Математика

УДК 517.9, 519.216.2 DOI: 10.14529/mmph250301

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ В КРУГЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

Н.С. Гончаров,О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. Рассматривается решение задачи стабилизации решений детерминированной и стохастической системы уравнений Вентцеля, описывающих фильтрацию жидкости в круге и на границе. Сначала решается вопрос об экспоненциальной устойчивости и неустойчивости решений детерминированной системы уравнений Вентцеля при различных знаках параметров, описывающих среду и свойства жидкости. В случае неустойчивости решений решается задача стабилизации на основе контура обратной связи. Затем полученные результаты распространяются на стохастическую систему уравнений Вентцеля. Здесь в качестве производной рассматривается производная Нельсона–Гликлиха, а решением является стохастический процесс.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система уравнений Вентцеля; уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной; производная Нельсона–Гликлиха; неустойчивое решение, стабилизация решения.

Введение

Пусть $\Omega=\{(r,\theta):r\in[0,R),\theta\in[0,2\pi)\}$ – круг в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma=\{(\theta):\theta\in[0,2\pi)\}$. На компакте $\Omega\cup\Gamma$ рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процесс фильтрации влаги [1]

$$\left(\lambda-\Delta_{r,\theta,\varphi}\right)u_t=\alpha\Delta_{r,\theta,\varphi}u+\beta u,u=\left(t,r,\theta\right),\left(t,r,\theta\right)\in R\times\Omega, \tag{1}$$

$$\left(\lambda-\Delta_{\theta,\varphi}\right)v_t=\gamma\Delta_{\theta,\varphi}v+\partial_R u+\delta v,v=\left(t,\theta\right),\left(t,\theta\right)\in\mathbb{R}\times\Gamma, \tag{2}$$

где

$$\Delta_{r,\theta}=\left(r-R\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(R-r\right)\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\ \Delta_\theta=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\partial_R=\left.\frac{\partial}{\partial r}\right|_{r=R}. \tag{3}$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения:

$$\mathrm{tr}\,u=v \text{ на } \mathbb{R}\times\Gamma, \tag{4}$$

и снабдим ее начальными условиями

$$\left(0,r,\theta\right)=u_0\left(r,\theta\right),v\left(0,\theta\right)=v_0\left(\theta\right). \tag{5}$$

Назовем решение задачи (1)–(5) *детерминированным решением* динамической системы Вентцеля. Если мы заменим u и v, заданные на Ω и Γ соответственно, на стохастические процессы $\xi=\xi\left(t\right)$ и $\chi=\chi\left(t\right)$, определенные на интервале $\left(0,\tau\right)$, получим стохастическую динамическую систему Вентцеля, где производная от стохастических процессов $\overset{\circ}{\xi}\left(t\right)$, $\overset{\circ}{\chi}\left(t\right)$ понимается как производная Нельсона–Гликлиха [2] от стохастического процесса $\xi=\xi\left(t\right)$ и $\chi=\chi\left(t\right)$ соответственно.

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в полярной системе координат содержат специальные функции, здесь символом $\Delta_{r,\theta}$ в (3) обозначен модифицированный оператор Лапласа в Ω, а в (3) символом Δ_θ обозначен модифицированный оператор Лапласа–Бельтрами на Γ. Символом ∂_R обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha,\gamma,\lambda,\beta,\delta\in\mathbb{R}$ характеризуют среду.

В работе [3] исследуется разрешимость стохастического линейного уравнения соболевского типа

$$L\overset{\circ}{\eta} = M\eta$$

при условии, что оператор M является (L,p)-ограниченным, где p может быть нулем или натуральным числом. Впоследствии в работах [4, 5] это уравнение было изучено для случаев, когда оператор M обладает свойствами (L,p)-секториальности и (L,p)-радиальности. Во всех этих исследованиях [3–5] рассматривались как классическая задача Коши, так и задача Шоуолтера–Сидорова. Стоит отметить работу [6], в которой рассматриваются более общие начально-конечные условия для стохастических уравнений соболевского типа. В [6] задачи Коши и Шоуолтера–Сидорова формулируются и исследуются для уравнений соболевского типа более высокого порядка. В [3] полученные теоретические результаты применяются к изучению разрешимости задач Коши и Шоуолтера–Сидорова для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной. В [7] решается задача стабилизации для этого же уравнения. В [8] исследуется система Вентцеля для стохастического уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в круге и на его границе и доказывается существование решений. Настоящая работа посвящена изучению устойчивости решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в круге и на его границе, а также решению задачи стабилизации для неустойчивых решений этой системы.

