

# ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА–ПУАЗЕЙЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С МАЛОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

**А.В. Горшков<sup>1,2</sup>, Е.Ю. Просвиряков<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: alex55gor@mail.ru, evgen\_pros@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается неоднородное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее трехмерное крупномасштабное изотермическое завихренное течение Куэтта–Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости. На свободной недеформируемой границе жидкости (приближение «твердой» крышки) заданы касательные напряжения, моделирующие воздействие ветра (силу трения). На твердой нижней поверхности бесконечного горизонтального слоя жидкости заданы условия скольжения Навье. В статье рассматривается установившееся переходное состояние от неоднородного сдвигового течения к трехмерному движению жидкости с малой вертикальной скоростью. Исследуется влияние малых отклонений граничных условий от условий совместности переопределенной системы уравнений, описывающей неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазейля. Показано, что при нарушении условий совместности вертикальная компонента скорости может быть отличной от нуля. Решение разрешающей системы трехмерных уравнений Навье–Стокса построено в виде ряда по степеням малого параметра, определяющего отклонение граничных от условий совместности с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты. Коэффициенты получены в виде полиномов вертикальной координаты.

**Ключевые слова:** уравнения Навье–Стокса; трехмерные течения; сдвиговые течения; точное решение; условие совместности; возмущение; малый параметр.

## Введение

Точные решения уравнений гидродинамики используются для математического моделирования многих процессов химической и нефтехимической технологий, включая процессы конвективного массо- и теплопереноса и различных природных явлений [1–4]. Адвективные изотермические течения невращающейся вязкой жидкости исследовались многими авторами [5–9]. В работах [1, 2, 5–9] рассматривалось применение класса точных решений уравнений Навье–Стокса для сжимаемой жидкости с линейной зависимостью компонент решения от двух координат. Коэффициенты линейных функций зависят от третьей координаты. Решение задачи сводится к интегрированию нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В научных статьях [10–14] предлагается использовать этот класс точных решений для описания адвективного (слоистого) течения вязкой несжимаемой жидкости. В результате подстановки класса решений в уравнения Навье–Стокса получается переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, как замечают сами авторы, вопрос об условиях совместности полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений ими не рассматривался.

В работах [15–18] построены точные решения системы уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью горизонтальных компонент скорости от двух координат, описывающие адвективное (слоистое) течение вязкой несжимаемой жидкости. Такое решение будем называть неоднородным, в отличие от точного решения, в котором компоненты скорости зависят только от одной координаты. В работах получены и исследованы условия совместности системы уравнений, описывающей неоднородное решение. Условия совместности накладывают некоторые ограничения на компоненты скорости течения жидкости и, следовательно, на граничные условия задачи.

В настоящей работе исследуется неоднородное решение, описывающее изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости по твердой плоскости с учетом скольжения по твердой по-

верхности при малых нарушениях условий совместности. Предполагается, что отклонения пропорциональны малому параметру. Решение построено в виде ряда по степеням малого параметра. Коэффициенты рядов являются многочленами вертикальной переменной. Построены первые приближения решения. Показано, что при нарушении условий совместности возникает вертикальная компонента скорости.

### Постановка задачи

Рассмотрим установившееся изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое жидкости. Течение описывается уравнениями Навье–Стокса, которые в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_x, \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_y, \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta V_z, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) введены следующие обозначения:  $V_x, V_y, V_z$  – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости;  $V_h$  – характерный масштаб горизонтальных компонент скорости; масштаб вертикальной компоненты скорости выбран в виде  $V_v = \delta V_h$ ; безразмерные горизонтальные координаты  $x, y$  определены характерным масштабом длины  $L$ , а поперечная координата  $z$  – толщиной слоя жидкости  $h$ ;  $\delta = h/L$  – отношение масштабов длины,  $\nu$  – коэффициент кинематической

(молекулярной) вязкости жидкости,  $\text{Re} = LV_h/\nu$  – число Рейнольдса,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в безразмерных переменных.

Для нахождения частного решения системы уравнений (1) зададим граничные условия на обеих границах слоя жидкости. На нижней, твердой поверхности, описываемой уравнением  $z = 0$ , предполагается скольжение жидкости согласно условию Навье [19–24]:

$$a \left( \frac{1}{\delta} \frac{\partial V_x}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = V_x, \quad a \left( \frac{1}{\delta} \frac{\partial V_y}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} = V_y \quad (2)$$

и условие непротекания  $V_z|_{z=0} = 0$ . Здесь  $a$  – безразмерный коэффициент трения. На свободной недеформируемой поверхности (приближение «твердой» крышки), описываемой уравнением  $z = 1$ , задана сила  $\mathbf{F}$  в безразмерном виде с компонентами  $\mathbf{F} = (\tau_x, \tau_y, P_a)$ . Компоненты силы  $\tau_x, \tau_y$  задают касательные напряжения на свободной поверхности жидкости, моделирующие воздействие ветра [19–24]:

$$\left( \frac{1}{\delta} \frac{\partial V_x}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=1} = \tau_x, \quad \left( \frac{1}{\delta} \frac{\partial V_y}{\partial z} + \delta \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=1} = \tau_y. \quad (3)$$

Будем считать, что касательные напряжения  $\tau_x, \tau_y$  являются линейными функциями горизонтальных координат:

$$\tau_x = \tau_{10} + x\tau_{11} + y\tau_{12}, \quad \tau_y = \tau_{20} + x\tau_{21} + y\tau_{22},$$

где  $\tau_{ij}$  – постоянные. Третья компонента силы  $\mathbf{F}$  – давление атмосферы  $P_a$ . Давление  $P_a$  задается квадратичной функцией:

$$P_a = P_0^0 + xP_{10}^0 + yP_{01}^0 + x^2P_{20}^0 + xyP_{11}^0 + y^2P_{02}^0,$$

где  $P_0^0, P_{10}^0, P_{01}^0, P_{20}^0, P_{11}^0, P_{02}^0$  – постоянные.

Точное решение системы (1) будем искать в полиномиальном классе Линя–Сидорова–Аристова [1, 3]

$$\begin{aligned} V_x &= U_0(z) + xU_1(z) + yU_2(z), \quad V_y = V_0(z) + xV_1(z) + yV_2(z), \\ V_z &= W(z), \end{aligned} \quad (4)$$

$$P = P_0(z) + xP_{10}(z) + yP_{01}(z) + x^2P_{20}(z) + xyP_{11}(z) + y^2P_{02}(z).$$

Здесь  $U_0, V_0$  – фоновые слагаемые горизонтальных компонент скорости жидкости, функции  $U_1, V_1, U_2, V_2$  описывают скорость деформации элемента жидкости (пространственные ускорения).

