УДК 517.925 DOI: 10.14529/mmph260103

О БИФУРКАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ СЕПАРАТРИСНЫХ КОНТУРОВ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С СИММЕТРИЕЙ

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Аннотация. На плоскости с декартовыми координатами (*x*,*y*) рассматривается однопараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей, инвариантных при отражении от оси *x*. Через начало координат O проходит линия переключения, трансверсально оси *x*. Пусть при нулевом значении параметра векторное поле семейства в левой полуокрестности линии переключения совпадает с гладким векторным полем, имеющим точку O грубым устойчивым узлом, а в ее правой полуокрестности совпадает с гладким векторным полем без особых точек. Пусть также это поле имеет на оси *x* грубое седло *S*, для которого открытая дуга оси х между точками O и *S* является входящей сепаратрисой седла, а две симметричные выходящие сепаратрисы седла не содержат особых точек и идут в точку *O*. В работе показано, что если при положительных значениях параметра в левой полуокрестности линии переключения нет особой точки, то из каждого из двух симметричных контуров, образованных сепаратрисами, рождается устойчивая, периодическая траектория. При дополнительных условиях рождающаяся периодическая траектория является единственной и гиперболической.

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле; симметрия; инвариантность; особая точка; сепаратрисный контур; бифуркация; периодическая траектория.

Введение. Предварительные сведения. Бифуркации динамических систем, задаваемыми кусочно-гладкими векторными полями изучаются уже давно и описаны, по крайней мере, для случая систем на плоскости достаточно полно (см. напр., [1–5]). Изучались и бифуркации гладких динамических систем, инвариантных относительно разных групп преобразований фазового пространства [6–11]. В работе [12] исследован ряд бифуркаций в типичных семействах кусочно-гладких векторных полей на плоскости, инвариантных относительно центральной симметрии.

В настоящей заметке описаны бифуркации в типичном однопараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей на плоскости, инвариантных при отражении относительно прямой, в которых рождается пара симметричных устойчивых предельных циклов.

Пусть D – разбиение $\mathbf{R}^2$ на множества D_k, $k \in \{1,2,...,n\}$ с C^∞-гладкими границами ∂D_k, такие, что их пересечения $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, совпадают с $\partial D_i \cap \partial D_j$, а X^k – векторные поля класса C^r на D_k. *Кусочно-гладким векторным полем* на плоскости $\mathbf{R}^2$, задаваемым полями X^k, называется класс всех векторных полей $\tilde{X}$ на $\mathbf{R}^2$ таких, что в точках $z \in \operatorname{int} D_k$ $\tilde{X}(z) = X^k(z)$. Будем его обозначать $X = (X^1, X^2, ..., X^n)$. Траектории векторных полей $\tilde{X}$ будем задавать, используя выпуклое доопределение в точках линий переключения $\partial D_i \cap \partial D_j$ [1]. Они не зависят от выбора представителя класса и потому их можно называть *траекториями поля* X.

Пусть отображение $I: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $I(x,y) := (x,-y)$ сохраняет разбиение D, то есть $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ $\exists l \in \{1,2,...,n\}$ $I(D_k) = D_l$, а границы множеств D_k не касаются множества неподвижных точек инволюции I – оси x. Кусочно-гладкое векторное поле $X = (X^1, X^2, ..., X^n)$ назовем *инвариантным относительно* I, если $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ $\forall z \in D_k$ $IX^k(z) = X^l I(z)$, где $D_l = I(D_k)$. Множество таких полей обозначим $\operatorname{Vec}^r(D,I)$.

Предположим, что $O = (0,0) \in D^0 := D_L \cap D_R$ при некоторых $L, R \in \{1,2,...,n\}$. Тогда $I(D_L) = D_L$, $I(D_R) = D_R$, $I(D^0) = D^0$ и в достаточно малой окрестности точки O G^0 задается уравнением $z_1 = g(z_2)$, где g – четная C^∞-гладкая функция. Перейдем к этой окрестности к координатам $x = z_1 - g(z_2)$, $y = z_2$. Инволюция I переводит точку с координатами (x, y) в точку с координатами $(x, -y)$. В окрестности $V_\delta(O)$ точки O, задаваемой в координатах (x, y) неравенствами $|x| < \delta$, $|y| < \delta$, где δ – достаточно малое положительное число, D^0 имеет уравнение $x = 0$ и можно считать, что $V_\delta(O) \cap D_L$ ($V_\delta(O) \cap D_R$) дается неравенством $x \le 0$ ($x \ge 0$). Далее будем отождествлять точку из $V_\delta(O)$ с ее координатной строкой (x, y).

