

# Механика

УДК 539.3

DOI: 10.14529/mmp250406

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ СТЕСНЕННОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ

**И.К. Андрианов**

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,  
Российская Федерация  
E-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрено осесимметричное упругопластическое деформирование толстостенной стесненной оболочки из несжимаемого материала, находящейся под действием внутреннего давления. Полученное на основании метода переменных параметров упругости решение задачи учитывает нелинейный закон деформационного упрочнения. По результатам расчетов представлена картина распределения радиальных, окружных и осевых напряжений для различных относительных толщин стенки оболочки в случае, когда граница пластической зоны проходит через срединную поверхность оболочки.

**Ключевые слова:** упругопластическая деформация; нелинейный закон упрочнения; толстостенная оболочка; осевая симметрия.

### Введение

В широкой практике достаточно часто встречаются материалы, при упругопластическом деформировании которых имеет место физическая нелинейность, которая проявляется в неминимальном законе деформационного упрочнения при описании диаграммы деформирования. В немногих численных трудах рассматриваются вопросы физической нелинейности. Особенно важным данный вопрос представляется для толстостенных оболочек, работающих под давлением. В частности, в работе [1] рассмотрено пластическое деформирование толстостенного цилиндра внутренним давлением при произвольном законе упрочнения и с использованием условия пластичности Треска. Вопросы расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек в условиях неоднородности и физической нелинейности рассматривались в трудах [2, 3]. Сегодня проблеме деформирования оболочек в форме тел вращения уделяется достаточно много внимания. Неклассические математические модели деформирования оболочек и численные методы их расчета исследовались в трудах [4, 5]. Некоторые решения задачи Ламе для цилиндрической оболочки рассматривались в работах [6, 7]. Деформирование осесимметричных оболочек в условиях комбинированного нагружения исследовались в трудах [8–10]. Многие из этих задач рассматривались для моделей жесткопластического тела, а также для моделей материала без упрочнения, в частности, работы [11, 12]. В некоторых задачах данные упрощения обоснованы, однако для многих материалов неучтут упругих деформаций, а также упрочнения может приводить к значительным погрешностям в расчетах напряженно-деформированного состояния толстостенных оболочек.

В рамках данного исследования рассматривалось упругопластическое деформирование стесненной толстостенной оболочки из несжимаемого материала, работающей под внутренним давлением. Особенностью напряженно-деформированного состояния стесненной оболочки является то, что она находится в условиях плоской деформации. Ряд вопросов математического моделирования пластического состояния тел в условиях плоской деформации исследовались в работах [13–15].

В работе [16] представлено решение задачи о деформировании толстостенной стесненной цилиндрической оболочки под внутренним давлением, но для модели идеального упругопластического тела. В условиях же физической нелинейности расчет напряженно-деформированного состояния оболочек представляет собой сложную математическую задачу и требует разработки численных процедур. В рамках данного исследования численный расчет напряженно-деформированного состояния осесимметричной оболочки проводился при нелинейном законе деформационного упрочнения.

## Методика исследования

Решение задачи осесимметричного упругопластического деформирования толстостенной оболочки под внутренним давлением будем проводить на основании положений линейной теории упругости и деформационной теории пластичности с использованием метода переменных параметров упругости [17–20]. Учитывая то, что цилиндрическая оболочка находится в условиях равномерного нагружения, расчет будем проводить в главных осях. В качестве меры деформации будем использовать деформацию Генки. Стесненная цилиндрическая оболочка представляет собой цилиндр с закрытыми торцами, соответственно, в результате нагружения оболочки находится в условиях плоской деформации:  $e_{zz} = 0$ , где  $e_{zz}$  – осевая деформация Генки. Поскольку рассматриваемый материал является несжимаемым, коэффициент поперечной деформации принимается  $\mu = 0,5$ .

Математическая постановка задачи упругопластического деформирования толстостенной цилиндрической оболочки из несжимаемого материала в условиях плоской деформации будет описываться следующей системой уравнений:

– уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_{\rho\rho}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\theta\theta}$  – радиальные, окружные напряжения,  $\rho$  – радиальная координата.