После подстановки вида решений (4) в систему исходных уравнений (1) получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} U_0'' &= \delta^2 \operatorname{Re}[P_{10} + U_0U_1 + V_0U_2 + WU_0'], \quad V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}[P_{01} + U_0V_1 + V_0V_2 + WV_0'], \\ U_1'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (2P_{20} + U_1^2 + U_2V_1 + WU_1'), \quad U_2'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{11} + U_1U_2 + U_2V_2 + WU_2'), \\ V_1'' &= \delta^2 \operatorname{Re}(P_{11} + U_1V_1 + V_1V_2 + WV_1'), \quad V_2'' = \delta^2 \operatorname{Re}[2P_{02} + U_2V_1 + V_2^2 + WV_2'], \end{aligned} \quad (5)$$

$$W'' = \operatorname{Re} P_{00}' + \operatorname{Re} \delta^2 WW',$$

$$U_1 + V_2 + W' = 0,$$

$$P_{10}' = 0, \quad P_{01}' = 0, \quad P_{20}' = 0, \quad P_{02}' = 0, \quad P_{11}' = 0.$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная соответствующей функции по переменной  $z$ . Для слоистого течения ( $W(z) = 0$ ) система уравнений (5) примет вид:

$$\begin{aligned} U_0'' &= \delta^2 \operatorname{Re}[P_{10} + U_0U_1 + V_0U_2], \quad V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re}[P_{01} + U_0V_1 + V_0V_2], \\ P_{00}' &= 0, \quad P_{10}' = 0, \quad P_{01}' = 0, \quad P_{20}' = 0, \quad P_{02}' = 0, \quad P_{11}' = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_1'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (2P_{20} + U_1^2 + U_2V_1), \quad U_2'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{11} + U_1U_2 + U_2V_2), \\ V_1'' &= \delta^2 \operatorname{Re}(P_{11} + U_1V_1 + V_1V_2), \quad V_2'' = \delta^2 \operatorname{Re}[2P_{02} + U_2V_1 + V_2^2], \end{aligned} \quad (7)$$

$$U_1 + V_2 = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (2) и (3) для систем уравнений (6)–(8) с учетом класса решения (4) следующие:

$$\begin{aligned} \delta U_0(0) &= aU_0'(0), \quad \delta V_0(0) = aV_0'(0), \\ \delta U_1(0) &= aU_1'(0), \quad \delta V_1(0) = aV_1'(0), \quad \delta U_2(0) = aU_2'(0), \quad \delta V_2(0) = aV_2'(0), \\ U_0'(1) &= \delta \tau_{10}, \quad V_0'(1) = \delta \tau_{20}, \quad U_1'(1) = \delta \tau_{11}, \quad V_1'(1) = \delta \tau_{21}, \quad U_2'(1) = \delta \tau_{12}, \quad V_2'(1) = \delta \tau_{22}, \\ P_{10}(1) &= P_{10}^0, \quad P_{01}(1) = P_{01}^0, \quad P_{20}(1) = P_{20}^0, \quad P_{02}(1) = P_{02}^0, \quad P_{11}(1) = P_{11}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (6) описывает фоновые слагаемые компонент скорости, а система уравнений (7), (8) – коэффициенты сдвиговых слагаемых компонент скорости жидкости. Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (7), (8) – переопределенная (дифференциально-алгебраическая) система уравнений. Условия совместности системы (7), (8) исследовались в работах [1, 2, 15] и имеют вид

$$U_1^2 + U_2V_1 = 0, \quad (10)$$

$$P_{20} = 0, \quad P_{02} = 0, \quad P_{11} = 0. \quad (11)$$

Общее решение системы (7) с учетом условий совместности (10), (11) и условия несжимаемости (8) представляется линейными функциями переменной  $z$ :

$$U_1 = C_1z + C_2, \quad U_2 = C_3z + C_4, \quad V_1 = C_5z + C_6, \quad V_2 = -(C_1z + C_2).$$

Условие совместности (10) в терминах граничных условий (9) получится следующим [6]:

$$\begin{aligned} \tau_{12}\tau_{21} + \tau_{11}^2 &= 0, \\ P_{20}^0 &= 0, \quad P_{11}^0 = 0, \quad P_{02}^0 = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а условие несжимаемости (8)

$$\tau_{11} + \tau_{22} = 0. \quad (13)$$

При выполнении условий совместности (12) реализуется слоистое изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим решение системы (5) при малых нарушениях (возмущениях) условия совместности. Для этого представим касательные напряжения на свободной границе в виде

$$\tau_{11} = \tau_{11}^0 + \mu \tau_{11}^1, \quad \tau_{12} = \tau_{12}^0 + \mu \tau_{12}^1, \quad \tau_{21} = \tau_{21}^0 + \mu \tau_{21}^1, \quad \tau_{22} = -\tau_{11}^0 + \mu \tau_{22}^1,$$

где  $\mu$  – малый параметр,  $\tau_{ij}^0$  – невозмущенные значения,  $\tau_{ij}^1$  – возмущения касательных напряжений. Соответственно, коэффициенты квадратичных слагаемых в выражении давления атмосферы

$$P_{20}^0 = \mu P_{20}^1, \quad P_{11}^0 = \mu P_{11}^1, \quad P_{02}^0 = \mu P_{02}^1.$$

Слагаемые касательных напряжений на свободной поверхности  $\tau_{10}$ ,  $\tau_{20}$  и коэффициенты линейных по  $x$ ,  $y$  слагаемых давления не входят в условия совместности и считаются невозмущенными. Считается, что при  $\mu = 0$  выполняются условия совместности (12) и условия несжимаемости (13) и невозмущенное движение является слоистым:

$$\left(\tau_{11}^0\right)^2 + \tau_{12}^0 \tau_{21}^0 = 0.$$

Тогда выражение (12) с подстановкой возмущений примет вид

$$\mu \left( \tau_{11}^0 \tau_{11}^1 + \tau_{12}^0 \tau_{21}^1 + \tau_{21}^0 \tau_{12}^1 - \tau_{11}^0 \tau_{22}^1 \right) + \mu^2 \left( \left( \tau_{11}^1 \right)^2 + \tau_{12}^1 \tau_{21}^1 \right) = 0.$$

Для удобства дальнейших исследований представим решение исходной системы уравнений (1) в виде:

$$V_x = U_0 + x(\varepsilon(z) + \gamma_1(z)) + y(\gamma_2(z) - \Omega(z)), \quad V_y = V_0(z) + x(\gamma_2(z) + \Omega(z)) + y(\varepsilon(z) - \gamma_1(z)), \\ V_z = W(z), \quad (14)$$

$$P = P_0(z) + xP_{10}(z) + yP_{01}(z) + x^2P_{20}(z) + xyP_{11}(z) + y^2P_{02}(z).$$

Переменная  $\varepsilon = (U_1 + V_2)/2$  описывает скорость изменения площади элемента жидкости,  $\Omega = (V_1 - U_2)/2$  – угловую скорость вращения элемента жидкости,  $\gamma_1 = (U_1 - V_2)/2$ ,  $\gamma_2 = (U_2 + V_1)/2$  – компоненты деватора тензора скоростей деформаций элемента жидкости.

