

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Исследуется функция Грина бигармонической задачи Навье в единичном шаре. В отличие от ранее полученного автором вида функции Грина здесь приводится такое ее представление, в котором сингулярность фундаментального решения бигармонического уравнения явно выражена. Затем на основе функции Грина приводится интегральное представление решения задачи Навье в единичном шаре. В заключение дается представление решения задачи Навье для однородного бигармонического уравнения без использования функции Грина. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: задача Навье; бигармоническое уравнение; функция Грина; элементарное решение.

Введение. Явный вид функций Грина для разных эллиптических краевых задач приводится во многих исследованиях. Например, в двухмерном случае, в работе [1], на основании известной гармонической функции Грина представлены функции Грина различных бигармонических задач. Явный вид функции Грина в секторе для бигармонического и 3-гармонического уравнений найден в работах [2, 3], а в [4–6] приведен явный вид функций Грина задачи Дирихле для этих же уравнений в единичном шаре. В работе [7] на основании интегрального представления функций класса $u \in C^4(D) \cap C^3(\bar{D})$ даются интегральные представления решений задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в единичном шаре, а также строятся функции Грина этих задач.

В настоящей заметке будет найдено новое представление функции Грина задачи Навье для бигармонического уравнения в единичном шаре с явно выраженной сингулярностью, а также будет дано новое представление решения задачи Навье для однородного бигармонического уравнения без явного использования функции Грина.

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geq 2$ имеет вид $G_2(x, \xi) = E(x, \xi) - E^*(x, \xi)$, где $E(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа [8] и $E^*(x, \xi) = E\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$. По аналогии с этим в работе [4] было определено элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x - \xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3 \\ -\frac{1}{4} \ln |x - \xi|, & n = 4 \\ \frac{|x - \xi|^2}{4} (\ln |x - \xi| - 1), & n = 2 \end{cases}, \quad (1)$$

и доказано, что при $n \geq 3$ функция вида

$$G_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E^*(x, \xi), \quad (2)$$

где $E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$ является функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре S , удовлетворяющей равенствам $G_4(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \partial G_4(x, \xi) / \partial \nu|_{\xi \in \partial S} = 0$ при $x \in S$. В случае $n = 2$ последнюю строчку в формуле (1) нужно слегка подправить: вместо -1 надо взять $-1/2$.

Задача Навье [9, 10] для бигармонического уравнения (в [1] она называется задачей Дирихле-2) заключается в нахождении функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in S, \quad u|_{\partial S} = \varphi_0, \Delta u|_{\partial S} = \varphi_1. \quad (3)$$

В работе [4, теорема 2] установлено, что функция Грина задачи Навье (3) находится по формуле

$$G_4^n(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy, \quad (4)$$

где ω_n – площадь единичной сферы. Характер сингулярности у функции $G_4^n(x, \xi)$ здесь явно не виден. Поэтому дадим другое представление функции Грина задачи Навье, похожее на формулу (2).

Представление функции Грина. В дальнейшем изложении будет необходим следующий оператор $\Lambda u = \sum_{k=1}^n x_k u_{x_k}$.

Теорема 1. 1) Функция $G_4^n(x, \xi)$, определяемая равенством

$$G_4^n(x, \xi) = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt, \quad (5)$$

где $x \neq \xi \in S$, является бигармонической по $\xi \neq x \in S$ и удовлетворяет равенствам $G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \Delta_\xi G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$ при $x \in S$.

