Математика

УДК 517.642.8 DOI: 10.14529/mmph250401

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ЗАДАННЫХ НА СВЯЗНЫХ ГРАФАХ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ РЕБРАМИ

С.И. Кадченко
Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация
E-mail: sikadchenko@mail.ru

Аннотация. Потребность в развитии математических методов, позволяющих вычислительно эффективно находить собственные значения дифференциальных операторов в частных производных, заданных на графах с изменяющимися во времени геометрическими параметрами, связана с развитием новых технологий в науке и технике. На примере канонических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа разработаны алгоритмы вычисления их собственных чисел. Найдены аналитические формулы, позволяющие находить приближенные значения собственных чисел рассматриваемых операторов в необходимые моменты времени.

Ключевые слова: начально-краевые задачи; связные графы; собственные числа и собственные функции операторов; дискретные и полуограниченные операторы; метод Галеркина; метод регуляризованных следов.

Введение

В процессе моделирования природных явлений возникает необходимость нахождения собственных чисел дискретных дифференциальных операторов в частных производных, заданных на связных графах, геометрия которых изменяется со временем. Для построения методов решения таких задач воспользуемся методикой численного решения спектральных задач, заданных на квантовых графах с постоянными ребрами [1–4].

В статьях [5–10] разработаны алгоритмы нахождения собственных чисел начально-краевых задач, заданных на графах типа звезда с изменяющимися ребрами. Их граничные условия позволяют найти аналитические формулы для вычисления собственных чисел этих задач в необходимые моменты времени. В случае, когда графы связные, граничные условия затрудняют получение аналитических формул. Для этих случаев возникает необходимость построения алгоритмов решения этих задач.

Используя результаты статьи, можно распространить ранее полученную методику решения обратных спектральных задач на графах с неподвижными ребрами на графы с изменяющимися ребрами [11].

Для описания математической модели рассмотрим конечное множество связного ориентированного графа G_t, имеющего j_0 ребер и i_0 вершин. Через $E=\left(E_1,E_2,\ldots,E_{j_0}\right)$ обозначим множество их ребер, а через $V=V(V_i)_{i=1}^{i_0}$ – множество вершин. У графа G длины ребер и площади поперечного сечения изменяются во времени по законам:

$$L_j\left(t\right)=l_jL\left(t\right),\ D_j\left(t\right)=d_jD\left(t\right),\ j=\overline{1,j_0}\,. \tag{1}$$

Здесь $L\left(t\right),D\left(t\right)$ – дважды дифференцированные функции, такие, что все длины ребер E_j и площади поперечных сечений D_j графа всегда остаются положительными. В момент времени $t=t_*$ введем пространство $L^{2,1}\left(G_{t_*}\right)$ суммируемых с квадратом вектор-функций $f\ \left(t\right)$, заданных на графе G_t со скалярным произведением

$$(f,w)_{L^{2,1}\left(G_{t_*}\right)}=\frac{1}{t_*}\left(\int_0^{t_*}\sum_{j=1}^{j_0}D_j(t)\int_0^{L_j(t)}f_j\left(x_j,t\right)w_j\left(x_j,t\right)dx_j dt,\right)$$

$$f=\left(f_1(x_1,t),\ldots,f_{j_0}\left(x_{j_0},t\right)\right),\ x_j\in\left(0,L_j(t)\right),\ j=\overline{1,j_0}\,.$$

Когда $L(t)\equiv D(t)\equiv 1$, геометрия графа G_t со временем не изменяется. В этом случае граф будем обозначать G_0. Далее рассмотрим спектральные задачи, заданные на связных квантовых графах G_t с изменяющимися ребрами для операторов параболического типа.