При подстановке класса решения (14) в систему уравнений (1) получим следующую систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений:

$$U_0'' = \delta^2 \operatorname{Re} [P_{10} + U_0(\varepsilon + \gamma_1) + V_0(\gamma_2 - \Omega) + WU_0'], \\ V_0'' = \delta^2 \operatorname{Re} [P_{01}(z) + U_0(z)(\gamma_2(z) + \Omega(z)) + V_0(z)(\varepsilon(z) - \gamma_1(z)) + W(z)V_0'(z)], \\ W'' = \operatorname{Re} (P_0' + \delta^2 WW'), \quad \Omega'' = \operatorname{Re} \delta^2 (2\varepsilon\Omega + W\Omega'), \quad \varepsilon + W' = 0, \\ \gamma_1'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{20} - P_{02} + 2\varepsilon\gamma_1 + W\gamma_1'), \\ \gamma_2'' = \delta^2 \operatorname{Re} (P_{11} + 2\varepsilon\gamma_2 + W\gamma_2'), \\ P_0' = 0, P_{10}' = 0, P_{01}' = 0, P_{20}' = 0, P_{02}' = 0, P_{11}' = 0, \\ \varepsilon'' = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{20} + P_{02} + \varepsilon^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \Omega^2 + W\varepsilon'). \quad (15)$$

Граничные условия (2), (3), в соответствии с видом решения (14), получатся следующие: на нижней границе жидкости:

$$\delta U_0'(0) = aU_0(0), \quad \delta \gamma_1'(0) = a\gamma_1(0), \quad \delta \gamma_2'(0) = a\gamma_2(0), \quad \delta V_0'(0) = aV_0(0), \quad \delta \Omega'(0) = a\Omega(0), \\ \delta \varepsilon'(0) = a\varepsilon(0), \quad W(0) = 0;$$

на свободной поверхности:

$$U_0'(1) = \delta \tau_{10}, \quad V_0'(1) = \delta \tau_{20}, \quad \varepsilon'(1) = \mu \delta (\tau_{11}^1 + \tau_{22}^1)/2, \quad \gamma_1'(1) = \delta \tau_{11}, \\ \gamma_2'(1) = \delta (\tau_{12} + \tau_{21})/2, \quad \Omega'(1) = \delta (\tau_{21} - \tau_{12})/2, \quad (16)$$

$$P_{20}(1) = P_{20}^0, P_{02}(1) = P_{02}^0, P_{11}(1) = P_{11}^0.$$

Выделим два случая возмущений. Первый – возмущения касательных напряжений  $\tau_{ij}$  на свободной поверхности. Возмущения  $\tau_{ij}^1$  могут не удовлетворять условиям совместности (12) и условию несжимаемости для слоистого течения (13). При этом будем считать, что давление  $P^0(x, y)$  на свободной поверхности невозмущенное и описывается линейной функцией горизонтальных координат согласно условию совместности (11). Второй случай – касательные напряжения на свободной поверхности невозмущенные,  $\tau_{ij}^1 = 0$ , а давление представлено квадратичной функцией горизонтальных координат (14), коэффициенты при квадратичных слагаемых пропорциональны малому параметру  $\mu$ .

### Построение решений для возмущенных касательных напряжений

Первый случай. На свободной поверхности возмущенные граничные условия зависят от малого параметра  $\mu$  и имеют вид (16). Решение системы уравнений (15) при граничных условиях (16) ищем в виде рядов по степеням малого параметра  $\mu$ :

$$\begin{aligned} U_0(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m U_0^m(z), V_0(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m V_0^m(z), W(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m W^m(z), \\ \varepsilon(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \varepsilon^m(z), \Omega(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \Omega^m(z), \\ \gamma_1(z, \mu) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \gamma_1^m(z), \gamma_2(z, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m \gamma_2^m(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Так как невозмущенное течение слоистое, то  $\varepsilon^0(z) = 0$  и  $W^0(z) = 0$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\mu$ , получим последовательность неоднородных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Система уравнений  $m$ -ого приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} U_0^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left[ P_{10}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left( U_0^i (\varepsilon^j + \gamma_1^j) + V_0^i (\gamma_2^j - \Omega^j) + W^j U_0^{i'} \right) \right], \\ V_0^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left[ P_{01}^m + \left( V_0^i (\varepsilon^j - \gamma_1^j) - U_0^i (\gamma_2^j + \Omega^j) + W^j V_0^{i'} \right) \right], \\ W^{m''} &= \operatorname{Re} \left( P_0^{m''} + \delta^2 \sum_{i,j=0}^{i+j=m} W^i W^{j'} \right), \\ \Omega^{m''}(z) &= \operatorname{Re} \delta^2 \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left( 2\varepsilon^i \Omega^j + W^i \Omega^{j'} \right), \\ \gamma_1^{m''} &= \operatorname{Re} \delta^2 \left( P_{20}^m - P_{02}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left( 2\varepsilon^i \gamma_1^j + W^i (\gamma_1^j)' \right) \right), \\ \gamma_2^{m''} &= \delta^2 \operatorname{Re} \left( P_{11}^m + \sum_{i,j=0}^{i+j=m} \left( 2\varepsilon^i \gamma_2^j + W^i (\gamma_2^j)' \right) \right), \\ P_0^{m''} &= 0, P_{10}^{m''} = 0, P_{01}^{m''} = 0, P_{20}^{m''} = 0, P_{02}^{m''} = 0, P_{11}^{m''} = 0, \\ \varepsilon^{m''} &= \operatorname{Re} \delta^2 \left[ P_{20}^m + P_{02}^m + \sum_{i,j=0}^m \left( \varepsilon^i \varepsilon^j + \gamma_1^i \gamma_1^j + \gamma_2^i \gamma_2^j - \Omega^i \Omega^j + W^i \varepsilon^{j'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений при нулевой степени параметра  $\mu$  называется порождающей. Порождающая система описывает адвективное течение несжимаемой жидкости и является переопреде-