2) Если функция $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ является решением задачи Навье (3), то она может быть представлена в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \Delta_\xi G_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_0(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial G_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_1(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^n(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Доказательство. 1) Бигармоничность функции $E_4(x, \xi)$ при $x \neq \xi \in S$ и функции $E_4^*(x, \xi)$ при $x, \xi \in S$ была установлена в [4, теорема 2.2]. Известно также, что функция $E^*(x, t\xi)$ – гармоническая при $x, \xi \in S$, а значит, функция $(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)E^*(x, t\xi)$ – бигармоническая по $x, \xi \in S$. Поэтому функция $G_4^n(x, \xi)$ – бигармоническая. Равенство $G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$ выполнено, поскольку

$$\left| \frac{x}{|x|} - |x| \xi \right|^2 = 1 - 2x\xi + |\xi|^2 |x|^2 = |x - \xi|^2$$

на ∂S , а значит, $E_4(x, \xi) = E_4^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$. В работе [4] было также установлено, что

$$\Delta_\xi E_4(x, \xi) = -E(x, \xi), \text{ а поскольку } E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x| \xi\right), \text{ то } \Delta_\xi E_4^*(x, \xi) = -|x|^2 E^*(x, \xi).$$

Воспользуемся двумя следующими равенствами. Пусть $v(\xi)$ – гармоническая функция по $\xi \in S$, тогда

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 v(\xi)) = 2nv(\xi) + 4\Delta_\xi v(\xi) = 2(2\Delta_\xi + n)v(\xi), \quad (7)$$

$$(2\Delta_\xi + n) \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2v(\xi). \quad (8)$$

Равенство (7) легко проверяется, а равенство (8) следует из равенств

$$2\Delta_\xi \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2 \int_0^1 t(v(t\xi))'_t t^{n/2-1} dt = 2v(t\xi) t^{n/2} \Big|_0^1 - n \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt = 2v(\xi) - n \int_0^1 v(t\xi) t^{n/2-1} dt.$$

Следовательно, учитывая (7), (8) и гармоничность $E^*(x, t\xi)$ по $\xi \in S$, получим

$$\Delta_\xi \frac{|\xi|^2 - 1}{4} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \frac{1}{2} (2\Delta_\xi + n) \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = E^*(x, \xi),$$

откуда следует, что

$$\Delta_{\xi} G_4^n(x, \xi) = -E(x, \xi) + |x|^2 E^*(x, \xi) - (|x|^2 - 1)E^*(x, \xi) = -G_2(x, \xi).$$

Поскольку $G_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$, то $\Delta_{\xi} G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$. Утверждение 1) доказано.

2) Из равенства (5) видно, что функция $G_4^n(x, \xi)$ имеет сингулярность, содержащуюся в $E_4(x, \xi)$. Рассмотрим бигармоническую функцию $H(x) = G_4^n(x, \xi) - E_4(x, \xi)$. По теореме 1 из [7] для произвольной функции $u \in C^4(S) \cap C^3(\bar{S})$ справедливо равенство

$$\int_S E_4(x, \xi) \Delta^2 u(\xi) d\xi = \int_{\partial S} \left(E_4(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_4(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u + \Delta E_4(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta E_4(x, \xi)}{\partial \nu} u(\xi) \right) ds_{\xi} + \omega_n u(x),$$

которое основывается на формуле Гаусса–Остроградского. Поэтому если в это равенство вместо $E_4(x, \xi)$ подставить бигармоническую функцию $H(x)$, то получим аналогичное равенство, но без члена $\omega_n u(x)$. Если теперь сложить эти равенства, то будем иметь

$$\int_S G_4^n(x, \xi) \Delta^2 u(\xi) d\xi = \int_{\partial S} \left(G_4^n(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \frac{\partial G_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u + \Delta G_4^n(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta G_4^n(x, \xi)}{\partial \nu} u(\xi) \right) ds_{\xi} + \omega_n u(x),$$

откуда, с учетом равенств $G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = \Delta_{\xi} G_4^n(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$, сразу следует (6). Теорема доказана.

Таким образом, функция $G_4^n(x, \xi)$ является функцией Грина задачи Навье.

Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i=1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ ортогональных на ∂S гармонических полиномов (см., например, [11]), нормированных так, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_{\xi} = \omega_n$, где $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$ при $n > 2$ ($h_k = 2$ при $n = 2$) – размерность базиса однородных гармонических многочленов степени k .