Работа помимо введения и списка литературы состоит из четырех частей. В первой части рассматривается существование и единственность детерминированной динамической системы Вентцеля в круге и на ее границе. Вторая часть содержит устойчивость полученного решения для детерминированной динамической системы Вентцеля. Третья часть содержит стабилизацию решения для детерминированной динамической системы Вентцеля. Четвертая часть содержит стабилизацию решения для стохастической динамической системы Вентцеля.

Аналитическое решение детерминированной системы Вентцеля

Для получения аналитического решения детерминированной динамической системы Вентцеля (1)–(5) рассмотрим следующий ряд:

$$u=\sum_{k=2}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\left(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta\right), \quad (6)$$

где

$$a_k=\int_0^R\int_0^{2\pi}u_0\left(r,\theta\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}\cos k\varphi\, d\theta\, r dr,\quad b_k=\int_0^R\int_0^{2\pi}u_0\left(r,\theta\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}\sin k\varphi\, d\theta\, r dr$$

$$c_k=\int_0^{2\pi}v_0\left(\theta\right)\cos k\varphi\, d\theta, d_k=\int_0^{2\pi}v_0\left(\theta\right)\sin k\varphi\, d\theta.$$

Нетрудно заметить, что построенный выше ряд является формальным решением уравнения (1). Причем если ряды в (6) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (1), (5), где $\partial_R u=0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (2), (5)

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(t\frac{\delta-\gamma k^2}{\lambda+k^2}\right)\left(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta\right), \quad (7)$$

где в случае $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ решения задачи (1)–(5) будут удовлетворять условию согласования (4).

Замыкание $span\{(R^k)^{-1}(R-r)^k\cos k\varphi,(R^k)^{-1}(R-r)^k\sin k\varphi : k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}, r\in(0,R),\theta\in[0,2\pi)\}$, порожденное скалярным произведением

$$\langle\phi,\psi\rangle_{A(\Omega)}=\int_0^{2\pi}\int_0^R\varphi\left(r,\theta\right)\psi\left(r,\theta\right)r dr d\theta,$$

обозначим символом $A(\Omega)$. Далее замыкание $span\{\cos k\varphi, \sin k\varphi,\theta\in[0,2\pi)\}$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$\langle \varphi,\psi\rangle_{A(\Gamma)}=\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\psi(\theta)d\theta,$$

обозначим символом $A(\Gamma)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых* $u_0\in A(\Omega)$ *и* $v_0\in A(\Gamma)$, *таких, что выполнено условие согласования, и для коэффициентов* $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda\in\mathbb{R}$, *таких, что выполнено следующее условие* $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, *а* $\frac{\beta}{\alpha}\neq k^2,\lambda\neq k^2$, *где* $k\in N$, *существует единственное решение* $(u,v)\in C^\infty(\mathbb{R};A(\Omega)\oplus A(\Gamma))$ *динамической системы Вентцеля, состоящей из уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной (1)–(2).*

Устойчивость решений детерминированной системы Вентцеля

Пусть $U=A(\Omega)\oplus A(\Gamma)$. Норма $\|\cdot\|_U=\|\cdot\|_{A(\Omega)}+\|\cdot\|_{A(\Gamma)}$, где $\|\cdot\|_{A(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{A(\Gamma)}$ порождаются скалярными произведениями в $A(\Omega)$ и $A(\Gamma)$.

Определение 1. Решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) *экспоненциально устойчиво*, если существуют такие константы $N>0$ и $\nu>0$, что при всех $t\in R_+$ и любых $u_0\in A(\Omega)$, $v_0\in A(\Gamma)$ решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\|u(t)\|_U\le Ne^{-\nu t}(\|u_0\|_{A(\Omega)}+\|v_0\|_{A(\Gamma)}).$$