ленной или дифференциально-алгебраической. Одно из уравнений системы – алгебраическое соотношение. При выполнении условий совместности (11), (12) и условия несжимаемости (13) для слоистого течения порождающая система примет вид:

$$U_0^{0''} = \delta^2 \operatorname{Re} \left[ P_{10}^0 + U_0^0 \gamma_1^0 + V_0^0 (\gamma_2^0 - \Omega^0) \right], \quad V_0^{0''} = \delta^2 \operatorname{Re} \left[ P_{01}^0 - V_0^0 \gamma_1^0 + U_0^0 (\gamma_2^0 + \Omega^0) \right],$$

$$\Omega^{0''} = 0, \quad \gamma_1^{0''} = 0, \quad \gamma_2^{0''} = 0, \quad (19)$$

$$P_{20}^0 + P_{02}^0 + (\gamma_1^0)^2 + (\gamma_2^0)^2 - (\Omega^0)^2 = 0. \quad (20)$$

Условие совместности (12) в новых переменных преобразовалось в алгебраическое соотношение (20), связывающее переменные, описывающие компоненты скорости сдвига  $\gamma_1^0$ ,  $\gamma_2^0$ , угловую скорость вращения элемента жидкости  $\Omega^0$  и коэффициенты давления  $P_{20}^0$ ,  $P_{02}^0$ ,  $P_{11}^0$  [3, 4]. Общее решение системы (19) с учетом невозмущенных граничных условий имеет вид:

$$\gamma_1^0(z) = C_1^0(z + a/\delta), \quad \gamma_2^0(z) = C_3^0(z + a/\delta), \quad \Omega^0(z) = C_5^0(z + a/\delta).$$

$$U_0^0 = \operatorname{Re}^2 \delta^4 \left( (C_3^0 - C_5^0) P_{01}^0 + C_1^0 P_{10}^0 \right) \left[ \frac{z^5}{40} + \frac{z^4}{24} \left( \frac{a}{\delta} - \frac{1}{12} \right) + z \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{5a}{6\delta} + \frac{5}{24} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{5a^2}{5\delta^2} - \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \frac{5a}{24\delta} \right] + \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \tau_{10}^0 + \operatorname{Re} P_{10}^0 \delta^2 \left( \frac{z^2}{2} - z - \frac{a}{\delta} \right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \left( C_1^0 \tau_{10}^0 + (C_3^0 - C_5^0) \tau_{20}^0 \right) \delta^2 \left[ \frac{z^4}{12} + \frac{z^3 a}{3\delta} + \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} - \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{a}{\delta} + \frac{1}{3} \right) \right],$$

$$V_0^0(z) = \operatorname{Re}^2 \delta^4 \frac{C_1^0 \left( (C_3^0 - C_5^0) P_{01}^0 + C_1^0 P_{10}^0 \right)}{C_3^0 - C_5^0} \left[ \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^5}{40} - \frac{z^4}{12} \left( \frac{1}{2\delta} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{10a}{12\delta} + \frac{5}{24} \right) \right] + \tau_{20}^0 \left( z + \frac{a}{\delta} \right) + \operatorname{Re} P_{01}^0 \delta^2 \left( \frac{z^2}{2} - z - \frac{a}{\delta} \right) +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{C_1^0 \left( C_1^0 \tau_{10}^0 + (C_3^0 - C_5^0) \tau_{20}^0 \right)}{C_3^0 - C_5^0} \delta^2 \left( -\frac{z^4}{12} - \frac{z^3 a}{3\delta} - \frac{z^2 a^2}{2\delta^2} + \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{a}{\delta} + \frac{1}{3} \right) \right).$$

Здесь введены обозначения:

$$C_1^0 = \delta \tau_{11}^0, \quad C_3^0 = \delta (\tau_{12}^0 + \tau_{21}^0) / 2, \quad C_5^0 = \delta (\tau_{21}^0 - \tau_{12}^0) / 2. \quad (21)$$

### Система уравнений первого приближения

Система уравнений первого приближения строится на основе системы (15). После подстановки выражений сдвиговых слагаемых компонент скорости с учетом условия несжимаемости получим линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами. Здесь и далее будем явно указывать аргумент функций, известных к моменту решения очередной подсистемы уравнений. Уравнения системы записаны в порядке их решения. Уравнения градиентов давления:

$$P_0^{1'} = 0, \quad P_{10}^{1'} = 0, \quad P_{01}^{1'} = 0, \quad P_{20}^{1'} = 0, \quad P_{02}^{1'} = 0, \quad P_{11}^{1'} = 0. \quad (22)$$

Уравнения сдвиговых слагаемых компонент скорости разбиваются на две подсистемы:

$$\Omega^{1''} = \operatorname{Re} \delta^2 (2\Omega^0 \varepsilon^1 + \Omega^0 W^1),$$

$$\gamma_1^{1''} = \operatorname{Re} \delta^2 (P_{20}^1 - P_{02}^1 + 2\gamma_1^0 \varepsilon^1 + \gamma_1^0 W^1), \quad (23)$$

$$\gamma_2^{1''} = \delta^2 \operatorname{Re} (P_{11}^1 + 2\gamma_2^0 \varepsilon^1 + \gamma_2^0 W^1).$$

Уравнение скорости изменения площади элемента жидкости, вертикальной компоненты скорости жидкости и фонового давления на свободной поверхности:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1''} &= \text{Re} \delta^2 \left( P_{20}^1 + P_{02}^1 + 2\gamma_1^0 \gamma_1^1 + 2\gamma_2^0 \gamma_2^1 - 2\Omega^0 \Omega^1 \right), \\ W^{1'} &= -2\varepsilon^1, \\ W^{1''} &= \text{Re} P_0^{0'}.\end{aligned}\tag{24}$$

Уравнения фоновых слагаемых компонент скорости

$$\begin{aligned}U_0^{1''} &= \delta^2 \text{Re} \left( \gamma_1^0 U_0^1 + (\gamma_2^0 - \Omega^0) V_0^1 + P_{10}^1 + U_0^0 (\varepsilon^1 + \gamma_1^1) + V_0^0 (\gamma_2^1 - \Omega^1) + U_0^{0'} W^1 \right), \\ V_0^{1''} &= \delta^2 \text{Re} \left( (\gamma_2^0 + \Omega^0) U_0^1 - \gamma_1^0 V_0^1 + P_{01}^1 + V_0^0 (\varepsilon^1 - \gamma_1^1) + U_0^0 (\gamma_2^1 + \Omega^1) \right).\end{aligned}\tag{25}$$

