УДК 519.176 DOI: 10.14529/mmph260102

МОДЕЛЬ И МЕТОД ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО СТРУКТУРИРОВАННОГО ПОТОКА В ГРАФЕ С МНОЖЕСТВЕННЫМИ ВЕСАМИ РЕБЕР

А.П. Бойко[1], А.Д. Лунёв[2]

[1] Военная академия связи им. С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

[2] Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Аннотация. Представлена модель сети в виде графа, весами ребер которого являются подмножества из целых чисел. Данные веса характеризуют пропускную способность и ограничивают потоки через ребра. Между вершинами *s* и *t* данной сети необходимо сформировать особый вид потока, к которому предъявляются дополнительные требования: в каждом ребре маршрута от *s* к *t* необходимо выделить одинаковое подмножество смежных упорядоченных элементов, количество которых определяет величину потока. Интерес представляет задача поиска подмножества таких потоков, которые не имеют общих элементов и могут быть одновременно реализованы, а сумма их величин максимальна для данной сети. Модель и метод на основе целочисленного линейного программирования, представленные в данной статье, могут быть использованы для анализа пропускной способности графов с множественными весами ребер.

Ключевые слова: структурированный поток; множественные веса ребер; пропускная способность сети.

Введение

Теория графов является мощным, проверенным инструментарием для решения потоковых задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности. Представление реальных систем в виде графов, где вершины являют собой узлы системы (города, узлы связи, заводы), а ребра – каналы, по которым осуществляется передача потока (дороги, каналы, сетевые соединения, трубы), позволяет осуществлять моделирование и оптимизацию потока через сеть, под которым могут пониматься трафик на дорогах, информационные данные, некая жидкость и т.д.

В данной работе уделяется внимание особому виду потока, обладающему определённой структурой и отвечающему дополнительным требованиям, обусловленным его природой. Так, например, ребра в графе могут представлять собой линии связи, а веса – частоты, на которых возможна передача сигналов в данных линиях. Любой диапазон частот, доступных для передачи сигналов, может быть представлен в виде подмножества частотных интервалов, пронумерованных целыми числами. Тогда веса ребер являют собой подмножества целых чисел, характеризующие их пропускную способность.

Ребра в графе могут представлять собой дороги, а целочисленные компоненты множественных весов – пронумерованные полосы движения в этих дорогах.

Задача заключается в нахождении такой последовательности ребер между вершинами графа, что в каждом ребре последовательности существует одинаковое подмножество смежных целочисленных компонентов. Физически это может означать передачу сигнала по составной линии связи на одних и тех же частотах, или перемещение транспортного средства по маршруту в пределах полосы движения. При этом и сигнал, и транспортное средство могут занимать как одну, так и несколько частот (полос движения) подряд.

Для получения научно-обоснованных решений, а также проведения исследований и экспериментов по распределению описанных потоков в сетях с множественными весами ребер, необходима разработка их математических моделей.

1. Модель структурированного потока

Пусть $G=(V,E)$ – неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин $V=\{v_i\}$, $i\in\overline{1,N_1}$ и множеством рёбер $E\subset V\times V$, таким, что если вершины v_i и v_j соединены ребром, то $e_{ij}\in E.$ Зафиксируем две вершины графа $s,t\in V$, образующие соответственно исток и сток. Тогда граф $G=(V,E)$ представляет собой двухполюсную сеть с полюсами s и t. Каждому ребру $e_{ij}\in E$ поставим в соответствие некоторое множество $C_{ij}=\left\{c_n,c_{n+1},...,c_{N_2}\right\}\subset Z,$ $N_2<\infty$ называемое пропускной способностью ребра e_{ij}. Тогда будем полагать, что $G(V,E)$ – граф сети с множественными весами рёбер.

Определение 1. Припишем каждому ребру $e_{ij}\in E$ некоторый вес в виде упорядоченного множества $F_{ij}=\left\{c_{n+h},c_{n+h+1},...,c_{N_3}\right\}\subset C_{ij},$ $h\le N_3\le N_2$ такого, что $c_{n+1}=c_n+1\,|\,\forall n\in\overline{1,N_3-1}.$ Будем называть F_{ij} *структурированным потоком по ребру*, соединяющему вершины v_i и v_j.