– уравнение совместности деформаций Генки [17–20]:

$$\frac{de_{\theta\theta}}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho})}{\rho}, \quad (2)$$

где  $e_{\rho\rho}, e_{\theta\theta}$  – радиальные, окружные деформации Генки,

– физические соотношения согласно методу переменных параметров упругости:

$$\begin{cases} e_{\rho\rho} = \frac{3}{4E}(\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\theta\theta}) \\ e_{\theta\theta} = \frac{3}{4E}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}), \\ \sigma_{zz} = (\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta})/2 \end{cases} \quad (3)$$

где  $\sigma_{zz}$  – осевые напряжения,  $E = \sigma_i/e_i$  – переменный параметр упругости при условии несжимаемости материала,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $e_i$  – интенсивность деформаций Генки:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho}|, \quad (4)$$

$$e_i = \frac{2}{3} \sqrt{e_{\rho\rho}^2 + e_{\rho\rho}e_{\theta\theta} + e_{\theta\theta}^2}, \quad (5)$$

– диаграмма деформирования:

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \quad (6)$$

где  $\Phi(e_i) = \{Ee_i, e_i \leq e_{im}; Ae_i^n, e_i > e_{im}\}$  – функция, аппроксимирующая диаграмму деформирования материала,  $e_{im}$  – интенсивность деформаций Генки, соответствующая переходу упругих деформаций в пластические,  $E$  – модуль Юнга материала,  $A, n$  – параметры кривой упрочнения диаграммы деформирования,

– условие пластичности Мизеса:

$$\sigma_i = \sigma_m, \quad (7)$$

где  $\sigma_m$  – предел текучести материала,

– граничные условия:

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=r} = -p, \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R} = 0, \quad (9)$$

где  $p$  – давление,  $r$  – внутренний радиус оболочки,  $R$  – наружный радиус оболочки.

Для проведения численного расчета представим уравнение совместности деформаций (2) в интегральной форме, выражая окружную деформацию Генки с учетом граничного условия (8):

$$e_{\theta\theta} = \ln \left( -\rho \int_{\rho}^R \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_{\theta\theta} - e_{\rho\rho}) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (10)$$

где  $R_0$  – начальный радиус наружной поверхности оболочки.

Подставим в соотношение (10) физические уравнения (3) для  $e_{\rho\rho}$  и  $e_{\theta\theta}$ . Тогда, выразив окружное напряжение, интегральное уравнение совместности деформаций Генки, представленное в напряжениях для несжимаемой толстостенной цилиндрической оболочки с закрытыми концами, примет вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_{\theta\theta} d\rho + \frac{4}{3} E \ln \left( -\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp \left[ \frac{9}{4E} \sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{4E} \int_\rho^R \sigma_{\theta\theta} d\rho \right] d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (11)$$

Численный расчет системы уравнений (1)–(11) проводился на основании метода переменных параметров упругости с использованием методики решения серий обратных задач [17–20], которая строилась на смещении наружного края оболочки на малую величину согласно соотношению  $R = R_0 + \Delta R$  и расчете напряженно-деформированного состояния, при котором произошло данное смещение. Таким образом, для численного расчета напряженного состояния оболочки итерационная система уравнений согласно соотношениям (1), (3), (4), (11) принимала вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_{\theta\theta}^{(k)} d\rho + \frac{4}{3} E^{(k)} \ln \left( -\rho \int_R^\rho \frac{1}{\rho^2} \exp \left[ \frac{9}{4E^{(k)}} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} \right] d\rho \right) \frac{-9}{4E^{(k)}} \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_{\theta\theta}^{(k)} d\rho d\rho + \frac{\rho}{R_0}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} &= \frac{1}{\rho} \int_R^\rho \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} d\rho, \sigma_{zz}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (\sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)}), \sigma_i^{(k+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} - \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)}). \end{aligned}$$

где  $k$  – номер итерации.