Граничные условия для систем (22)–(25) на твердой границе:

$$\begin{aligned}\delta U_0^{1'}(0) &= a U_0^1(0), \quad \delta \gamma_1^{1'}(0) = a \gamma_1^1(0), \quad \delta \gamma_2^{1'}(0) = a \gamma_2^1(0), \quad \delta V_0^{1'}(0) = a V_0^1(0), \quad \delta \Omega^{1'}(0) = a \Omega^1(0), \\ \delta \varepsilon^{1'}(0) &= a \varepsilon^1(0), \quad W^1(0) = 0;\end{aligned}$$

на свободной границе

$$\begin{aligned}U_0^{1'}(1) &= 0, \quad V_0^{1'}(1) = 0, \\ \varepsilon^{1'}(1) &= (\tau_{11}^1 + \tau_{22}^1)/(2\delta), \quad \gamma_1^{1'}(1) = (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1)/(2\delta), \quad \gamma_2^{1'}(1) = (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1)/(2\delta), \\ \Omega^{1'}(1) &= (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1)/(2\delta), \quad P_{20}^1(1) = 0, \quad P_{02}^1(1) = 0, \quad P_{11}^1(1) = 0.\end{aligned}\tag{26}$$

С помощью простых преобразований задача интегрирования системы (22)–(25) сводится к последовательному взятию нескольких квадратур. Из первой подсистемы (22) следует, что градиенты давления постоянные. Общее решение системы первого приближения (23), (24) получено в виде суммы многочленов переменных  $z$  и  $a/\delta$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon^1 &= \frac{Q_1}{2} \left( z + \frac{a}{\delta} \right) + Q_2 \text{Re} \delta^3 \left( \frac{z^4}{12} - \frac{z}{3} + \frac{a}{\delta} \left( \frac{z^3}{3} - z - \frac{1}{3} \right) + \frac{a^2}{\delta^2} \left( \frac{z^2}{2} - z - 1 \right) - \frac{a^3}{\delta^3} \right), \\ W^1 &= -\delta z Q_1 \left( \frac{a}{\delta} + \frac{z}{2} \right) + \frac{Q_2 \text{Re} \delta^3}{30} z \left( 60 \frac{a^3}{\delta^3} - 10 \frac{a^2}{\delta^2} (z^2 - 3z - 6) - 5 \frac{a}{\delta} (z^3 - 6z - 4) - z(z^3 - 10) \right), \\ \gamma_1^1 &= \frac{\delta}{2} (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1) \left( z + \frac{a}{\delta} \right) + \text{Re} C_1^0 Q_1 \delta^3 \left( \frac{1}{2} \frac{a^2}{\delta^2} z^2 + \frac{1}{6} \frac{a}{\delta} z^3 + \frac{z^4}{24} - \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\delta} + \frac{1}{6} \right) \right) + \\ &\quad + \text{Re}^2 C_1^0 \delta^5 \left[ \frac{z^5}{15} \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{z^6}{45} \frac{a}{\delta} + \frac{z^7}{315} + \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( 2 \frac{a^4}{\delta^4} + \frac{8}{3} \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{5}{3} \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{8}{15} \frac{a}{\delta} + \frac{4}{45} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^4}{12} \left( \frac{a^3}{\delta^3} - \frac{a^2}{\delta^2} - \frac{a}{\delta} - \frac{1}{3} \right) - z^2 \left( \frac{a}{\delta} + \frac{z}{3} \right) \left( \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{3} \frac{a}{\delta} \right) \right] Q_2, \\ \gamma_2^1 &= \frac{\delta}{2} \left( \frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1) + \text{Re} C_3^0 Q_1 \delta^3 \left( \frac{z^2}{2} \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{z^3}{6} \frac{a}{\delta} + \frac{z^4}{24} - \left( z + \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\delta} + \frac{1}{6} \right) \right) + \\ &\quad + \text{Re}^2 C_3^0 \delta^5 \left\{ \frac{z^5}{15} \frac{a^2}{\delta^2} + \left( \frac{a}{\delta} + z \right) \left( 2 \frac{a^4}{\delta^4} + \frac{8}{3} \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{5}{3} \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{8}{15} \frac{a}{\delta} + \frac{4}{45} \right) - \left( \frac{z^3}{3} + z^2 \frac{a}{\delta} \right) \left( \frac{a^3}{\delta^3} + \frac{a^2}{\delta^2} + \frac{1}{3} \frac{a}{\delta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^6}{45} \frac{a}{\delta} + \frac{z^7}{315} + \frac{z^4}{12} \left( \frac{a^3}{\delta^3} - \frac{a^2}{\delta^2} - \frac{a}{\delta} - \frac{1}{3} \right) \right\} Q_2, \\ \Omega^1(z) &= \frac{\delta}{2} \left( \frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1) - C_5^0 Q_1 \text{Re} \delta^3 \left( \frac{a^3}{\delta^3} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{\delta^2} (z^2 - 2z - 1) - \frac{1}{6} \frac{a}{\delta} (z^3 - 3z - 1) - \frac{z}{24} (z^3 - 4) \right) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{C_5^0}{1260} \text{Re}^2 \delta^5 \left[ 2520 \frac{a^5}{\delta^5} - 420 \frac{a^4}{\delta^4} (3z^2 - 6z - 8) + 105 \frac{a^3}{\delta^3} (20 + 32z - 12z^2 - 4z^3 + z^4) + \right. \\ \left. + 21 \frac{a^2}{\delta^2} (32 + 100z - 20z^2 - 20z^3 - 5z^4 + 4z^5) + 7 \frac{a}{\delta} (16 + 96z - 20z^3 - 15z^4 + 4z^6) + \right. \\ \left. + z (112 - 35z^3 + 4z^6) \right] Q_2.$$

Решения системы первого приближения содержат два слагаемых: одно с множителем

$$Q_1 = \tau_{11}^1 + \tau_{22}^1,$$

второе с множителем

$$Q_2 = \tau_{11}^0 \tau_{11}^1 + \tau_{21}^0 \tau_{12}^1 + \tau_{12}^0 \tau_{21}^1 - \tau_{11}^0 \tau_{22}^1. \quad (27)$$

Первое слагаемое описывает влияние на решение системы первого приближения отклонения от условия несжимаемости (12), а второе – влияние отклонения от условия совместности (13).