Определение 2. Решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) называется *неустойчивым*, если существует $\varepsilon>0$ при некоторых $u_0\in A(\Omega)$, $v_0\in A(\Gamma)$ и $t>0$ выполнено

$$\|u(t)-u_0\|_{A(\Omega)}+\|u(t)-v_0\|_{A(\Gamma)}\ge\varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, $-\lambda\neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha}\neq k^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha>\beta$, $\lambda>-1$, *тогда при любых* $u_0\in A(\Omega)$, $v_0\in A(\Gamma)$ *решение системы (1)–(5) экспоненциально устойчиво.*

Действительно, $\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}<0$ при $\alpha>\beta$, $\lambda>-1$. Обозначим $-\nu_1=\max\left\{\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2},k\in\mathrm{N}\right\}$. Тогда справедлива оценка $\exp\left(\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}t\right)\le e^{-\nu_1 t},\nu_1>0.$ Для решения $u=u(t)$ системы (1)–(5) выполнено

$$u=\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\right\|_{A(\Omega)}+$$

$$+\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta)\right\|_{A(\Gamma)}\le C_1e^{-\nu_1 t}\|u_0\|_{A(\Omega)}+C_2e^{-\nu_1 t}\|v_0\|_{A(\Gamma)}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, $-\lambda\neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha}\neq k^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha>\beta$, $\lambda<-1$, *тогда при любых* $u_0\in A(\Omega)$, $v_0\in A(\Gamma)$ *решение системы (1)–(5) неустойчиво.*

Пусть $\alpha>\beta$, $\lambda<-1$. Тогда $\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}<0$ при $\lambda>-k^2$ и $\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}>0$ при $\lambda<-k^2$. Обозначим $-\nu_1=\max\left\{\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2},\lambda>-k^2\right\}$, $\nu_2=\min\left\{\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2},\lambda<-k^2\right\}$, $\nu_1,\nu_2>0$, и $m=\max\{k:\lambda<-k^2\}$.

Тогда решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) можно представить в виде $u=u_1+u_2$, где

$$u_1(t)=\sum_{k=m+1}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+\sum_{k=m}^{\infty}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta), \quad (9)$$

$$u_2(t)=\sum_{k=2}^{m}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)+\sum_{k=1}^{m-1}\exp\left(t\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta), \quad (10)$$

Справедливы следующие оценки:

$$\| u_1(t)\|_U\le C_3e^{-\nu_1 t}\|u_0\|_{A(\Omega)}+C_4e^{-\nu_1 t}\|v_0\|_{A(\Gamma)}, \quad (11)$$

$$\| u_2(t)\|_U\le C_5e^{-\nu_2 t}\|u_0\|_{A(\Omega)}+C_6e^{-\nu_2 t}\|v_0\|_{A(\Gamma)}, \quad (12)$$

Очевидно, решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) неустойчиво.

Стабилизация решений детерминированной системы Вентцеля

Пусть коэффициенты $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, $-\lambda\ne k^2$, $\frac{\beta}{\alpha}\ne k^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, $\alpha>\beta$, $\lambda<-1$. Тогда в силу теоремы 3 решение $u=u(t)$ системы (1)–(5) неустойчиво. Поставим следующую задачу стабилизации. Требуется найти такое управление в области f_u и на границе области f_v, что решения системы

$$(\lambda-\Delta_{r,\theta})u_t=\alpha\Delta_{r,\theta}u+\beta u+f_u, u=u(t,r,\theta),(t,r,\theta)\in\mathbb{R}\times\Omega, \quad (13)$$

$$(\lambda-\Delta_{\theta})v_t=\gamma\Delta_{\theta}v+\partial_R u+\delta v+f_v, v=v(t,\theta),(t,\theta)\in\mathbb{R}\times\Gamma, \quad (14)$$

$$\operatorname{tr}u=v \text{ на } \mathbb{R}\times\Gamma, \quad (15)$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление f_u и f_v будем искать с помощью контура обратной связи

$$f_u=Bu, f_v=Bv, \quad (16)$$

где B – линейный оператор.