Деформированное состояние оболочки определялось согласно уравнениям (3), (5) на текущей итерации:

$$\begin{aligned} e_{\rho\rho}^{(k+1)} &= \frac{3}{4E^{(k)}} (\sigma_{\rho\rho}^{(k+1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(k+1)}), e_{\theta\theta}^{(k+1)} = \frac{3}{4E^{(k)}} (\sigma_{\theta\theta}^{(k+1)} - \sigma_{\rho\rho}^{(k+1)}), \\ e_i^{(k+1)} &= \frac{2}{3} \sqrt{(e_{\rho\rho}^{(k+1)})^2 + e_{\rho\rho}^{(k+1)} e_{\theta\theta}^{(k+1)} + (e_{\theta\theta}^{(k+1)})^2}. \end{aligned}$$

На основании соотношения (6), описывающего диаграмму деформирования материала, определялся переменный параметр упругости:  $E^{(k+1)} = \Phi(e_i^{(k+1)})/e_i^{(k+1)}$ . Далее итерационный расчет повторялся до тех пор, пока не выполнится условие:  $|\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}|/\sigma_i^{(k+1)} \leq \Delta\sigma$ , где  $\Delta\sigma$  – заданная точность. Расчет внутренней границы определялся согласно схеме  $r^{(j+1)} = r_0 \exp(e_{\theta\theta}^{(j)} \Big|_{\rho=r})$ , где  $j$  – номер итерации,  $r_0$  – начальный радиус внутренней поверхности оболочки,  $|r^{(j+1)} - r^{(j)}|/r^{(j+1)} \leq \Delta r$  – условие окончания процесса,  $\Delta r$  – заданная точность. Затем приложенное давление  $p$  определялось согласно граничному условию (8).

### Результаты исследования

Для оценки напряженного состояния толстостенной цилиндрической оболочки с закрытыми концами, находящейся под внутренним давлением, были проведены серии численных расчетов

при следующих относительных толщинах стенки:  $\delta/R_0 = \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$ , где  $\delta$  – толщина оболочки, наружный радиус принимал фиксированное значение  $R_0 = 100$  мм. В качестве материала оболочки использовалась сталь марки 30ХГСН2А ( $E = 195$  ГПа,  $\sigma_m = 1110$  МПа) [21]. Диаграмма деформирования стали 30ХГСН2А описывалась линейно-степенной аппроксимацией ( $A = 4623, n = 0,276$ ). Для того чтобы оценить распределение напряжений в упругопластической стадии деформирования, внутреннее давление для оболочки каждой толщины подбиралось таким образом, чтобы цилиндрическая поверхность, разделяющая область пластических и упругих деформаций  $\rho_t = \rho|_{\sigma_i=\sigma_t}$ , совпадала со срединной поверхностью  $\rho = (R+r)/2$ . В этом случае внутреннее давление для оболочек различной толщины принималось  $p/\sigma_t = \{0,119; 0,248; 0,394; 0,563; 0,775\}$ . Результаты расчета напряженного состояния оболочки при упругопластическом деформировании с учетом степенного деформационного закона упрочнения представлены на рис. 1–4.

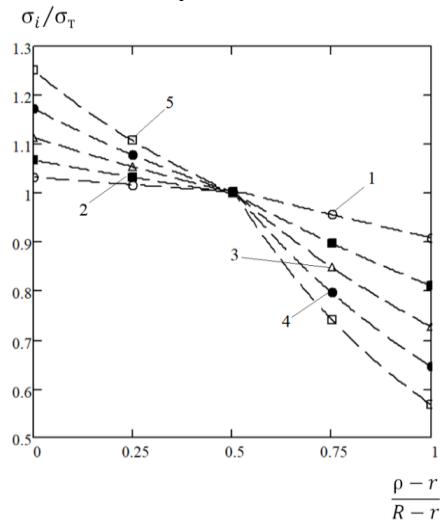


Рис. 1. Распределение интенсивностей напряжений по толщине оболочки при  $\rho_m = (R+r)/2$ :

1 –  $\delta/R=0,1$ , 2 –  $\delta/R=0,2$ , 3 –  $\delta/R=0,3$ ,  
4 –  $\delta/R=0,4$ , 5 –  $\delta/R=0,5$