Если выполняются равенства  $Q_1 = 0$  и  $Q_2 = 0$ , то решение системы первого приближения принимает вид:

$$\gamma_1^1 = \frac{\delta}{2} (\tau_{11}^1 - \tau_{22}^1) \left( z + \frac{a}{\delta} \right), \quad \gamma_2^1 = \frac{\delta}{2} \left( \frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{12}^1 + \tau_{21}^1), \quad \Omega^1 = \frac{\delta}{2} \left( \frac{a}{\delta} + z \right) (\tau_{21}^1 - \tau_{12}^1), \quad \varepsilon^1 = 0, \quad W^1 = 0.$$

Вертикальная компонента скорости и скорость изменения площади элемента жидкости обращаются в нуль, течение при выполнении указанных условий остается слоистым.

Первые приближения фоновых слагаемых горизонтальных компонент скорости строятся по той же схеме, что и фоновые слагаемые нулевого приближения. В результате получаются полиномы высокого порядка, которые за громоздкостью не приводятся.

Граничные условия следующих приближений ( $m > 1$ ) на свободной границе берутся однородными  $\varepsilon^{m'}(1) = 0$ ,  $\gamma_1^{m'}(1) = 0$ ,  $\gamma_2^{m'}(1) = 0$ ,  $\Omega^{m'}(1) = 0$ . Решения получаются в виде многочленов переменных  $z$  и  $a/\delta$ .

Ниже приведены результаты вычислений решений системы первого приближения (23), (24) при некоторых вариантах значений параметров.

Вариант 1. Параметры системы и градиенты давления:

$$\text{Re} = 10, \quad \delta = 0,1, \quad a = 0, \quad P_{10}^0 = 1, \quad P_{01}^0 = 0.$$

Невозмущенные касательные напряжения:

$$\tau_1^0 = 10,0, \quad \tau_2^0 = 0, \quad \tau_{11}^0 = 1,0, \quad \tau_{12}^0 = -1,0, \quad \tau_{21}^0 = 1,0.$$

Возмущения касательных напряжений:  $\tau_{11}^1 = 0,01$ ,  $\tau_{12}^1 = 1,0$ ,  $\tau_{22}^1 = 0,1$ .

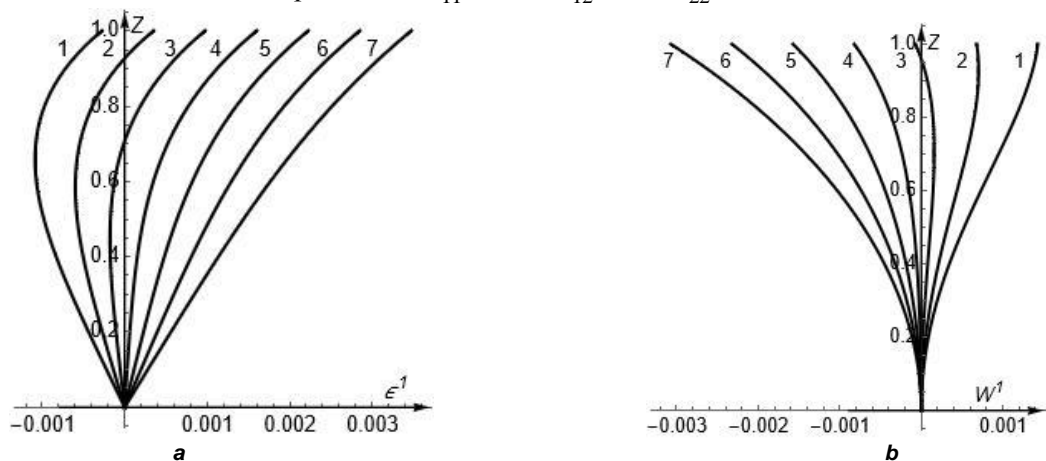


Рис. 1. Профили скорости изменения площади элемента жидкости (а) и вертикальной компоненты скорости (б) в зависимости от возмущения касательных напряжений  $\tau_{21}^1$



Таблица 1

Номера кривых и соответствующие значения параметра  $\tau_{21}^1$  и функций  $Q_1$  и  $Q_2$

№	1	2	3	4	5	6	7
$\tau_{21}^1$	-1,42	-1,15	-0,9	-0,65	-0,4	-0,15	0,1
$Q_1$	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
$Q_2$	-0,3	-0,05	0,2	0,45	0,7	0,95	1,2

При выбранных значениях возмущения касательных напряжений, представленных в табл. 1, функции  $Q_1$  и  $Q_2$  (27) отличны от нуля. Из полученных результатов видно, что вертикальная компонента скорости  $W^1(z)$  (рис 1, b) и скорость изменения площади элемента жидкости  $\varepsilon^1(z)$  могут быть знакопеременными функциями (рис 1, a). На рис. 1 проиллюстрировано, что происходит расслоение жидкости по вертикальной компоненте скорости: в жидкости возникает слой, который не смещается по вертикали. При этом слои жидкости выше точки смены знака скорости опускаются вниз, а слои ниже этой точки поднимаются вверх.

Вариант 2. Параметры системы и градиенты давления:  $Re=10$ ,  $\delta=0,1$ ,  $a=0$ ,  $P_{10}^0=1$ ,  $P_{01}^0=0$ . Невозмущенные касательные напряжения:  $\tau_{10}=10$ ,  $\tau_{20}=0$ ,  $\tau_{11}^0=1$ ,  $\tau_{12}^0=1$ ,  $\tau_{21}^0=1$ . Возмущения касательных напряжений:  $\tau_{11}^1=0,05$ ,  $\tau_{12}^1=1$ ,  $\tau_{22}^1=-0,05$ .

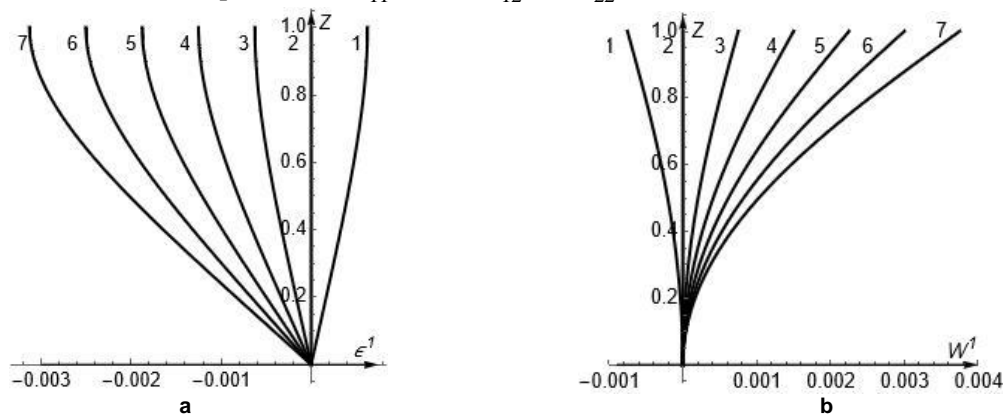


Рис. 2. Профили скорости изменения площади элемента жидкости (a) и вертикальной компоненты скорости (b) в зависимости от возмущения касательных напряжений  $\tau_{21}^1$