Обозначим через $\mu_{s,t}$ маршрут из s в t, представляющий собой упорядоченную последовательность ребер $(e_{sv_i},e_{v_iv_j},...,e_{v_zt}),$ начинающуюся в вершине s, заканчивающуюся в вершине t и не проходящую через одну и ту же вершину дважды, причем каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Будем описывать маршрут перечнем ребер его образующих, т. е. $\mu_{s,t}=(e_{sv_i},e_{v_iv_j},...,e_{v_zt}).$

Определение 2. Если функция $f^{cmp}:E\to R$ удовлетворяет условиям:

1. $F_{ij}\subset C_{ij}$, $\forall i,j\,|\,e_{ij}\in E;$
2. $\left|F_{ij}\right|=-\left|F_{ji}\right|;$
3. $\sum\left|F_{ij}\right|=\begin{cases}\left|F_{ij}\right|,\ i=s,\ j\in\overline{1,N_1},\\ 0,\ i,j\in\overline{1,N_1},\ i\ne s,\ j\ne t,\\ -\left|F_{ij}\right|,\ i\in\overline{1,N_1},\ j=t;\end{cases}$
4. $F_{sv_i}=F_{v_iv_j}=...=F_{v_zt};$

то f^{cmp} называется *структурированным потоком* из s в t в сети с множественными весами рёбер $G(V,E)$. Условие 1 представляет собой модифицированный вариант условия, отражающего тот факт, что поток через любое ребро сети не должен превышать его пропускной способности. Применительно к сети с множественными весами ребер данное условие означает, что F_{ij} должно быть упорядоченным подмножеством, состоящим из элементов множества C_{ij}. Условие 2 определяет знак потока по отношению к вершине, в зависимости от того восходит он к ней или исходит. Условие 3 выражает факт сохранения потока во всех вершинах, за исключением s и t. Данные условия являются традиционными при определении потоков в сетях [1–3], за исключением некоторых дополнений в условие 1 и условия 4, отражающих новизну понятия *структурированный* поток. Их суть заключается в необходимости формирования одинаковых структурированных потоков во всех ребрах маршрута от s к t.

Значение $\left|f^{cmp}\right|=\left|F_{sv_i}\right|=\left|F_{v_iv_j}\right|=...=\left|F_{v_zt}\right|$ называется величиной структурированного потока. Структурированный поток считается максимальным, если его величина максимальна из всех возможных структурированных потоков.

2. Метод поиска максимального структурированного потока

Задачу поиска максимального структурированного потока $f_{\max}^{cmp}$ можно свести к задаче поиска маршрута с максимальной пропускной способностью.

Определение 3. Под пропускной способностью маршрута $\mu_{s,t} = (e_{sv_i}, e_{v_iv_j}, ..., e_{v_zt})$, понимается пересечение множеств, характеризующих пропускные способности образующих его ребер:

$$C(\mu_{s,t}) = C_{sv_i} \bigcap C_{v_iv_j} \bigcap ... \bigcap C_{v_zt}. \quad (1)$$

Тогда величина максимального структурированного потока $\left|f_{\max}^{стр}\right|$, определяется как:

$$\left|f_{\max}^{стр}\right| = \max_{\mu_{s,t}^i \in M_{s,t}} \left|C(\mu_{s,t}^i)\right|,$$

где $M_{s,t}$ – множество всех маршрутов из s в t.

Пример 1. Пусть в графе $G(V,E)$, изображенном на рис. 1, каждому ребру из множества $E = \{e_{12}, e_{23}, e_{36}, e_{14}, e_{45}, e_{56}, e_{25}\}$ присвоен вес в виде множества из целых чисел: $C_{12} = \{1,2,3,4,5,6\}$, $C_{23} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $C_{36} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $C_{14} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C_{45} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $C_{56} = \{5,6,7,8,9,10\}$, $C_{25} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Вершины v_1 и v_6 образуют полюса, между которыми необходимо найти максимальный структурированный поток. С помощью известных алгоритмов [4] найдём множество всех маршрутов между вершинами v_1 и v_6: $\mu_{1,6}^1 = (e_{12}, e_{23}, e_{36})$, $\mu_{1,6}^2 = (e_{12}, e_{25}, e_{56})$, $\mu_{1,6}^3 = (e_{14}, e_{45}, e_{56})$, $\mu_{16}^4 = (e_{14}, e_{45}, e_{52}, e_{23}, e_{36})$. Пропускная способность маршрута $C(\mu_{1,6}^1)$ определяется как $C_{12} \bigcap C_{23} \bigcap C_{36}$, и представляет $C(\mu_{1,6}^1) = \{1,2,3,4,5,6\}$. По аналогии определяются пропускные способности остальных маршрутов: $C(\mu_{1,6}^2) = \{5,6\}$, $C(\mu_{1,6}^3) = \{5,6,7,8,9,10\}$, $C(\mu_{1,6}^4) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Наибольшей мощностью обладает множество $\left|C(\mu_{1,6}^4)\right| = 8$. Соответственно максимальный поток между вершинами v_1 и v_6 представлен множествами: $F_{14} = F_{45} = F_{52} = F_{23} = F_{36} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и его величина составляет $\left|f_{\max}^{стр}\right| = 8$.