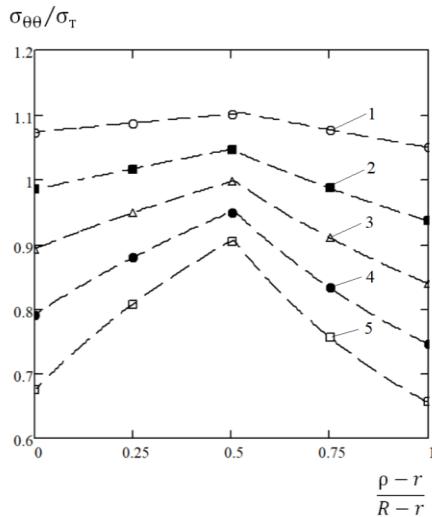


Рис. 3. Распределение окружных напряжений по толщине оболочки при  $\rho_m = (R+r)/2$ : 1 –  $\delta/R=0,1$ ,

2 –  $\delta/R=0,2$ , 3 –  $\delta/R=0,3$ , 4 –  $\delta/R=0,4$ ,  
5 –  $\delta/R=0,5$

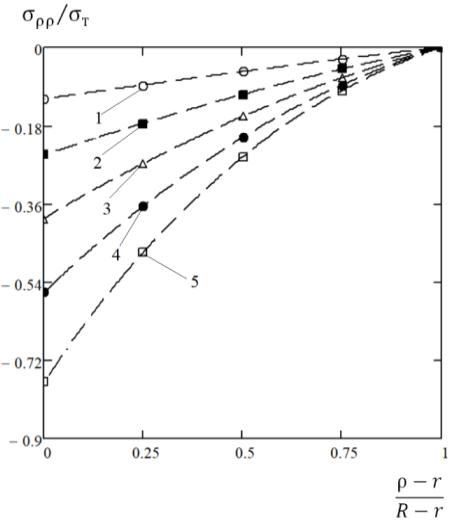


Рис. 2. Распределение радиальных напряжений по толщине оболочки при  $\rho_m = (R+r)/2$ :

1 –  $\delta/R=0,1$ , 2 –  $\delta/R=0,2$ , 3 –  $\delta/R=0,3$ ,  
4 –  $\delta/R=0,4$ , 5 –  $\delta/R=0,5$

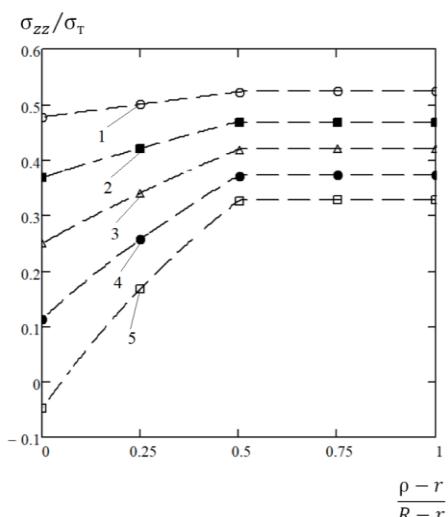


Рис. 4. Распределение осевых напряжений по толщине оболочки при  $\rho_m = (R+r)/2$ : 1 –  $\delta/R=0,1$ ,

2 –  $\delta/R=0,2$ , 3 –  $\delta/R=0,3$ , 4 –  $\delta/R=0,4$ ,  
5 –  $\delta/R=0,5$

# **Механика**

---

## **Обсуждение результатов**

Согласно полученным результатам численных расчетов, с увеличением относительной толщины стенки оболочки радиальные сжимающие напряжения, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, возрастают по абсолютной величине, достигая наибольшее значение на внутренней границе оболочки. Окружные растягивающие напряжения, при которых половина толщины стенки оболочки переходит в стадию пластического деформирования, с увеличением относительной толщины стенки уменьшаются. При этом по толщине стенки окружные напряжения изменяются по нелинейному закону в упругопластической стадии, достигая максимум в срединном сечении стенки оболочки, соответствующем переходу упругих деформаций в пластические. В упругой стадии окружные напряжения уменьшаются, а в пластической стадии – увеличиваются. Осевые напряжения в пределах пластических деформаций возрастают по толщине стенки оболочки, а в пределах упругих деформаций остаются постоянными. С увеличением относительной толщины стенки оболочки осевые напряжения, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, уменьшаются. В пластической стадии деформирования интенсивности напряжений, при которых половина толщины стенки переходит в стадию пластического деформирования, возрастают с увеличением относительной толщины стенки, а в упругой стадии – с уменьшением относительной толщины стенки.