Таблица 2

Номера кривых и соответствующие значения возмущений касательных напряжений  $\tau_{21}^1$  и функции  $Q_2$ :

	1	2	3	4	5	6	7
$\tau_{21}^1$	-1,35	-1,1	-0,85	-0,6	-0,35	-0,1	0,15
$Q_2$	-0,25	0,0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25

Здесь (см. табл. 2) касательные напряжения подобраны так, что выполняется первое равенство (27) – условие несжимаемости, функция  $Q_1$  обращается в нуль. Кривая 2 (рис. 2, b) соответствует значениям касательных напряжений, при которых одновременно выполняется и второе равенство в (27) – функция  $Q_2$  обращается в нуль. При этом вертикальная компонента скорости и скорость изменения площади элемента обращаются в нуль. Угловая скорость вращения элемента  $\Omega(z)$  и скорости деформации сдвига  $\gamma_1(z)$ ,  $\gamma_2(z)$  являются монотонными функциями переменной  $z$  (рис. 2, a), близкими к линейным.

## Заключение

В работе построены аналитические решения уравнений Навье–Стокса, описывающие течения вязкой несжимаемой жидкости при малых возмущениях граничных условий. Решения построены в виде рядов по степеням малого параметра, определяющего малость возмущений. Невозмущенные значения граничных условий соответствуют слоистому течению и являются усло-

виями совместности переопределенной системы уравнений, описывающей нулевое приближение. Исследовалось возмущение касательных напряжений. Показано, что при нарушении условий совместности возникает вертикальная компонента скорости, пропорциональная малому параметру. Показано также, что условие совместности (12) является достаточным, но не необходимым для существования сдвигового течения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 25–29–00339).*

### Литература

1. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations / S.V. Ershkov, E.Yu. Prosviryakov, N.V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53, no. 4. – p. 044501.
2. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review / S.V. Ershkov, E.Y. Prosviryakov, N.V. Burmasheva, V. Christianto // *Symmetry*. – 2023. – Vol. 15, no. 10. – P. 1825.
3. Drazin, P.G. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions / P.G. Drazin, N. Riley. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
4. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса / В.В. Пухначев // *Успехи механики*. – 2006. – Vol. 4, no. 1. – P. 6–76.
5. Lin, C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics / C.C. Lin // *Arch. Rational Mech. Anal.* – 1958. – Vol. 1. – P. 391–395.
6. Сидоров, А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн / А.Ф. Сидоров // *Прикл. мех. техн. физ.* – 1989. – Т. 30, № 2. – С. 34–40.
7. Аристов, С.Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: автореферат дис. ... доктора физико-математических наук: 01.02.05 / С.Н. Аристов // Ин-т автоматизации и процессов управления. – Владивосток, 1990. – 32 с.
8. Аристов, С.Н. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии / С.Н. Аристов, Е.Ю. Просвирыков // *Теор. основы хим. технологии*. – 2016. – Т. 50, № 3. – С. 294.
9. Аристов, С.Н. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // *Теоретические основы химической технологии*. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547–566.
10. Аристов С.Н., Полянин А.Д. Новые классы точных решений уравнений Эйлера / С.Н. Аристов, А.Д. Полянин // *Доклады РАН*. – 2008. – Т. 419, № 3. – С. 328–333.
11. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2014. – № 4. – С. 26–30.
12. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения во вращающемся горизонтальном теплоизолированном снизу слое несжимаемой жидкости с твердыми границами при малом числе Прандтля / К.Г. Шварц // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2022. – № 2. – С. 38–50.
13. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости при учете проскальзывания Навье / К.Г. Шварц, Ю.А. Шварц // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. – 2020. – № 1. – С. 33–44.
14. Шварц, К.Г. Устойчивость адвективного течения в горизонтальном теплоизолированном снизу слое жидкости с твердыми границами / К.Г. Шварц, Ю.А. Шварц // *Прикладная математика и механика*. – 2022. – Т. 86, Вып. 6. – С. 926–937.
15. Зубарев, Н.М. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости / Н.М. Зубарев, Е.Ю. Просвирыков // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2019. – Т. 60, № 6(358). – С. 65–71.
16. Горшков А.В., Просвирыков Е.Ю. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // *Труды института Математики и механики УрО РАН*. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 32–41.
17. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Isothermal Equatorial Poiseuille–Ekman Flow / A.V. Gorshkov, E.Y. Prosviryakov // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315, Iss. 1. – 050008.
18. Горшков А.В., Просвирыков Е.Ю. Застойные точки неоднородного решения, описывающего конвективное течение Экмана в экваториальной зоне океана / А.В. Горшков, Е.Ю. Просви-

ряков // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2022. – Iss. 1. – P. 52–66. <http://dream-journal.org>.

19. Шелухин, В.В. Об одном условии проскальзывания для уравнения вязкой жидкости / В.В. Шелухин, У.А. Христенко // *ПМТФ*. – 2013. – Т. 54, № 5(321). – С. 101–109.

20. Neto, C. Boundary Slip in Newtonian Liquids: a Review of Experimental Studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso // *Reports on Progress in Physics*. – 2005. – Vol. 68, Iss. 12. – P. 2859–2897.

21. Борзенко Е.И., Дьякова М., Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале / Е.И. Борзенко, М. Дьякова, Г.Р. Шрагер // *Вестник ТГУ, Механика*. – 2014. – № 2(28). – С. 35–44.

22. Bulíček, M. Internal Flows of Incompressible Fluids Subject to Stick-Slip Boundary Conditions / M. Bulíček, J. Málek // *Vietnam Journal of Mathematics*. – 2017. – Vol. 45. – P. 207–220.

23. Plastic Effect on the Sliding Inception between a Cylinder and a Rigid Flat / S. Zhang, J. Huan, H. Song *et al.* // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2019. – Vol. 32. – P. 1–16.

24. Role of Interfacial Conditions on Blast Overpressure Propagation into the Brain / Y. Chen, T.J. O'Shaughnessy, G.H. Kamimori *et al.* // *Frontiers in Neurology*. – 2020. – Vol. 11. – Article 323.

*Поступила в редакцию 25 сентября 2025 г.*

### Сведения об авторах

Горшков Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: alex55gor@mail.ru.