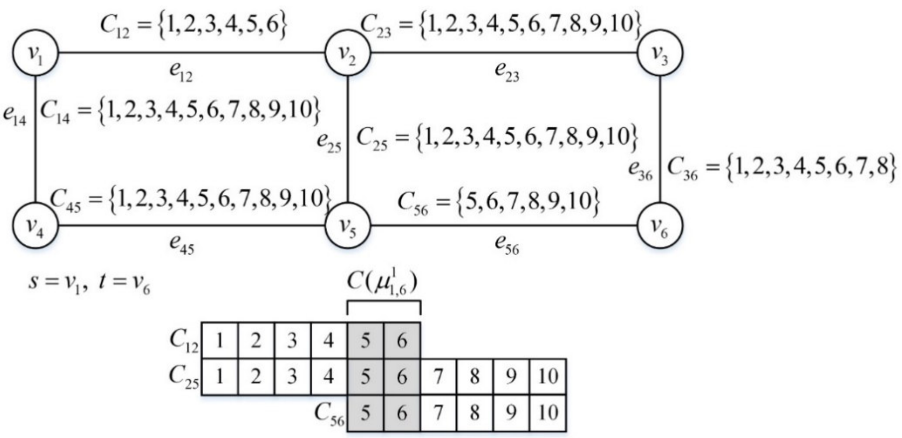


Рис. 1. Граф сети с множественными весами ребер

В общем случае, между узлами s и t в сети $G(V,E)$ можно сформировать множество структурированных потоков различной величины $\left\{f_m^{стр}\right\}$. Два структурированных потока считаются одновременно реализуемыми, если маршруты, на основе которых они формируются не имеют общих рёбер или имеют общие ребра, но образующие их структурированные потоки по общим ребрам не имеют общих элементов.

Особый интерес представляет задача поиска такого множества одновременно реализуемых структурированных потоков, сумма величин которых является максимальной для данного графа сети с множественными весами ребер.

Определение 4. Пусть Φ – множество всех возможных структурированных потоков между узлами s и t в сети $G(V,E)$, а $F \in \Phi$ – некоторое подмножество структурированных потоков, которые могут быть реализованы одновременно. Максимальным суммарным структурированным потоком $F_{\max}$ будем называть такое подмножество одновременно реализуемых структурированных потоков, что сумма их величин является максимальной:

$$F_{\max} = \max_{F\in\Phi} \sum_{f_m^{cmp}\in F} \left| f_m^{cmp} \right|.$$

Предлагаемый в данной статье метод поиска $F_{\max}$ основан на решении задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и включает в себя следующие действия.

1. Поиск $M_{s,t}$ – множества всех маршрутов из s в t. Для этого могут быть использованы как традиционные известные алгоритмы обхода в глубину или в ширину, так и модифицированные: алгоритм Йена в совокупности с алгоритмами Дейкстры или А* (А «со звездочкой») [5].

2. Определение пропускной способности каждого маршрута $\mu_{s,t}^k \in M_{s,t}$ с использованием выражения (1) и формирование множества пропускных способностей всех маршрутов из s в t:

$$C(M_{s,t}) = \left\{ C(\mu_{s,t}^k) \right\} \mid \mu_{s,t}^k \in M_{s,t}.$$

3. Поиск всех возможных структурированных потоков на основе каждого маршрута $\mu_{s,t}^k \in M_{s,t}$ и формирование множества $\left\{ f_m^{cmp} \right\}$.