2. Условия и результаты. Пусть разбиение D такое, как описано выше. Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей $X_\mu = (X_\mu^1, ..., X_\mu^n) \in \mathrm{Vec}^r(D, I)$, $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$, такое, что векторы $X_\mu^k(z)$, $k \in \{1, 2, ..., m\}$, C^r-гладко зависят от $(z, \mu) \in G_k \times (-\mu_0, \mu_0)$, $r \ge 3$.

Векторное поле $X_\mu^L\Big|_{V_\delta(O) \cap D_L}$ можно продолжить до C^r-векторного поля $\bar{X}_\mu^L$ на $V_\delta(O)$, инвариантного относительно I так, что вектор $\bar{X}_\mu^L(z)$ C^r-гладко зависит от $(z, \mu) \in V_\delta(O) \times (-\mu_0, \mu_0)$ [13, с. 587]. Пусть в координатах (x, y)

$$\bar{X}_\mu^L(z) = P(x, y, \mu)\partial / \partial x + Q(x, y, \mu)\partial / \partial y .$$

Вследствие инвариантности поля $\bar{X}_\mu^L$

$$P(x, -y, \mu) \equiv P(x, y, \mu), \; Q(x, -y, \mu) \equiv -Q(x, y, \mu) . \tag{1}$$

Пусть O – особая точка поля $\bar{X}_0^L$, то есть

$$P(0,0,0) = Q(0,0,0) = 0 . \tag{2}$$

Ввиду (1) $P_y'(0,0,0) = Q_x'(0,0,0) = 0$ и потому $\lambda_1^0 := P_x'(0,0,0)$ и $\lambda_2^0 := Q_y'(0,0,0)$ – собственные значения матрицы линейной части в точке O. Они не зависят от произвола в выборе векторных полей $\bar{X}_\mu^L$. Предположим, что $\lambda_k^0 < 0$ ($k = 1, 2$), то есть точка O – грубый устойчивый узел поля $\bar{X}_0^L$, Знак $P_\mu'(0,0,0)$ зависит только от векторных полей X_μ^L. Потребуем, чтобы $P_\mu'(0,0,0) \ne 0$. Без ограничения общности можно считать

$$P_\mu'(0,0,0) > 0 , \tag{3}$$

поскольку случай $P_\mu'(0,0,0) < 0$ сводится к случаю $P_\mu'(0,0,0) > 0$ заменой μ на $-\mu$.

Пусть точка $S_0 = (x_1^0, 0) \in \operatorname{int} G_{k_S}$ ($k_S \in \{1, 2, ..., m\}$) является грубым седлом векторного поля $X_0^{k_S}$ с характеристическими показателями $\lambda_{10}^S > 0$ и $\lambda_{20}^S < 0$, открытая дуга L_0^{in} оси x между точками O и S_0 не содержит особых точек поля X_0 и является входящей сепаратрисой седла S_0, а выходящие сепаратрисы L_0^+ и $L_0^- = I(L_0^+)$ точки S_0, лежащие, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, не содержат особых точек поля X_0 и ω-предельны к O (рис. 1).

Сепаратрисные контуры $\Gamma_0^\pm := L_0^{in} \cup L_0^\pm \cup \{O, S_0\}$ симметричны: $I(\Gamma_0^\pm) = \Gamma_0^\mp$, и образуют полицикл $\Gamma_0 := \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$.

Будем рассматривать два варианта:

(А) *Выполняется условие* $P_{yy}''(0,0,0) < 0$.