Просвирыков Евгений Юрьевич – доктор физико-математических наук, доцент, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кафедра информационных технологий и систем управления, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: evgen\_pros@mail.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2025, vol. 17, no. 4, pp. 52–64*

---

DOI: 10.14529/mmph250407

## ISOTHERMAL COUETTE–POISEUILLE FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID WITH LOW VERTICAL VELOCITY

**A.V. Gorshkov<sup>1,2</sup>, E.Yu. Prosviryakov<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> *The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation*

*E-mail: alex55gor@mail.ru, evgen\_pros@mail.ru*

**Abstract.** The paper considers an inhomogeneous solution to the Navier-Stokes equations, which describe a layered, large-scale, isothermal, vortical, Couette-Poiseuille flow of a viscous, incompressible fluid. Tangential stresses are imposed at the free surface of the liquid, simulating the effects of wind. On the solid surface, the sliding conditions of Navier are applied. The paper investigates the influence of small deviations from the compatibility conditions of the redefined set of equations describing this flow. If the compatibility conditions are not satisfied, the vertical component of velocity can be non-zero. The solution to the system of equations is constructed as a series in a small parameter that represents the deviation from the compatibility condition, with coefficients that depend on the vertical coordinate. The coefficients are obtained as polynomials of the vertical coordinate  $z$ .

**Keywords:** *Navier-Stokes equations, laminar flows, shear flows, exact solutions, compatibility conditions, perturbations, small parameter.*

### References

1. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Burmasheva N.V., Christianto V. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, Vol. 53, no. 4, p. 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0
2. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review. *Symmetry*, 2023, Vol. 15, no. 10, p. 1825. DOI: 10.3390/sym15101825
3. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 196 p. DOI: 10.1017/cbo9780511526459.
4. Pukhnachev V.V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e–Stoksa (Symmetries in Navier–Stokes equations). *Uspekhi mekhaniki (Achievements in Mechanics)*, 2006, Vol. 4, no. 1, pp. 6–76. (in Russ.).
5. Lin C.C. Note on a Class of Exact Solutions in Magneto-Hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, Vol. 1, pp. 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016
6. Sidorov A.F. Two Classes of Solutions of the Fluid and Gas Mechanics Equations and their Connection to Traveling Wave Theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, Vol. 30, no. 2, pp. 197–203.
7. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti: avtoreferat dis. ... doktora fiziko-matematicheskikh nauk: 01.02.05* (Eddy Currents in Thin Liquid Layers, 01.02.05, Dr. phys. and math. sci. diss.). Vladivostok, Institut avtomatiki i protsessov upravleniya Publ., 1990, 32 p. (in Russ.).
8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. A New Class of Exact Solutions for Three-dimensional Thermal Diffusion Equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, Vol. 50, no. 3, pp. 286–293.
9. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations with the Linear Dependence of Velocity Components on two Space Variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, Vol. 43, no. 5, pp. 642–662.
10. Aristov S.N., Polyanin A.D. Novye klassy tochnykh resheniy uravneniy Eylera (New Classes of Exact Solutions of Euler Equations). *Doklady RAN*, 2008, Vol. 419, Iss. 3, pp. 328–333.
11. Schwarz K.G. Plane-Parallel Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer with Rigid Boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, Vol. 49, no. 4, pp. 438–442.
12. Schwarz K.G. Stability of Advective Flow in a Rotating Horizontal Incompressible Fluid Layer Heat-insulated From Below with Rigid Boundaries at Low Prandtl Number. *Fluid Dynamics*, 2022, Vol. 57, no. 2, pp. 146–157. DOI: 10.31857/S0568528122020086
13. Schwarz K.G., Schwarz Y.A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Incompressible Fluid Layer in the Presence of the Navier Slip Condition. *Fluid Dynamics*, 2020, Vol. 55, no. 1, pp. 31–42. DOI: 10.31857/S0568528120010119
14. Shvarts K.G., Shvarts Yu.A. Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer Insulated from Below with Solid Boundaries. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2022, Vol. 86, iss. 6, pp. 926–937. (in Russ.). DOI: 10.31857/S0032823522060133
15. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions for the Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, no. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075
16. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic Solutions of Stationary Complex Convection Describing a Shear Stress Field of Different Signs. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, Vol. 23, no. 2, pp. 32–41. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41.
17. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Isothermal Equatorial Poiseuille–Ekman Flow. *AIP Conference Proceedings*, 2020, Vol. 2315, iss. 1, 050008; DOI: 10.1063/5.0036894
18. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Zastoynnye tochki neodnorodnogo resheniya, opisyvayushchego konvektivnoe techenie Ekmana v ekvatorial'noy zone okeana (Stagnation Points of an Inhomogeneous Solution Describing the Convective Ekman Flow in the Equatorial Zone of the Ocean). *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, iss. 1, pp. 52–66 <http://dream-journal.org>.
19. Shelukhin V.V., Khristenko U.A. On One Slip Condition for the Equations of a Viscous Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, Vol. 54, no. 5, pp. 773–780. DOI: 10.1134/S0021894413050106

20. Neto C., Evans D., Bonaccorso E. Boundary Slip in Newtonian Liquids: A Review of Experimental Studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, Vol. 68, Iss. 12. p. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05
21. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the Slip Phenomenon for a Viscous Fluid Flow in a Curved Channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, no. 2(28), pp. 35–44.
22. Bulíček M., Málek J. Internal Flows of Incompressible Fluids Subject to Stick-Slip Boundary Conditions. *Vietnam Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 45, pp. 207–220. DOI: 10.1007/s10013-016-0221-z.
23. Zhang S., Huan J., Song H., Liu X., Wei Y.G. (2019) Plastic Effect on the Sliding Inception between a Cylinder and a Rigid Flat. *Acta Mechanica Solida Sinica*, Vol. 32, pp. 1–16. DOI: 10.1007/s10338-018-0060-4.
24. Chen Y., O'Shaughnessy T.J., Kamimori G.H., Horner D.M., Egnoto M.J., Bagchi A. Role of Interfacial Conditions on Blast Overpressure Propagation into the Brain. *Frontiers in Neurology*, 2020, Vol. 11, Article 323. DOI: 10.3389/fneur.2020.00323

*Received September 25, 2025*

### Information about the authors

Gorshkov Aleksandr Vasil'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: alex55gor@mail.ru.

Prosviryakov Evgeniy Yur'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, The Institute of Engineering Science, RAS (Ural Branch), Yekaterinburg, Russian Federation, Department of Information Technologies and Management Systems, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: evgen\_pros@mail.ru.