Утверждение 1. Пусть $C(\mu_{s,t}^k)$ – пропускная способность маршрута $\mu_{s,t}^k$. Если все элементы множества $C(\mu_{s,t}^k)$ можно упорядочить таким образом, чтобы $c_{n+1} = c_n + 1,\ \forall n \mid c_n, c_{n+1} \in C(\mu_{s,t}^k)$, то на основе маршрута $\mu_{s,t}^k$ можно сформировать $N_5 = \dfrac{\left|C(\mu_{s,t}^k)\right| \cdot (\left|C(\mu_{s,t}^k)\right| + 1)}{2}$ структурированных потоков величины $1 \le \left| f^{cmp} \right| \le C(\mu_{s,t}^k)$. Данное утверждение основано на решении известной комбинаторной задачи о количестве отрезков в последовательности (подсчет подотрезков) [6].

Пример 2. Пусть пропускная способность маршрута $\mu_{s,t}^k$ определяется множеством $C(\mu_{s,t}^k) = \{1,2,3,4\}$. На его основе возможна реализация $N_5 = 10$ потоков: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

4. Формирование системы ограничений на одновременную реализацию структурированных потоков.

Определим, что переменная x_m равна 1, если $m-й$ структурированный поток реализуется в сети, и 0 в противном случае.

Система ограничений на переменные x_m формируется исходя из условия, что суммарная величина структурированных потоков через ребра не должна превышать их пропускной способности, а сами структурированные потоки не должны иметь общих элементов.

Тогда система ограничений на одновременную реализацию структурированных потоков на основе маршрута $\mu_{s,t}^k$ имеет вид:

$$\mathrm{A}^T \cdot \mathrm{x} \le 1_{\left|C\left(\mu_{s.t}^k\right)\right|},$$

где: $\mathrm{x}^T = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{N_5})$ – вектор, элементами которого являются двоичные переменные x_m, $1_{\left|C\left(\mu_{s.t}^k\right)\right|} = \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \ldots & 1_{\left|C\left(\mu_{s.t}^k\right)\right|} \end{pmatrix}^T$ – вектор из единиц, A – матрица размерности $N_5 \times \left|C\left(\mu_{s.t}^k\right)\right|$, строки которой соответствуют m-м потокам, а столбцы – соответствуют элементам пропускной способности маршрута $c_d \in C\left(\mu_{s.t}^k\right)$. Элементы a_{mn} матрицы A принимают значения 1 в том случае, если для реализации m-го потока используется n-й элемент. Все остальные элементы матрицы A равны 0.

Пример 3. Для маршрута с пропускной способностью из примера 2 вектор x^T состоит из 10 элементов, а матрица A имеет вид:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матрицы A^T и вектора x, система ограничений на одновременную реализацию структурированных потоков в пределах маршрута представляет собой:

$$\mathrm{A}^T \cdot \mathrm{x} \le 1_{\left|C\left(\mu_{s.t}^k\right)\right|} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 + x_8 + x_{10} \le 1 \\ x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 1 \\ x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 1 \\ x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} \le 1 \end{cases}.$$

Для каждого маршрута $\mu_{s,t}^k$ необходимо сформировать матрицу A_k. Если маршруты имеют общие ребра то, система ограничений формируется с учётом дополнительных неравенств, обусловленных наличием общих элементов пропускной способности ребра, и матрицы A_k маршрутов объединяются в одну матрицу. Пусть маршруты $\mu_{s,t}^1$ и $\mu_{s,t}^2$ с пропускными способностями $C(\mu_{s,t}^1)$ и $C(\mu_{s,t}^2)$ соответственно, имеют общее ребро $e_{ij} \in E$ с пропускной способностью C_{ij} (рис. 2).