Вычисление собственных чисел

Опишем методику вычисления приближенных значений собственных чисел дискретных вектор-операторов $F=\left(F_1,F_2,\ldots,F_{j_0}\right)$ параболического типа, заданных на связных квантовых графах G_t:

$$F\psi=\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+P_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}+P_0\Psi\,,\ \ P_i=\left(p_{i1}(x_1,t),\ldots,p_{ij_0}\left(x_{j_0},t\right)\right),\ i=0,1,\tag{2}$$

$$\Psi=\left(\psi_1(x_1,t),\ldots,\psi_{j_0}\left(x_{j_0},t\right)\right),\ x=\left(x_1(t),\ldots,x_{j_0}(t)\right),\quad j=\overline{1,j_0}$$

с областью определения $D_F=L^{2,1}(G_t)$. Известно, что собственные числа μ операторов F находятся при решении начально-краевых задач, заданных на подвижных ребрах графа G_t

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t}-\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_j^2}+p_{1j}\left(x_j,t\right)\frac{\partial\psi_j}{\partial x_j}+p_{oj}\left(x_j,t\right)=\mu\,\psi_j\,,$$

$$\psi_j=\psi_j\left(x_j,t\right),\ x_j=\left(0,L_j(t)\right),\quad j=\overline{1,j_0}\,,$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}\left(V_s\right)}\frac{d_k}{l_k}\frac{\partial\psi_k\left(y_k,t\right)}{\partial y_k}\Big|_{y_k=0}-\sum_{E_m\in E^{\omega}\left(V_s\right)}\frac{d_m}{l_m}\frac{\partial\psi_m\left(y_m,t\right)}{\partial y_m}\Big|_{y_m=l_m}=0,\tag{3}$$

$$E_i,\,E_k\in E^{\alpha}\left(V_s\right),\quad E_m,\,E_\nu\in E^{\omega}\left(V_s\right),\quad i,k,n,\nu\in N\,,$$

$$\psi_i(0,t)=\psi_k(0,t)=\psi_m\left(L_m(t),t\right)=\psi_\nu\left(L_\nu(t),t\right),\psi_j\left(x_j,0\right)=\zeta\left(x_j\right),$$

где $E^{\alpha}(V_s)$ – множество дуг в E с началом в вершинах V, а $E^{\omega}(V_s)$ – множество дуг в E с концом в вершинах V. Функции $\zeta(x)$ и ψ_j дифференцируемые необходимое число раз.

Для нахождения решений начально-краевых задач (3) сделаем замену переменных $y_j=\dfrac{x_j}{L(t)}$ и перейдем к соответствующим задачам для графа G_0 с постоянными ребрами [7–9]. В результате преобразований получим следующие начально-краевые задачи на графе G_0 с постоянными ребрами:

$$\frac{\partial\psi_j(y_j,t)}{\partial t}-\frac{1}{L^2(t)}\frac{\partial^2\psi_j(y_j,t)}{\partial y_j^2}+\frac{1}{L(t)}[p_{1j}(y_j,t)-y_j\frac{d\,L(t)}{d\,t}]\frac{\partial\psi_j(y_j,t)}{\partial y_j}+$$

$$+\ p_{0j}(y_j,t)\psi_j(y_j,t)=\mu\psi_j(y_j,t)\,,\ \ y_j\in\left(0,l_j\right),$$

$$\sum_{E_k\in E^{\alpha}(V_s)}D_k\frac{\partial\psi_k\left(y_k,t\right)}{\partial y_k}\bigg|_{y_k=0}-\sum_{E_m\in E^{\omega}(V_s)}D_m\frac{\partial\psi_m\left(y_m,t\right)}{\partial y_m}\bigg|_{y_m=l_m}=0,$$

$$E_i,\,E_k\in E^{\alpha}\left(V_s\right),\quad E_m,\,E_\nu\in E^{\omega}\left(V_s\right),\ \ i,k,n,\nu\in N\,,\tag{4}$$

$$\psi_i(0,t)=\psi_k(0,t)=\psi_m\left(l_m,t\right)=\psi_\nu\left(l_\nu,t\right),\ \psi_j\left(y_j,0\right)=\zeta\left(y_j\right).$$

В работах [12, 13] разработан метод вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных дифференциальных операторов, заданных в гильбертовом пространстве H. Воспользуемся им для нахождения собственных чисел спектральных задач (4). Для этого построим последовательность $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных пространств $H_n \subseteq H$, которая будет полной в H. Если известны ортонормированные базисы $\{\omega_k\}_{k=1}^{n}$ пространств H_n, удовлетворяющие граничным условиям (4), то имеет место терема

Теорема 1. Приближенные собственные значения $\tilde{\mu}_n$ спектральной задачи (4) находятся по линейным формулам

$$\tilde{\mu}_n = (U\omega_n, \omega_n) + \tilde{\delta}_n, \ \lim_{n\to\infty} |\tilde{\delta}_n| = 0, \ n \in N, \tag{5}$$

где $\tilde{\delta}_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\tilde{\mu}_k(n-1) - \tilde{\mu}_k(n)\right]$, $\tilde{\mu}_k(n)$ – n-е приближение по Галеркину к соответствующим значениям μ_k спектральной задачи (4).