Рассмотрим следующий полином $\mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi)$. В [4, теорема 4.1] для $|\xi| < |x| < 1$ были получены следующие представления элементарных решений:

$$E_4(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \left(\frac{|x|^2}{2k+n-4} - \frac{|\xi|^2}{2k+n} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad (n > 4), \quad (9)$$

$$E(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2} \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad E^*(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n-2} \mathcal{H}_k(x, \xi), \quad (n > 2), \quad (10)$$

а в случае $|x| < |\xi| < 1$ переменные x и ξ надо поменять местами. Записанные выше ряды сходятся равномерно по x и ξ при $|x| < a < |\xi|$. Заметим, что в представлении (10) функции $E(x, \xi)$ суммируются гармонические полиномы $H_k^{(i)}(\xi)$, умноженные на преобразование Кельвина этих же полиномов $K(H_k^{(i)}(x)) = |x|^{-(2k+n-2)} H_k^{(i)}(x)$ от переменной x с коэффициентами $1/(2k+n-2)$.

Лемма 1. Имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \mathcal{H}_k(x, \xi), & k = m. \end{cases}$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(y) \sum_{j=1}^{h_m} H_m^{(j)}(y) H_m^{(j)}(\xi) ds_y = \\ &= \sum_{i=1}^{h_k} \sum_{j=1}^{h_m} H_k^{(i)}(x) H_m^{(j)}(\xi) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_k^{(i)}(y) H_m^{(j)}(y) ds_y = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \mathcal{H}_k(x, \xi), & k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

поскольку по ортогональности на ∂S системы полиномов $\{H_k^{(i)}(x) : i=1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ имеем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_k^{(i)}(y) H_m^{(j)}(y) ds_y = \begin{cases} 1, & k = m, i = j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

Приведенные представления (9) и (10) полезны при нахождении интегралов вида $\int_S \mathcal{G}_4^n(x, \xi) |\xi|^m H(\xi) d\xi$ с ядром из функции $\mathcal{G}_4^n(x, \xi)$, где $H(\xi)$ – некоторый гармонический полином. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. При $n > 4$ и $|\xi| \neq |x| < 1$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt, \quad (11)$$

т. е. $G_4^n(x, \xi) = \mathcal{G}_4^n(x, \xi)$ при указанных выше условиях.

Поскольку

$$\int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = \int_S (E(x, y) - E^*(x, y)) (E(y, \xi) - E^*(y, \xi)) dy, \quad (12)$$

то доказательство теоремы можно разбить на 3 леммы.

Лемма 2. При $n > 4$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k} - 4)(\mathbf{k} - 2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

где для удобства введено обозначение $\mathbf{k} = 2k + n$.

Доказательство. Поскольку при $x \neq \xi$ интеграл из леммы имеет интегрируемые особенности при $y = \xi$, $y = x$, то запишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^{|\xi|} + \int_{|\xi|}^{|x|} + \int_{|x|}^1 \right) \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y.$$

Вычислим полученные интегралы.

1) Пусть $|y| < |\xi| < |x| < 1$. Воспользуемся представлением (10), леммой 1 и обозначением $\mathbf{k} = 2k + n$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n} \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \frac{|\xi|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \int_0^{|\xi|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)} |\xi|^{-(\mathbf{k}-2)}}{(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_0^{|\xi|} \rho^{\mathbf{k}-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)} |\xi|^2}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

2) Пусть $|\xi| < |y| < |x| < 1$. Аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(\mathbf{k}-2)}}{\mathbf{k}-2} \int_{|\xi|}^{|x|} \rho^{n-1} \frac{\rho^{-(\mathbf{m}-2)}}{\mathbf{m}-2} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_{|\xi|}^{|x|} \rho d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)} (|x|^2 - |\xi|^2)}{2(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

3) Пусть $|\xi| < |x| < |y| < 1$. Аналогично предыдущему найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E(\rho y, \xi) ds_y &= \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(m-2)}}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} \frac{\rho^{-(k-2)}}{k-2} \frac{\rho^{-(m-2)}}{m-2} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_{|x|}^1 \frac{\rho^{-2(k-2)+k-1}}{(k-2)^2} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-|x|^{-(k-4)})}{-(k-4)(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