Тогда матрицы A_1 и A_2 для формирования ограничений на переменные x_m^1 и x_m^2 объединяются в матрицу ограничений A следующим образом:

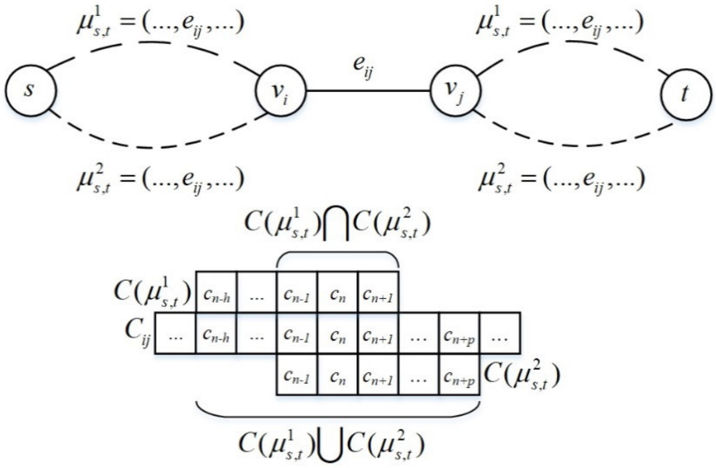
1) матрицы A_1 и A_2 дополняются столбцами из нулей справа и слева соответственно так, чтобы количество столбцов в обеих матрицах было равно $\left|C(\mu_{s,t}^1) \bigcup C(\mu_{s,t}^2)\right|$:

$$\mathrm{A}_1' = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{A}_2' = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

2) матрицы A_1' и A_2' объединяются по строкам (вертикальная конкатенация):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1' \\ \mathrm{A}_2' \end{bmatrix}.$$



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} c_{n-h} & & & c_{n+1} \end{array} \\ \mathbf{A}_1 = & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1^1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} c_{n-1} & & & c_{n+p} \end{array} \\ \mathbf{A}_2 = & \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} x_1^2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Рис. 2. Маршруты с общим ребром

Векторы переменных $\mathrm{x}^1=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1\end{pmatrix}^T$ и $\mathrm{x}^2=\begin{pmatrix}x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2\end{pmatrix}^T$ также объединяются по строкам:

$$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{x}^1\\ \mathrm{x}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2\end{pmatrix}^T,$$

и система ограничений, порождаемая общим ребром $e_{ij}\in E,$ приобретает вид: $\mathrm{A}^T\cdot\mathrm{x}\le 1.$

5. Формирование целевой функции и решение задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Целевая функция задачи имеет вид:

$$f_0(x)=\sum_{m=1}^{N_4} x_m\cdot\left|f_m^{cmp}\right|\to\max,$$

где N_4 – количество всех возможных структурированных потоков.

Система ограничений для задачи ЦЛП формируется исходя из ограничений на одновременную реализацию структурированных потоков в сети и ограничений на целочисленность переменных:

$$\mathrm{A}^T\cdot\mathrm{x}\le 1,\ \ 0\le\mathrm{x}\le 1,$$

где 0 и 1 – векторы размерности x из 0 и 1 соответственно.

Пример 4. Найдем максимальный суммарный структурированный поток $F_{\max}$ между вершинами s и t в графе, представленном на рис. 1. На основе маршрута $\mu^1_{1,6}$ с пропускной способностью $C(\mu^1_{1,6})=\{1,2,3,4,5,6\}$ возможно сформировать $\frac{\left|C(\mu^1_{1,6})\right|\cdot(\left|C(\mu^1_{1,6})\right|+1)}{2}=21$ структурированных потока величиной от 1 до 6 и вектор переменных x_m имеет вид: $\mathrm{x}^1=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{21}^1\end{pmatrix}^T$. Аналогично, на основе маршрутов $\mu^2_{1,6}$, $\mu^3_{1,6}$, и $\mu^4_{1,6}$ ($C(\mu^2_{1,6})=\{5,6\}$, $C(\mu^3_{1,6})=\{5,6,7,8,9,10\}$, $C(\mu^4_{1,6})=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$) возможно формирование 3, 21 и 36 структурированных потоков соответственно. Тогда векторы переменных x_m имеют вид: $\mathrm{x}^2 = \left(x_1^2 \quad x_2^2\right)^T$, $\mathrm{x}^3 = \left(x_1^3 \quad x_2^3 \quad \ldots \quad x_{21}^3\right)^T$, $\mathrm{x}^4 = \left(x_1^4 \quad x_2^4 \quad \ldots \quad x_{36}^4\right)^T$. На рис. 3 изображены возможные структурированные потоки и их величины для маршрута $\mu_{1,6}^1$.

