) = \frac{1}{6}t(2t^2 + 3t + 2) + \frac{1}{3},$$

$$s(0) = \int_0^1 |u_x(x, 0)|^2 dx = \int_0^1 |\varphi_{1x}(x)|^2 dx = \int_0^1 |x^2 - x|^2 dx = \frac{1}{30}, (s(0) + 1)^{\frac{1}{2}} \approx 1,01653.$$

$$F_2(t) = 0,16667t(2t^2 + 3t + 2) + 2,36639, K_0(t) = 5,69972e^t - t^2 + 3,33333t - 2,99748,$$

$$\int_0^t K_0(\tau) d\tau = 5,69972e^t - 0,25t^4 - 3,33333t^3 - 2,99748t,$$

$$K(t) = 2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319.$$

После подстановки в (21) получаем линейное уравнение

$$u_{tt} - \left( 2,84986e^t - 0,125t^4 - 1,5t^3 + 0,25t^2 - 1,33208t - 2,68319 \right)^{-0,5} u_{xx} = x + t.$$

### Заключение

В работе установлены априорные оценки для интегральной нагрузки  $a(s) = (C_1s + C_2)^{\pm \frac{m}{n}}$ ,  $C_1, C_2 > 0$ ,  $m, n \in N$ , уравнения Кирхгофа (1) при условиях (2) и показано их применение к его линеаризации. Положительной степени интегральной нагрузки соответствует оценка (7). Для отрицательной степени рассмотрены случаи  $m = n$  с оценками (12) и (14), а также случаи  $m < n$  и  $m > n$  с оценками (17) и (19) соответственно. Правые части полученных выражений, рассматриваемых как равенства, используются для линеаризации уравнения (1) путем замены ими интегральной нагрузки. Результатом являются уравнения (8), (20), (21), (22). Приводится одномерный пример, иллюстрирующий редукцию нагруженного уравнения к линейному. Решение последнего при исходных начально-краевых условиях может быть принято за первое приближение к решению нагруженной задачи.

### Литература

1. Похожаев, С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений / С.И. Похожаев // Матем. сб. – 1975. – Т. 96 (138), № 1. – С. 152–166.
2. Похожаев, С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа / С.И. Похожаев // Дифф. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 101–108.
3. Nishihara, K. Exponential Decay of Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping / K. Nishihara // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1984. – Vol. 8, no. 6. – P. 623–636.

4. Crippa, H.R. On Local Solutions of Some Mildly Degenerate Hyperbolic Equations / H.R. Crippa // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. – 1993. – Vol. 21, no. 8. – P. 565–574.
5. Ngoc, L.T.P. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions / L.T.P. Ngoc, N.T. Long // *Acta Appl Math.* – 2010. – Vol. 112. – P. 137–169.
6. Frota, C.L. Wave Equation in Domains with Nonlocally Reacting Boundary/ C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // *Differential and Integral Equations*. – 2011. – no. 17. – P. 1001–1020.
7. Frota, C.L. A Mixed Problem for Semilinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions in Domains with Non-Locally Reacting Boundary / C.L. Frota, L.A. Medeiros, A. Vicente // *Electronic Journal of Differential Equations*. – 2014. – Vol. 2014, no. 243. – P. 1–14.
8. Ono, K. Lower Decay Estimates for Non-Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations / K. Ono // *J. Math. Tokushima Univ.* – 2018. – Vol. 52. – P. 39–52.
9. Ono, K. Global Solvability for Mildly Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations in Bounded Domains / K. Ono // *J. Math. Tokushima Univ.* – 2021. – Vol. 55. – P. 11–18.
10. Бозиев, О.Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений/ О.Л. Бозиев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2022. – № 80. – С. 16–25.
11. Бозиев, О.Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных волновых уравнений с интегральной нагрузкой в главной части / О.Л. Бозиев // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2024. – № 89. – С. 5–17.
12. Филатов, А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

*Поступила в редакцию 11 декабря 2024 г.*

### Сведения об авторе

Бозиев Олег Людинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности института искусственного интеллекта и цифровых технологий Кабардино-Балкарского государственного университета, г. Нальчик, Российская Федерация; старший научный сотрудник института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Российская Федерация, e-mail: bozиеv@yandex.ru.