С учетом сделанных вычислений найдем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \left(\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{(k-4)} \right) - \frac{1}{(k-4)(k-2)^2} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi). \quad (13)$$

Поскольку

$$\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{k-4} = |\xi|^2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2} \right) + |x|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k-4} \right) = \frac{k-2}{2(k-4)} |x|^2 - \frac{k-2}{2k} |\xi|^2,$$

то с учетом (9) получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \left(\frac{|\xi|^2}{k} + \frac{|x|^2 - |\xi|^2}{2} + \frac{|x|^2}{k-4} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)} \left(\frac{|x|^2}{k-4} - \frac{|\xi|^2}{k} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) = E_4(x, \xi).$$

Используя найденное равенство из (13), сразу получаем утверждение леммы.

Заметим, что существование гармонической функции $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k(x, \xi) / (k-4)(k-2)^2$ из леммы 2

было ранее теоретически доказано в [7].

Лемма 3. При $n > 2$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-2)^2 k} - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{(k-2)k} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Доказательство. Поскольку представление $E^*(y, \xi)$ из (10) не зависит от взаимного расположения ξ и y , то

$$\frac{1}{\omega_n} \int_s E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^{|x|} + \int_{|x|}^1 \right) \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y &= \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{k-2} \frac{1}{m-2} \int_0^{|x|} \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)}}{(k-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) \int_0^{|x|} \rho^{k-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{-(k-2)+k}}{(k-2)^2 k} \mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^2}{(k-2)^2 k} \mathcal{H}_k(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \int_{|y|=1} E(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y = \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\rho y|^{-(k-2)}}{k-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{-(k-2)}}{\mathbf{k}-2} \frac{1}{\mathbf{m}-2} \int_{|x|}^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \rho^{2k} \mathcal{H}_k(x, y) \mathcal{H}_m(y, \xi) ds_y =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{H}_k(x, \xi)}{(\mathbf{k}-2)^2} \int_{|x|}^1 \rho^{-(k-2)+k-1} d\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^2|_{|x|}}{2(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Складывая полученные равенства, будем иметь

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^2}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} + \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Учитывая в полученном равенстве, что

$$\frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} + \frac{1-|x|^2}{2(\mathbf{k}-2)^2} = \frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)^2} \left(\frac{1}{\mathbf{k}} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{|x|^2-1}{2(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}},$$

сразу получаем утверждение леммы.

Замечание 1. В силу симметрии функций $E(x, y)$ и $E^*(y, \xi)$ будем иметь

$$\int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy = \int_S E(y, \xi) E^*(x, y) dy = \int_S E(\xi, y) E^*(y, x) dy,$$

и значит, по лемме 3

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Лемма 4. При $n > 2$ и $|\xi| < |x| < 1$ верно равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Доказательство. Используя представление $E^*(x, y)$ из (10), которое не зависит от взаимного расположения x и y , и лемму 1, запишем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} E^*(x, \rho y) E^*(\rho y, \xi) ds_y =$$

$$= \int_0^1 \rho^{n-1} d\rho \frac{1}{\omega_n} \int_{|y|=1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \rho y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{m}-2} \mathcal{H}_m(\rho y, \xi) ds_y = \int_0^1 \rho^{k-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2} \mathcal{H}_k(x, \xi) d\rho =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $|\xi| < |x| < 1$. Воспользуемся равенством (12). С помощью лемм 2, 3, 4 и замечания 1 запишем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E(y, \xi) dy - \frac{1}{\omega_n} \int_S E(x, y) E^*(y, \xi) dy -$$

$$- \frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E(y, \xi) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_S E^*(x, y) E^*(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)^2} + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|x|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) - \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) + \frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2 \mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Преобразуем выражение во внешних скобках под знаком суммы. Оно равно

$$-\frac{1}{(\mathbf{k}-2)^2}\left(\frac{1}{\mathbf{k}-4}+\frac{1}{\mathbf{k}}\right)+\frac{1}{2}\frac{|x|^2-1+|\xi|^2-1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}=\frac{-2}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}+\frac{1}{2}\frac{|x|^2+|\xi|^2-2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}}$$