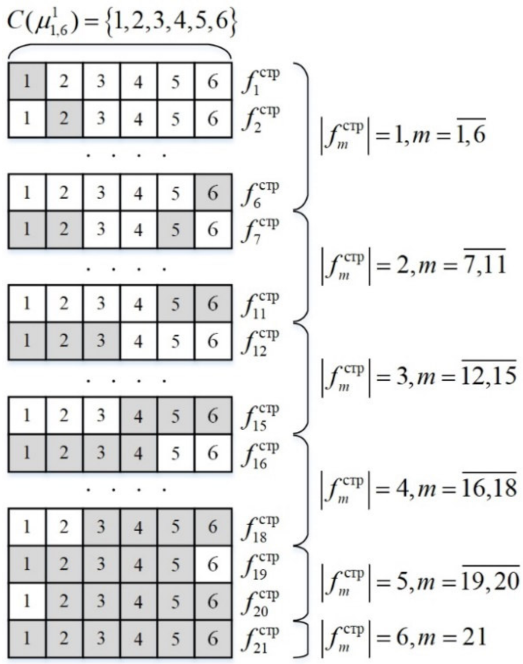


Рис. 3. Формирование структурированных потоков на основе маршрута $\mu_{1,6}^1$

Матрицы A_1, A_2, A_3 и A_4 для маршрутов $\mu_{1,6}^1$, $\mu_{1,6}^2$, $\mu_{1,6}^3$, и $\mu_{1,6}^4$ соответственно равны:

$$\mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Маршруты $\mu_{1,6}^1$ и $\mu_{1,6}^2$ имеют общее ребро e_{12}. Тогда матрицы A_1 и A_2 объединяются:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Маршруты $\mu_{1,6}^1$ и $\mu_{1,6}^4$ имеют общие ребра e_{23} и e_{36}. Тогда матрицы A_1 и A_4 объединяются:

$$\begin{bmatrix} [\mathrm{A}_1 \quad 0] \\ \mathrm{A}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично объединяются матрицы: A_2 и A_3, A_2 и A_4, A_3 и A_4. В итоге формируется матрица A из $21+3+21+36=81$ строки и 8 столбцов, а векторы x^1, x^2 x^3 и x^4 объединяются в вектор x из 81 элемента:

$$\mathrm{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_4 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция задачи в матричной форме имеет вид:

$$f_0(x) = \mathrm{x}^T \cdot \mathrm{f}^{cmp} \to \max,$$

при условии, что:

$$\mathrm{x}^T \cdot \mathrm{A} \le 1_{81},$$
$$x_m \in \{0,1\},$$

где $\mathrm{f}^{cmp} = (\left|f_1^{cmp}\right| \quad \left|f_2^{cmp}\right| \quad \ldots \quad \left|f_{81}^{cmp}\right|)^T$ – вектор, элементы которого представлены величинами структурированных потоков.

В данной постановке, с использованием известных методов, разработанных для решения задач целочисленного линейного программирования [7–8], может быть получено множество неразличимых решений, доставляющих максимальное значение целевой функции $f_0(x)$. Так, например, решение данного примера составляет $f_0(x)=12$, и может быть получено в результате множества комбинаций, например: $x_{21}^1=1$, $x_{21}^3=1$, все остальные двоичные переменные равны 0. Тогда, $f_0(x)=1\cdot 6+1\cdot 6=12$, что соответствует одновременной передачи в сети двух структурированных потоков величины $\{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{5,6,7,8,9,10\}$ по ребрам маршрутов $\mu_{1,6}^1$ и $\mu_{1,6}^3$ соответственно. Очевидно, что точно такое же значение целевой функции можно получить при одновременной реализации в сети структурированных потоков $\{1,2,3\}$ и $\{4,5,6\}$ по ребрам маршрута $\mu_{1,6}^1$ и, например, структурированных потоков $\{5,6,7,8\}$ и $\{9,10\}$ по ребрам маршрута $\mu_{1,6}^3$. Таким образом, решения данной задачи будут лежать в некоторой гиперплоскости и представлять собой неразличимые альтернативы доставляющие значения целевой функции $f_0(x)=12$.