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2025, vol. 17, no. 2, pp. 5–12*

DOI: 10.14529/mmph250201

## APPLICATION OF A PRIORI ESTIMATES OF THE INTEGRAL LOAD OF THE KIRCHHOFF HYPERBOLIC EQUATION FOR ITS REDUCTION TO A LINEAR EQUATION

**O.L. Bozиеv<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> *Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation*

*E-mail: bozиеv@yandex.ru*

**Abstract.** The aim of this work is to establish a priori estimates for the integral load of the Kirchhoff equation. This equation models some nonlinear oscillatory processes. Here, the load is the rational degree  $m/n$  of a linear function of the norm of the desired solution in the space  $H^1(\Omega)$ . To achieve the specified goal, integral transformations of the terms of the scalar product of the original equation and the time derivative of its solution are performed. The application of Gronwall-Bellman type integral inequality leads to the desired estimates. A priori inequalities limiting the integral load of the Kirchhoff equation to a known function are established. This function depends on the right-hand side of the equa-

tion and the initial conditions, as well as on the sign and type of the exponent. The article shows a method for reducing the Kirchhoff equation to a linear equation by replacing the integral load with the right-hand sides of these estimates. An example of such a reduction is given. The described method of establishing a priori estimates and subsequent reduction of a nonlinear equation to a linear one can be applied to a wide class of loaded equations containing the modulus of the integral of the rational degree of the desired function or its derivative.

**Keywords:** Kirchhoff equation; a priori estimation; integral load; reduction to a linear equation.

### References

1. Pokhozhaev S. I. Ob odnom klasse kvazilineynykh giperbolicheskikh uravneniy [On a Class of Quasi-Linear Hyperbolic Equations]. *Matematicheskii Sbornik*, 1975, Vol. 96(138), no. 1, pp. 152–166. (in Russ.).
2. Pokhozhaev S.I. Ob odnom kvazilineynom giperbolicheskom uravnenii Kirkhgofa [On a Quasi-linear Hyperbolic Kirchhoff Equation]. *Differential equations*, 1985, Vol. 21, no. 1, pp. 101–108. (in Russ.).
3. Nishihara K. Exponential Decay of Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equations with Linear Damping. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1984, Vol. 8, no. 6, pp. 623–636.
4. Crippa H.R. On Local Solutions of Some Mildly Degenerate Hyperbolic Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1993, Vol. 21, no. 8, pp. 565–574.
5. Ngoc L.T.P., Long N.T. Linear Approximation and Asymptotic Expansion of Solutions in Many Small Parameters for a Nonlinear Kirchhoff Wave Equation with Mixed Nonhomogeneous Conditions. *Acta Appl Math.*, 2010, Vol. 112, pp. 137–169. DOI: 10.1007/s10440-009-9555-9.
6. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. Wave Equation in Domains with Nonlocally Reacting Boundary. *Differential and Integral Equations*, 2011, no. 17, pp. 1001–1020. DOI: 10.57262/die/1356012872.
7. Frota C.L., Medeiros L.A., Vicente A. A Mixed Problem for Semilinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions in Domains with Non-Locally Reacting Boundary. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, Vol. 2014, no. 243, pp. 1–14. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/243/frota.pdf> (accessed 02 April 2024).
8. Ono K. Lower Decay Estimates for Non-Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations. *J. Math. Tokushima Univ.*, 2018, Vol. 52, pp. 39–52.
9. Ono K. Global Solvability for Mildly Degenerate Kirchhoff Type Dissipative Wave Equations in Bounded Domains. *J. Math. Tokushima Univ.*, 2021, Vol. 55, pp. 11–18.
10. Boziev O. L. O linearizatsii giperbolicheskikh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti s pomoshch'yu apriornoy otsenki ikh resheniy (On the Linearization of Hyperbolic Equations with Integral Load in the Main Part by a priori Estimation of Their Solutions). *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2022, no. 80, pp. 16–25. DOI: 10.17223/19988621/80/2. (in Russ.).
11. Boziev O.L. Apriornye otsenki proizvodnykh resheniy odnomernykh neodnorodnykh volnovykh uravneniy s integral'noy nagruzkoy v glavnoy chasti (A priori Estimates for Derivative Solutions of Onedimensional Inhomogeneous Wave Equations with an Integral Load in the Main Part). *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2024, no. 89, pp. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/89/1. (in Russ.).
12. Filatov A.N., Sharova L.V. *Integral'nye neravenstva i teoriya nelineynykh kolebaniy* (Integral Inequality and Theory of Nonlinear Oscillations). Moscow, Nauka Publ., 1976, 151 p. (in Russ.).

**Received December 11, 2024**

### Information about the author

Boziev Oleg Ludinovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Computer Technologies and Information Security Department, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russian Federation; Senior Researcher, Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russian Federation, e-mail: boziev@yandex.ru.