Из (9) найдем

$$E_4^*(x, \xi) = E_4\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{|x|^2|\xi|^2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

а поэтому

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{4}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{|x|^2|\xi|^2 - |x|^2 - |\xi|^2 + 1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \right) \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Нетрудно подсчитать, что $|x|^2|\xi|^2 - |x|^2 - |\xi|^2 + 1 = (|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)$ и

$$\frac{1}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)} - \frac{4}{(\mathbf{k}-4)(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} - \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} = 0,$$

а значит,

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_2(x, y) G_2(y, \xi) dy = E_4(x, \xi) - E_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi).$$

Наконец, заметим, что при $|\xi| < |x|$

$$\int_0^1 E^*(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, t\xi) t^{n/2-1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{k}-2} \mathcal{H}_k(x, \xi) t^{k+n/2-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(\mathbf{k}-2)\mathbf{k}} \mathcal{H}_k(x, \xi),$$

откуда сразу следует (11). При $|x| < |\xi| < 1$ все аналогично. Теорема доказана.

В работе [12], в частности, было получено следующее представление решения задачи Дирихле для однородного бигармонического уравнения в шаре

$$u(x) = u_0(x) + \frac{1-|x|^2}{2} \Delta u_0(x) - \frac{1-|x|^2}{2} u_1(x),$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ гармонические в S функции такие, что $u = u_0|_{\partial S}$ и $\partial u / \partial \nu = u_1|_{\partial S}$, где ν – внешняя нормаль к ∂S . Возможна ли подобная формула для решения задачи Навье?

Теорема 3. Пусть функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ являются решениями задач Дирихле

$$\Delta u_i = 0; \quad u_i|_{\partial S} = \varphi_i, \quad i = 0, 1$$

и $\varphi_0, \varphi_1 \in C(\partial S)$. Тогда функция

$$u(x) = u_0(x) - \frac{1-|x|^2}{4} \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt \quad (14)$$

является бигармонической, $u, \Delta u \in C(\bar{S})$ и удовлетворяются граничные условия задачи Навье.

Доказательство. При сделанных предположениях $u_0, u_1 \in C(\bar{S})$. Функция $u(x)$, определяемая из (14), является бигармонической в S поскольку произведение $|x|^2 u_1(x)$ – бигармоническая в S функция, а $u_0(x)$ – гармоническая и непрерывна в $\bar{S}$. Очевидно, что $u(x) = u_0(x)|_{\partial S} = \varphi_0$.

В силу (7) и (8) и с учетом гармоничности функции $\int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt$ запишем

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \Delta \left(\frac{|x|^2-1}{4} \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt \right) = \frac{1}{4} \Delta \left(|x|^2 \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt \right) = \\ &= \frac{1}{4} 2(2\Delta_x + n) \int_0^1 u_1(tx) t^{n/2-1} dt = u_1(x), \quad x \in S. \end{aligned}$$

Поэтому функция $\Delta u(x)$ – непрерывна в $\bar{S}$, а также $\Delta u(x)|_{\partial S} = \varphi_1$. Теорема доказана.

Замечание 2. При доказательстве интегрального представления решения (6) требовалась гладкость $u \in C^3(\bar{S})$, а при использовании функции Грина $G_4^n(x, \xi)$ [7, следствие 1] требовалось, чтобы $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$.

Пример 1. Рассмотрим простейшую задачу Навье

$$\Delta^2 u(x) = 1, \quad x \in S; \quad u|_{\partial S} = 0, \quad \Delta u|_{\partial S} = -2.$$

По формуле (14) найдем функцию $\hat{u}$ – решение задачи Навье для однородного уравнения. Поскольку $u_0 = 0$, $u_1 = -2$, то

$$\hat{u}(x) = -\frac{1-|x|^2}{4} \int_0^1 (-2) t^{n/2-1} dt = -\frac{|x|^2-1}{n}.$$