3. Асимптотический анализ метода

Нахождение всех маршрутов между двумя вершинами неориентированного графа в общем случае является NP-полной задачей. Указанные ранее алгоритмы поиска в глубину и в ширину могут иметь сложность $O(|V|+|E|)$ для каждого найденного маршрута, количество которых может расти экспоненциально с увеличением размера графа и в худшем случае (например полносвязный граф) сложность будет $O(|V|!)$. Таким образом, в общем случае для графов большой размерности поиск всех маршрутов является невозможен и необходимо использовать эвристики или дополнительные ограничения, например поиск некоторого ε количества маршрутов определенной длины с помощью алгоритма Йена, сложность которого составляет $O(\varepsilon\cdot[|V|\cdot(|E|+|V|\cdot\log|V|)])$, где $[|V|\cdot(|E|+|V|\cdot\log|V|)]$ – сложность алгоритма Дейкстры для поиска кратчайшего пути.

Определение пропускной способности каждого маршрута предполагает выполнение пересечения нескольких множеств, характеризующих пропускные способности ребер. Если маршрут $\mu_{s,t}^{k}$ содержит в себе η ребер, и пропускная способность каждого ребра описывается множеством элементов C_{ij}, то в худшем случае (если все множества C_{ij} для каждого ребра e_{ij} маршрута $\mu_{s,t}^{k}$ одинаковые и после каждого пересечения размер $\bigcap_{ij} C_{ij} \mid e_{ij}\in\mu_{s,t}^{k}$ не уменьшается) метод последовательного пересечения дает сложность $O(|C_{ij}|\cdot\eta)$ при условии, что проверка принадлежности элемента множеству занимает $O(1)$. Для отдельного маршрута задача определения его пропускной способности относится к классу *P*. Однако, для всей сети в худшем случае сложность будет составлять $O(|M_{s,t}|\cdot|C_{ij}|\cdot\tilde{\eta})$, где $|M_{s,t}|$ – количество маршрутов из *s* в *t*, $\tilde{\eta}$ – средняя длина маршрутов из $M_{s,t}$. Таким образом, как и в случае с поиском всех маршрутов, сложность вычисления их пропускных способностей зависит от размера графа и мощности множеств, характеризующих пропускные способности ребер. Задача определения пропускных способностей всех маршрутов является NP-полной.

Задача поиска всех возможных структурированных потоков $\left\{f_m^{cmp}\right\}$ предполагает решение задачи о количестве отрезков для каждого маршрута. Для одного маршрута при использовании наивного подхода (простой перебор) сложность составляет $O(1)$. Однако, необходимость выполнения данной операции для каждого маршрута, также, как и в случае с поиском всех маршрутов, определяется их количеством.

При формировании системы ограничений на одновременную реализацию структурированных потоков необходимо выполнить конкатенацию матриц. Сложность данной операции для двух матриц является линейной, а для общей задачи определяется количеством матриц A_k (равных количеству маршрутов) и количеством ребер в графе. Таким образом, в наихудшем случае, когда все маршруты отличаются только одним ребром, сложность составляет $O\left((|M_{s,t}|-1)\cdot|E|\right)$ и позволяет отнести задачу к классу *NP*-полных.

Наконец решение задачи ЦЛП известными методами, например, методом ветвей и границ, зависит от $\left|\left\{f_m^{cmp}\right\}\right|$ и в худшем случае имеет экспоненциальную сложность $O\left(2^{\left|\left\{f_m^{cmp}\right\}\right|}\right)$ и относится к классу NP-трудных. Количество возможных структурированных потоков определяется количеством маршрутов и их пропускной способностью. Таким образом для неориентированных графов с большими значениями $|V|$, $|E|$ и $|C_{ij}|$ решение данным методом не может быть гарантировано за полиномиальное время.

Несмотря на это, ряд признаков, таких как целочисленность вектора f^{cmp} и возможность приведения матрицы ограничений A к унимодулярному виду, вселяют определенную надежду на возможность релаксации данной задачи и сведению её к задаче линейного программирования. Несмотря на это, основой метода является поиск всех маршрутов в графе, что в настоящее время не позволяет уменьшить сложность данного метода.

Заключение

Задача поиска максимального потока является классической оптимизационной задачей на графах и её решению посвящено множество работ [1–3]. Несмотря на это, особенности весов ребер, представленных в виде множеств с целочисленными элементами, а также дополнительные ограничения, обусловленные наличием у потока определённой структуры, не позволяют использовать традиционные алгоритмы для поиска максимального структурированного потока и максимального суммарного потока в графе с множественными весами ребер.