Обозначим через n номер максимального значения

$$\left\{\frac{\beta-\alpha k^2}{\lambda+k^2},\lambda<-k^2\right\}.$$

Оператор B можно представить в виде

$$B=\begin{cases}\mathbb{O},\lambda>-k^2;\\(\varepsilon-\beta+\alpha n)\mathbb{I},\lambda<-k^2.\end{cases} \quad (17)$$

Тогда решение системы (1)–(5), замкнутой контуром обратной связи (17), имеет вид

$$u(t)=u_1(t)+\sum_{k=2}^{m}\exp\left(t\frac{\varepsilon+\alpha n-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\exp\left(t\frac{\varepsilon+\alpha n-\alpha k^2}{\lambda+k^2}\right)(c_k\cos k\theta+d_k\sin k\theta) \quad (18)$$

и в силу (11) экспоненциально устойчиво. Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, $-\lambda\ne k^2$, $\frac{\beta}{\alpha}\ne k^2$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha>\beta$, $\lambda<-1$, *тогда при любых* $u_0\in A(\Omega)$, $v_0\in A(\Gamma)$ *решение системы (13)–(15), замкнутое обратной связью (16), где оператор* B *имеет вид (17), экспоненциально устойчиво.*

Стабилизация решений стохастической системы Вентцеля

Пусть $U=\{u\in W_2^2(\Omega)\oplus W_2^2(\Gamma):\partial_R u=0\}$, $F=L_2(\Omega)\oplus L_2(\Gamma)$. Следуя [9] построим пространства *случайных* K*-величин*. *Случайные* K*-величины* ξ, $\chi\in U_K L_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k, \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \tag{19}$$

где $\{\varphi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_{r,\theta} \in \mathcal{L}(U;F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_\theta \in \mathcal{L}(U;F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ из $L_2(\Gamma)$. Норму в $U_K L_2$ зададим формулой

$$\|\xi\|_{U_K L_2} + \|\chi\|_{U_K L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 D\xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 D\chi_k.$$

Рассмотрим стохастическую систему Вентцеля:

$$\left(\lambda - \Delta_{r,\theta}\right)\overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha\Delta_{r,\theta}\xi(t) + \beta\xi(t), t \in (0,\tau), \xi \in \Omega, \tag{20}$$

$$\left(\lambda - \Delta_\theta\right)\overset{\circ}{\chi}(t) = \gamma\Delta_\theta\chi(t) + \partial_R\xi(t) + \delta\chi(t), t \in (0,\tau), \chi \in \Gamma. \tag{21}$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$\operatorname{tr}\xi(t) = \chi(t), \tag{22}$$

и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \chi(0) = \chi_0. \tag{23}$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\xi(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \exp\left(t\frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right)\frac{(R-r)^k}{2R^k}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t\frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right)(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta), \tag{24}$$

где

$$a_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi_0 \frac{(R-r)^k}{2R^k} \cos k\varphi \, d\theta \, r dr, \; b_k = \int_0^R \int_0^{2\pi} \xi_0 \frac{(R-r)^k}{2R^k} \sin k\varphi \, d\theta \, r dr$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} \chi_0 \cos k\varphi \, d\theta, \; d_k = \int_0^{2\pi} \chi_0 \sin k\varphi \, d\theta.$$

Нетрудно заметить, что построенный выше ряд является формальным решением уравнения (20). Причем если ряды в (24) равномерно сходятся, то перед нами решение задачи (20), (23), где $\partial_R u = 0$. Учитывая это, можно построить решение задачи (21), (23)

$$\chi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(t\frac{\delta - \gamma k^2}{\lambda + k^2}\right)(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta), \tag{25}$$

где в случае $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ решения задачи (20)–(23) будут удовлетворять условию согласования (22).

Теорема 5. *Для любых $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ и коэффициентов α, β, γ, δ, $\lambda \in R$, таких, что $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, а $\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, где $k \in N$, существует единственное решение $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}_+; U_K L_2)$ стохастической системы Вентцеля (20)–(23).*

Определение 3. Решение $\xi = \xi(t)$ системы (20)–(23) *экспоненциально устойчиво*, если существуют такие константы $N > 0$ и $\nu > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и любых $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ решение $\xi = \xi(t)$ системы (20)–(23) удовлетворяет экспоненциальной оценке

$$\| \xi(t) \|_{U_K L_2} \leq N e^{-\nu t} (\| \xi_0 \|_{U_K L_2} + \| \chi_0 \|_{U_K L_2}). \tag{26}$$