Вычисления показывают [13], что

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S G_4^n(x, \xi) d\xi = \frac{|x|^4-1}{8n(n+2)} - \frac{|x|^2-1}{4n^2},$$

а значит, получаем решение рассматриваемой задачи Навье в виде

$$u(x) = \frac{|x|^4-1}{8n(n+2)} - \frac{4n+1}{4n^2}(|x|^2-1).$$

Литература

1. Begehr, H. Biharmonic Green functions / H. Begehr // *Le Matematiche*. – 2006. – V. LXI. – P. 395–405.
2. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // *Complex Variables Elliptic Equ.* – 2013. – Vol. 58, no. 1. – P. 7–22.
3. Wang, Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // *Complex Variables Elliptic Equ.* – 2014. – Vol. 59, no. 5. – P. 732–749.
4. Karachik, V.V. Green's Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2019. – Vol. 64, no. 9. – P. 1500–1521.
5. Карачик, В.В. О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2019. – Т. 59, № 1. – С. 71–86.
6. Карачик, В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Матем. заметки*. – 2020. – Т. 107, № 1. – С. 87–105.
7. Карачик, В.В. Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // *Дифференциальные уравнения*. – 2021. – Т. 57, № 5. – С. 673–686.
8. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
9. Sweers, G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic / G. Sweers // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2009. – Vol. 54. – P. 79–93.
10. Gazzola, F. Polyharmonic Boundary Value Problems / F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers // Springer, 2010. – 423 p.
11. Карачик, В.В. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения в шаре: монография / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. – 476 с.
12. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball / V.V. Karachik // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9, no. 16. – Article no. 1907.
13. Karachik V.V. Green's Functions of some Boundary Value Problems for the Biharmonic Equation / V.V. Karachik // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2022. – Vol. 67, no. 7. – P. 1712–1736.

Поступила в редакцию 4 марта 2025 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник, кафедра «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

REPRESENTATION OF THE GREEN'S FUNCTION FOR THE BIHARMONIC NAVIER PROBLEM

V.V. Karachik

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: karachik@susu.ru

Abstract. The Green's function of the biharmonic Navier problem in the unit ball is investigated. Unlike the form of the Green's function previously obtained by the author, here is a representation in which the singularity of the fundamental solution of the biharmonic equation is explicitly expressed. Then, based on the Green's function, an integral representation of the solution to the Navier problem in the unit ball is given. In conclusion, a representation of the solution to the homogeneous Navier problem is given without using the Green's function. An illustrative example is given.

Keywords: *Navier problem; biharmonic equation; Green's function; elementary solution.*

References

1. Begehr H. Biharmonic Green functions. *Le Matematiche*, 2006, Vol. LXI, pp. 395–405.
2. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013, Vol. 58, no. 1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199
3. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, no 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566
4. Karachik V.V. Green's Function of Dirichlet Problem for Biharmonic Equation in the Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, Vol. 64, no. 9, pp. 1500–1521. DOI: 10.1080/17476933.2018.1536702
5. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in a Ball. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, Vol. 59, no. 1, pp. 66–81.
6. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. *Mathematical Notes*, 2020, Vol. 107, no. 1, pp. 105–120.
7. Karachik V.V. Green's Functions of the Navier and Riquier–Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differential Equations*, 2021, Vol. 57, no. 5, pp. 654–668.
8. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki (Equations of Mathematical Physics)*. Moscow: Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).
9. Sweers G. A Survey on Boundary Conditions for the Biharmonic. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2009, Vol. 54, pp. 79–93.
10. Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Springer, 2010, 423 p. DOI: 10.1007/978-3-642-12245-3
11. Karachik V.V. *Nekotorye kraevye zadachi dlya poligarmonicheskogo uravneniya v share: monografiya (Some Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball: Monograph)*. Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2024, 476 p. (in Russ.).
12. Karachik V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, no. 16, Article no. 1907. DOI: 10.3390/math9161907
13. Karachik V.V. Green's Functions of some Boundary Value Problems for the Biharmonic Equation. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2022, Vol. 67, no 7, pp. 1712–1736.

Received March 4, 2025

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.