Представленные в работе математическая модель структурированного потока и задача поиска максимального суммарного потока, сформулированная в форме целочисленного линейного программирования, хоть и выглядят довольно громоздко, однако позволяют находить строгие решения. Кроме того, корректно сформулированная задача позволяет осуществлять проверку решений, получаемых с помощью специальных алгоритмов для решения потоковых задач и их модификаций с учетом дополнительных ограничений, представленных в статье.

Известно, что многие графовые задачи могут быть сформулированы в форме задач целочисленного линейного программирования. Однако специфика структуры потоковых моделей позволяет находить более эффективные алгоритмы, на разработку которых направлены дальнейшие усилия авторского коллектива статьи.

Литература

1. Форд, Л.Р. Потоки в сетях / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
2. Фрэнк, А. Сети, связь и потоки / А. Фрэнк, С. Фриш. – М.: Связь, 1978. – 448 с.
3. Филлипс, Д.Т. Методы анализа сетей / Д.Т. Филлипс, А. Гарсиа-Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
4. Алгоритмы построения и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. – М.: Вильямс, 2016. – 1323 с.
5. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
6. Грэхем, Р.Л. Конкретная математика: Основания информатики / Р.Л. Грэхем, Д.Э. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1994. – 703 с.
7. Ху, Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: Мир, 1974. – 519 с.
8. Таха, Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М.: Вильямс, 2001. – 911 с.

Поступила в редакцию 15 августа 2025 г.

Сведения об авторах

Бойко Алексей Павлович – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры сетей связи и систем коммутации, Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, e-mail: varenyxa89@gmail.com.

Лунёв Артём Дмитриевич – кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектроники и телекоммуникаций, Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: a.d.lunev@urfu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 1, pp. 15–25

DOI: 10.14529/mmph260102

A MODEL AND METHOD FOR FINDING THE MAXIMUM STRUCTURED FLOW IN A GRAPH WITH MULTIPLE EDGE WEIGHTS

A.P. Boyko[1], A.D. Lunev[2]
[1] S.M. Budyonny Military Academy of Communications, St. Petersburg, Russian Federation
[2] B.N. Yeltsin Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

Abstract. This article presents a network model in the form of a graph, where the edge weights are subsets of integers that characterize the throughput and constrain the flows through the edges. A special type of flow should be formed between *s* and *t* nodes in this network. This flow is subject to additional requirements: each edge along the route from *s* to *t* should have an identical subset of adjacent ordered elements, the number of which determines the magnitude of the flow. We are interested in finding a subset of such flows that have no common elements and can be simultaneously implemented, with the sum of their magnitudes being maximal for a given network. The presented model and method based on integer linear programming can be used to analyze the throughput of graphs with multiple edge weights.

Keywords: structured flow; multiple edge weights; network throughput.

References

1. Ford L.R., Fulkerson D.R. *Flows in Networks*. NJ.: Princeton University Press, 2024, 216 p.

2. Frank H., Frisch I. *Communication, Transmission, and Transportation Networks (Electrical Engineering Series)*. Addison Wesley, Reading, Mass., 1971, 479 p.

3. Phillips D.T., Garcia-Diaz A. *Fundamentals of Network Analysis*. NJ.: Prentice-Hall, 1981, 474 p.

4. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to Algorithms*. Cambridge: The MIT Press, 2002, 1296 p.

5. Christofides N. *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. London: Academic Press, 1975, 400 p.

6. Graham R.L., Knuth D.E. *Concrete Mathematics: A Foundations of Computer Science*. Addison-Wesley Professional, 1994, 672 p.

7. Hu T.C. *Integer Programming and Network Flows*. Addison-Wesley, 1970, 452 p.

8. Taha H.A. *Operations Research: An Introduction*. Pearson, 2022.

Received August 15, 2025

Information about the authors

Boyko Aleksey Pavlovich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, and Doctoral Candidate in the Department of Communication Networks and Switching Systems, Marshal of the Soviet Union S. M. Budyonny Military Academy of Communications, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: varenyxa89@gmail.com.

Lunev Artyom Dmitrievich is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor in the Department of Radioelectronics and Telecommunications, B. N. Yeltsin Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation, e-mail: a.d.lunev@urfu.ru.