Определение 4. Решение $\xi = \xi(t)$ системы (20)–(23) называется неустойчивым, если существует $\varepsilon > 0$ при некоторых $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ и $t > 0$ выполнено

$$\| \xi(t) - \xi_0 \|_{U_K L_2} + \| \chi(t) - \chi_0 \|_{U_K L_2} \geq \varepsilon.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\dfrac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha > \beta$, $\lambda > -1$, *тогда при любых* $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ *и* $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ *решение системы (20)–(23) экспоненциально устойчиво.*

Теорема 7. *Пусть* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\dfrac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$, *тогда при любых* $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ *и* $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ *решение системы (20)–(23) неустойчиво.*

Пусть коэффициенты $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\dfrac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$. Тогда в силу теоремы 3 решение $u = u(t)$ системы (20)–(23) неустойчиво. Поставим следующую задачу стабилизации. Требуется найти такое управление в области η_ξ и на границе области η_χ, что решения системы

$$\left(\lambda - \Delta_{r,\theta}\right) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\xi, t \in (0, \tau), \xi \in \Omega, \tag{27}$$

$$\left(\lambda - \Delta_{r,\theta}\right) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\xi, t \in (0, \tau), \xi \in \Omega, \tag{28}$$

$$\operatorname{tr} \xi(t) = \chi(t) \tag{29}$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление η_ξ и η_χ будем искать с помощью контура обратной связи

$$\eta_\xi = B\xi, \eta_\chi = B\chi, \tag{30}$$

где B – линейный оператор.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\beta / \alpha \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Если* $\alpha k^2 > \beta$, $\lambda < -1$, *тогда при любых* $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ *и* $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ *решение системы (27)–(29), замкнутое обратной связью (30), где оператор B имеет вид (17), экспоненциально устойчиво.*

Все рассуждения и оценки при доказательстве теорем 5–8 аналогичны детерминированному случаю и поэтому не приводятся.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 25-21-20017, https://rscf.ru/project/25-21-20017/.

Литература

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Приклад. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 852–864.

2. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y. – 2011. – 436 p.

3. Свиридюк, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера–Сидорова аддитивными шумами / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

4. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively *p*-Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410. – 8 p.

5. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.

6. Favini, A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyaeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – Springer, 2016. – Vol. 15, no. 1. – P. 185–196.

7. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 21–29.

8. Goncharov, N.S. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary / N.S. Goncharov G.A. Sviridyuk // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2023. – Т. 15, № 3. – С. 15–22.

Поступила в редакцию 8 июля 2025 г.

Сведения об авторах

Гончаров Никита Сергеевич – старший преподаватель, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Китаева Ольга Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория неклассических уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sviridiukga@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 3, pp. 5–12

DOI: 10.14529/mmph250301

STABILIZATION OF SOLUTIONS FOR THE WENTZELL STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEM IN A CIRCLE AND ON ITS BOUNDARY

N.S. Goncharov, O.G. Kitaeva, G.A. Sviridyuk
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. The paper considers the problem of stabilizing the solutions of the deterministic and stochastic Wenzel equations, which describe the filtration of a liquid in a circle and on its boundary. The authors address the issue of exponential stability and instability of the deterministic Wenzell equations solutions. They consider different signs of the parameters that describe the medium and the properties of the liquid. The instability gives rise to solving the problem of stabilization using a feedback loop. The obtained results are used in the stochastic Wenzell equations. The Nelson–Gleich derivative is considered, and a stochastic process is a solution.

Keywords: stochastic dynamic system of Wentzell equations; the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation; the Nelson–Gleich derivative; instable solution; solution stabilization.

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [Strata]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, Iss. 5, pp. 1286–1303. DOI: 10.1016/0021-8928(60)90107-6

2. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9

3. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive "Noise". *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, 2014*, Vol. 7, no. 1. pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmp140108

4. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of "Noises". *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410, 8 p. DOI: 10.1155/2015/697410

5. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridiuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.

6. Favini A., Sviridyuk G. A., Zamyshlyaeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, Iss. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185

7. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 1, pp. 21– 29. DOI: 10.14529/jcem230103

8. Goncharov N.S., Sviridiuk G.A. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series: “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2023, Vol. 15, Iss. 3, pp. 15–22. DOI: 10.14529/mmph230302

Received July 8, 2025

Information about the authors

Goncharov Nikita Sergeevich is Senior Lecturer, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Kitaeva Olga Gennadevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Professor, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of Mathematical Physics Non-Classical Equations Research Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0795-2277.