## **Заключение**

Полученные в рамках данного исследования результаты позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние толстостенной стесненной цилиндрической оболочки из несжимаемого материала, находящейся под действием внутреннего давления, в том случае, если диаграмма деформирования материала в пластической стадии описывается нелинейным законом деформационного упрочнения. Построенные графические зависимости позволяют оценить в зависимости от изменения относительной толщины стенки оболочки характер изменения окружных, радиальных и осевых напряжений, возникающих при упругопластическом деформировании, когда пластическая зона охватывает половину толщины стенки оболочки, что может быть использовано в задачах автофretирования.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №25-79-10135, <https://rscf.ru/project/25-79-10135/>.*

## **Литература**

1. Александров, С.Е. Расчет толщины стенки трубопровода под внутренним давлением при произвольном законе упрочнения / С.Е. Александров, Р.В. Гольдштейн // Деформация и разрушение материалов. – 2011. – № 9. – С. 15–20.
2. Полякова, Л.С. Расчет трехслойной цилиндрической оболочки конечной длины с учетом нелинейности и непрерывной неоднородности / Л.С. Полякова, В.И. Андреев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 2(283). – С. 36–42.
3. Андреев, В.И. Физически нелинейные задачи для неоднородных толстостенных оболочек / В.И. Андреев, Л.С. Полякова // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. – 2016. – Т. 12, № 4. – С. 36–40.
4. Аннин, Б.Д. Неклассические модели теории пластин и оболочек / Б.Д. Аннин, Ю.М. Волчков // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т. 57, № 5(339). – С. 5–14.
5. Коробейников, С.Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения / С.Н. Коробейников // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6, № 5. – С. 39–59.
6. Зингерман, К.М. Некоторые качественные эффекты в точных решениях задачи Ламе при больших деформациях / К.М. Зингерман, В.А. Левин // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, № 2. – С. 283–303.
7. Абдеев, Б.М. Противоречие в осесимметричной классической задаче Ламе о напряженном состоянии упругого цилиндра / Б.М. Абдеев, Г. Муслиманова // Материалы IX Международной заочной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике», 17 апреля 2012 г. – 2012. – № 9. – С. 46–50.

8. Игнатик, А.А. Напряженно-деформированное состояние трубопровода под воздействием комбинированной нагрузки / А. А. Игнатик // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2020. – Т. 10, № 1. – С. 22–31.
9. Хохлов, А.В. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полого цилиндра из нелинейно наследственного материала под действием внутреннего и внешнего давлений / А.В. Хохлов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика» – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 44–54.
10. Яхно, Б.О. Напряжено-деформированное состояние цилиндрических толстостенных перфорированных оболочек / Б.О. Яхно, С.И. Трубачев // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Серия: Машиностроение. – 2013. – № 1(67). – С. 126–130.
11. Дьяконов, О.М. Пластическое течение изотропного жесткопластического тела при однородной деформации / О.М. Дьяконов // Известия Национальной академии наук Беларусь. Серия физико-технических наук. – 2021. – Т. 66, № 2. – С. 186–193.
12. Барашков, В.Н. Анализ упругопластического напряжённого состояния цилиндрической трубы, нагруженной внутренним давлением / В.Н. Барашков, М.Ю. Шевченко // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2018. – Т. 20, № 3. – С. 100–111.
13. Артемов, М.А. Математическое моделирование пластического состояния тел. плоская деформация / М.А. Артемов, Е.С. Барановский // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – № 2(24). – С. 72–87.
14. Бакушев, С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений / С.В. Бакушев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 69. – С. 69–85.
15. Буренин, А.А. Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления / А.А. Буренин, Л.В. Ковтаник, Г.Л. Панченко // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – № 1. – С. 6–18.
16. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.
17. Андрианов, И.К. Обратная задача упругопластического деформирования свободной толстостенной цилиндрической оболочки с учетом нелинейного закона упрочнения / И.К. Андрианов, С.И. Феоктистов // Проблемы прочности и пластичности. – 2024. – Т. 86, № 3. – С. 259–269.
18. Feoktistov, S.I. Modeling of Hydraulic Autofrettage of Thick-Walled Cylindrical Shells Taking into Account Elastoplastic Anisotropy Caused by the Bauschinger Effect / S.I. Feoktistov, I.K. Andrianov, H. Lin // Mechanics of Solids. – 2025. – Vol. 60, no. 2. – P. 891–911.
19. Феоктистов, С.И. Моделирование напряжённо-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек с учётом физической нелинейности материала / С.И. Феоктистов, И.К. Андрианов, Л. Тхет // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. – 2022. – № 3(59). – С. 12–20.
20. Андрианов, И.К. Анализ нагружения толстостенных оболочек в пространстве Ильюшина при автофrettировании / И.К. Андрианов, С.И. Феоктистов // Прикладная математика и механика. – 2025. – Т. 89, № 2. – С. 295–309.
- 21 Скларов Н.М. Авиационные материалы. Справочник в 9 томах. Том 1. Конструкционные стали / Н.М. Скларов. – Москва: ОНТИ, 1975. – 431 с.