Вычисление приближенных собственных значений $\tilde{\mu}_n(t)$ оператора F, заданного на графе G_0 по формулам (5), требует знания ортонормированных систем функций $\left\{\omega_{jk}(y_j,t)\right\}_{k=1}^{n}$, которые удовлетворяют граничным условиям (4) и являются базисами пространств H_n. В этом случае формулы (5) в момент времени $t = t_*$ примут вид

$$\tilde{\mu}_n(t_*) = \frac{1}{t_*}\sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*}\int_0^{l_j} F\left(\omega_{jn}(y_j,t)\right)\omega_{jn}(y_j,t)\,dy_j\,dt =$$

$$= \frac{1}{t_*}\sum_{j=1}^{j_0} d_j \int_0^{t_*}\int_0^{l_j} \Big\{ \frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial t} - \frac{1}{L^2(t)}\frac{\partial^2 \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j^2} + \frac{1}{L(t)}\Big[p_{1j}(y_j,t) - y_j\frac{dL(t)}{dt}\Big]\frac{\partial \omega_{jn}(y_j,t)}{\partial y_j} +$$

$$+ p_{0j}(y_j,t)\,\omega_{jn}(y_j,t) \Big\}\,\omega_{jn}(y_j,t)\,dy_j\,dt + \tilde{\delta}_n(t_*). \tag{6}$$

Используя формулы (6), можно вычислить значения собственных чисел вектор-оператора F заданного на графе G_t с изменяющимися во времени длинами ребер, в необходимый момент времени и необходимого порядка.

Литература

1. Провоторов, В.В. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля на графе-звезде / В.В. Провоторов // Матем. сб. – 2008. – Т. 199, № 10. – С. 105–126.
2. Keating, J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs / J.P. Keating // Quantum graphs and their applications. Contemporary Mathematics. – 2006. – Vol. 415. – P. 191–200.
3. Time-Dependent Quantum Graph / D.U. Matrasulov, J.R. Yusupov, K.K. Sabirov, Z.A. Sobirov // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges. – 2015. – Vol. 6, no. 2. – P. 173–181.
4. Никифоров, Д.С. Модель квантовых графов с ребрами меняющейся длины: дис. ... канд. тех. наук / Д.С. Никифоров. – Санкт Петербург, 2018. – 125 с.
5. Кадченко, С.И. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных следов / С.И. Кадченко, О.А. Торшина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 40 (299), вып. 14 . – С. 83–88.
6. Кадченко, С.И. Вычисление собственных чисел эллиптических дифференциальных операторов с помощью теории регуляризованных рядов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 36–43
7. Кадченко, С.И. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

// Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6 (97). – С. 13–21.

8. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел дискретных полуограниченных операторов заданных на квантовых графах типа звезда с переменными ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова, И.Е. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2024. – Т. 17, № 4. – С. 51–65.

9. Кадченко, С.И. Алгоритмы вычисления собственных чисел начально-краевых задач для волнового дифференциального уравнения, заданного на графе с изменяющимися ребрами / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2024. – Т. 16, № 4. – С. 29–34.

10. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges / S.I. Kadchenko, L.S. Ryazanova // Journal of Computational Engineering Mathematics. – 2024. – Vol. 11, Iss. 4. – P. 49–60.

11. Ставцева, А.В. Программный комплекс численного решения обратных спектральных задач, порожденных возмущенным оператором Штурма–Лиувилля, на конечных связных геометрических графах / А.В. Ставцева, С.И. Кадченко // Свидетельство № 2021662776 Российская Федерация; заявление 24.06.2021, зарегистрир. 04.08.2021, реестр программы на ЭВМ.

12. Kadchenko, S.I. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators / S.I. Kadchenko, G.A. Zakirova // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, no. 7. – C. 323–329.

13. Кадченко С.И., Какушкин С.Н. Вычисление значений собственных функций дискретных полуограниченных операторов методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестник Самарского Университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 6(97). – С. 13–21.

Поступила в редакцию 9 октября 2025 г.

Сведения об авторе

Кадченко Сергей Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Магнитогорский государственный технический университет имени Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Российская Федерация, e-mail: sikadchenko@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2025, vol. 17, no. 4, pp. 5–9

DOI: 10.14529/mmph250401

ALGORITHMS FOR CALCULATING EIGENVALUES OF INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS DEFINED ON CONNECTED GRAPHS WITH CHANGING EDGES

S.I. Kadchenko
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation
E-mail: sikadchenko@mail.ru

Abstract. The development of new technologies in science and engineering has led to a need for mathematical methods to efficiently calculate the eigenvalues of partial differential operators on graphs with time-varying geometric parameters. The paper presents algorithms developed using the example of canonical parabolic partial differential equations to compute their eigenvalues. The analytical formulas obtained from these algorithms can approximate the eigenvalues at specific time points.

Keywords: initial-boundary value problems; connected graphs; eigenvalues and eigenfunctions of operators; discrete and semi-bounded operators; Galerkin method; regularized trace method.

References

1. Provotorov V.V. Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem on a Star Graph. *Sbornik: Mathematics*, 2008, Vol. 199, Iss. 10, pp. 1523–1545. DOI: 10.1070/SM2008v199n10ABEH003971

2. Keating J.P. Fluctuation Statistics for Quantum Star Graphs. Quantum Graphs and their Applications. *Contemporary Mathematics*, 2006, Vol. 415, pp. 191–200. DOI: 10.1090/conm/415/07869

3. Matrasulov D.U., Yusupov J.R., Sabirov K.K., Sobirov Z.A. Time-Dependent Quantum Graph. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. *Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges*, 2015, Vol. 6, no. 2, pp. 173–181. DOI: 10.17586/2220-8054-2015-6-2-173-181

4. Nikiforov D.S. *Model' kvantovykh grafov s rebrami menyayushcheysya dliny: dis. ... kand. tekh. nauk* (Model of Quantum Graphs with Edges of Varying Length: Cand. phys. and math. sci. diss.). Saint Petersburg, 2018, 125 p. (in Russ.).

5. Kadchenko S.I., Torshina O.A. The Algorithm of Finding of Meanings of Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operators Via Method of Regularized Traces. *Bulletin of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*. 2012. no. 40 (299), iss. 14, pp. 83–88.

6. Kadchenko S.I., Torshina O.A. Calculation of Eigenvalues of Elliptic Differential Operators Using the Theory of Regularized Series. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2016, Vol. 8, no. 2, pp. 36–43.

7. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21.

8. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S., Kadchenko I.E. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Discrete Semi-Bounded Operators Defined on Quantum Graphs of Star Type with Variable Edges. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2024, Vol. 17, Iss. 4, pp. 51–65. (in Russ.).

9. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Initial-Boundary Value Problems for a Wave Differential Equation Given on a Graph with Changing Edges. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2024, Vol. 16, no. 4, pp. 29–34. (in Russ.).

10. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. Algorithms for Calculating Eigenvalues of Second Order Parabolic Differential Operators on Quantum Stat Graphs with Time-Varying Edges. *Journal of Computational Engineering Mathematics*, 2024, Vol. 11, Iss. 4, pp. 49–60. DOI: 10.14529/jcem240401

11. Stavtsova A.V., Kadchenko S.I. *Software Package for Numerical Solution of Inverse Spectral Problems Generated by a Perturbed Sturm–Liouville Operator on Finite Connected Geometric graphs*. Certificate No. 2021662776 Russian Federation; application 24.06.2021, registered. 04.08.2021, computer program registry.

12. Kadchenko S.I., Zakirova G.A. Computation of Eigenvalues of Discrete Lower Semibounded Operators. *Applied Mathematical Sciences*, 2016, Vol. 10, no. 7, pp. 323–329. DOI: 10.12988/ams.2016.510625

13. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. The Calculating of Meanings of Eigen Functions of Discrete Semibounded from Below Operators via Method of Regularized Traces. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2012, no. 6(97), pp. 13–21

Received October 9, 2025

Information about the authors

Kadchenko Sergey Ivanovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Applied Mathematics and Informatics Department, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russian Federation, e-mail: sikadchenko@mail.ru.