*Поступила в редакцию 22 сентября 2025 г.*

### Сведения об авторе

Андраник Иван Константинович – кандидат технических наук, доцент, Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация, e-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru.

## AXISYMMETRIC DEFORMATION OF A THICK-WALLED CONSTRAINED SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE WITH A NONLINEAR LAW OF STRAIN HARDENING

**I.K. Andrianov**

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russian Federation  
E-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru

Abstract. The study considers axisymmetric elastoplastic deformation of a thick-walled constrained shell made of incompressible material subjected to internal pressure. The problem is solved using the method of variable elasticity parameters, taking into account the nonlinear law of deformation hardening. Based on the calculation results, the paper presents the distribution of radial, circumferential, and axial stresses for various relative shell wall thicknesses when the boundary of the plastic zone passes through the median surface of the shell.

*Keywords:* elastoplastic strain; nonlinear hardening law; thick-walled shell; axial symmetry.

### References

1. Aleksandrov S.E., Goldstein R.V. Calculation of the Pipeline Wall Thickness under Internal Pressure at an Arbitrary Law of Hardening. *Russ. Metallurgy (Metally)*, 2012, Iss. 10, pp. 873–878.
2. Polyakova L.S., Andreev V.I. Calculation of the Three-layer Cylindrical Shell of Final Length with Account of Nonlinearity and Continuous Inhomogeneity. *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy*, 2019, no. 2(283), pp. 36–42. (in Russ.).
3. Andreev V.I., Polyakova L.S. Physically Nonlinear Problems for Inhomogeneous Thick-Walled Shells. *International Journal for Computational Civil And Structural Engineering*, 2016, Vol. 12, no. 4, pp. 36–40. DOI: 10.22337/1524-5845-2016-12-4-36-40.
4. Annin B.D., Volchkov Yu.M. Neklassicheskie modeli teorii plastin i obolochek (Non-Classical Models of Plate and Shell Theory). *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, Vol. 57, no. 5(339), pp. 5–14. DOI 10.15372/PMTF20160501.
5. Korobeinikov S.N. Numerical Solution of Equations with Singularities of Deformation of Elastoplastic Shells of Revolution. *Computational technologies*, 2001, Vol. 6, no. 5, pp. 39–59. (in Russ.).
6. Zingerman K.M., Levin V.A. Some Qualitative Effects in the Exact Solutions of the Lamé Problem for Large Deformations. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, Vol. 76, Iss. 2, pp. 205–219. (in Russ.).
7. Abdeev B.M., Muslimanova G. Contradiction in Axisymmetric Classical Problem about Stress Lame State of the Elastic Cylinder. *Materialy IX Mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Tekhnicheskie nauki – ot teorii k praktike"*, 17 aprelya 2012 g (Proc. IX International Correspondence Scientific and Practical Conference "Technical Sciences – from theory to practice", April 17, 2012), 2012, no. 9, pp. 46–50. (in Russ.).
8. Ignatik A.A. Stress-Strain State of a Pipeline Subject to the Influence of a Combined Load. *Nauka i Tehnologii Truboprovodnogo Transporta Nefti i Nefteproduktov – Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2020, Vol. 10, no. 1, pp. 22–31. (in Russ.). DOI: 10.28999/2541-9595-2020-10-1-22-31.
9. Khokhlov A.V. Exact Solution of the Boundary Value Problem for Strain and Stress Fields in a Thick Tube Made of Physically Non-linear Elasto-viscoplastic Material Under Given Internal and External Pressures. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, Vol. 12, no. 1, pp. 44–54. DOI: 10.14529/mmp200106

10. Yakhno B., Trubachev S. Stress-Strain State of the Cylindrical Walled Perforated Shells. *Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta Ukrayny "Kievskiy politekhnicheskiy institute". Seriya: Mashinostroenie*, 2013, no. 1(67), pp. 126–130. (in Russ.).
11. Dyakonov O.M. Plastic Flow of Isotropic Rigid Body at Uniform Deformation. Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. *Physical-technical series*, 2021, Vol. 66, no. 2, pp. 186–193. (in Russ.). DOI: 10.29235/1561-8358-2021-66-2-186–193.
12. Barashkov V.N., Shevchenko M.U. Elastoplastic Stress State of Cylindrical Pipe Under Internal Pressure. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkitekturno-stroitel'nogo universiteta*, 2018, Vol. 20, no. 3, pp. 100–111. DOI: 10.31675/1607-1859-2018-20-3-100-111
13. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Mathematical Modeling of Plastic State of the Bodies in Case of Plane Strain. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2015, no. 2(24), pp. 72–87. (in Russ.).
14. Bakushev S.V. Differential Equations of Balanced Continuum for Planar Deformation in Cylindrical Coordinates at Bilinear Approximation of Crossing Equations. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 69, pp. 69–85. DOI: 10.17223/19988621/69/6.
15. Burenin A.A., Panchenko G.L., Kovtanyuk L.V. Deformation and Heating of an Elastoviscoplastic Cylindrical Layer Moving Owing to a Varying Pressure Drop. *Mechanics of Solids*, 2018, Vol. 53, no. 1, pp. 1–11. DOI: 10.3103/S0025654418010016
16. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* (Applied Theory of Plasticity and Creep). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 399 p. (in Russ.).
17. Andrianov I.K., Feoktistov S.I. Inverse Problem of Elastic-plastic Deformation of a Free Thick-walled Cylindrical Shell taking into Account the Nonlinear Law of Hardening. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2024, Vol. 86, no. 3, pp. 259–269. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-259-269.
18. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Lin H. Modeling of Hydraulic Autofrettage of Thick-Walled Cylindrical Shells Taking into Account Elastoplastic Anisotropy Caused by the Bauschinger Effect. *Mechanics of Solids*, 2025, Vol. 60, no. 2, pp. 891–911. DOI: 10.1134/S0025654424603367.
19. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Htet L. Modeling of the Stress-strain State of Thick-walled Cylindrical Shells Taking into Account Physical Nonlinearity of the Material. *Scholarly Notes of Komsomolsk-na-Amure State Technical University*, 2022, no. 3(59), pp. 12–20. DOI 10.17084/20764359-2022-59-12
20. Andrianov I.K., Feoktistov S.I. Loading Analysis of Thick-walled Shells in Ilyushin Stress Space During Autofrettage. *Prikladnaya matematika i mehanika*, 2025, Vol. 89, no. 2, pp. 295–309. (in Russ.). DOI 10.31857/S0032823525020087
21. Sklyarov N.M. *Aviationskiye materialy. Spravochnik v 9 tomakh. Tom 1. Konstrukcionnye stali* (Aviation Materials. The Reference Book is in 9 Volumes. Vol. 1. Structural Steels). Moscow, ONTI Publ., 1975, 431 p. (in Russ.).

*Received September 22, 2025*

#### Information about the author

Andrianov Ivan Konstantinovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation, e-mail: ivan\_andrianov\_90@mail.ru.