(Б) *Ось* x *– ведущее направление узла* O*, то есть* $\lambda_2^0 < \lambda_1^0$*. Сепаратрисы* L_0^+ *и* L_0^- *входят в* O *по ведущему направлению. Седловой индекс* $\gamma_0 := -\lambda_{20}^S / \lambda_{10}^S \ne 1$.

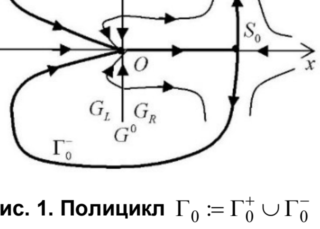

Рис. 1. Полицикл $\Gamma_0 := \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$

Теорема. *В случаях* (А) и (Б) *найдутся число* $\bar{\mu} \in (0, \mu_0]$ *и окрестность* U *полицикла* Γ_0*,* $I(U) = U$*, со следующими свойствами:*

1) *Для любого* $\mu \in (0,\overline{\mu})$ *векторное поле* X_μ *имеет в* U *две орбитно устойчивые периодические траектории:* Γ_μ^+, *лежащую в верхней полуплоскости, и* $\Gamma_\mu^- = I(\Gamma_\mu^+)$, *лежащую в нижней полуплоскости, а их топологические пределы* $\operatorname*{lt}_{\mu\to 0+} \Gamma_\mu^\pm = \Gamma_0^\pm$. *В случае* (Б) Γ_μ^+ и Γ_μ^- *являются гиперболическими периодическим траекториями, а в* U *нет других периодических траекторий.*

2) *При* $\mu \in (-\overline{\mu},0]$ *у векторного поля* X_μ *в* U *нет периодических траекторий.*

Доказательство теоремы приведено в разделах 3–4.

3. Случай (А). По теореме о неявной функции из (1)–(3) следует, что при некотором $\mu_1 > 0$ для всех $\mu \in (-\mu_1,\mu_1)$ векторное поле $\overline{X}_\mu^L$ имеет грубый устойчивый узел O_μ с координатами $x = \xi(\mu)$, $y = 0$, где

$$\xi(\cdot) \in C^r, \quad \operatorname{sgn}\xi(\mu) = \operatorname{sgn}\mu, \tag{4}$$

с матрицей линейной части поля в точке O_μ равной $\operatorname{diag}(\lambda_1(\mu),\lambda_2(\mu))$, где $\lambda_1(\mu) := P_x'(\xi(\mu),0,\mu)$ и $\lambda_2(\mu) := Q_y'(\xi(\mu),0,\mu)$.

Ввиду (1) $Q(x,0,\mu) = 0$, и потому $Q(x,y,\mu) = y(\lambda_2(\mu) + r_1(x-\xi(\mu),y,\mu))$, где $r_1 \in C^1$, $r_1(0,0,\mu) = 0$. Следовательно, числа $d \in (0,\delta]$, $\mu_2 \in (0,\mu_1]$ можно выбрать так, что

$$Q(x,y,\mu) \le (\lambda_2^0/2)y \text{ при } |x| \le d,\ 0 < y \le d,\ \mu \in (-\mu_2,\mu_2). \tag{5}$$

Линейная часть функции $P(x,y,0)$ равна $\lambda_1^0 x$. Поэтому можно считать, что $P(-d,y,0) > 0$ при всех $y \in [-d,d]$. Фиксировав d, мы можем выбрать $\mu_3 \in (0,\mu_2]$ так, что

$$P(-d,y,\mu) > 0 \text{ при всех } y \in [-d,d],\ \mu \in (-\mu_3,\mu_3). \tag{6}$$

Вследствие (1) $P(0,\cdot,\mu)$ – четная функция, и потому

$$P(0,y,\mu) = P(0,0,\mu) + y^2[P_{yy}''(0,0,0) + R(y,\mu)], \tag{7}$$

где $R \in C^1$, $R(0,0) = 0$. Отсюда, из (2) и (3) следует, что уравнение $P(0,y,\mu) = 0$ имеет решения только при $\mu \ge 0$. При $y \ge 0$ оно равносильно уравнению $y\sqrt{-P_{yy}''(0,0,0) + R(y,\mu)} = \sqrt{P(0,0,\mu)}$. Перепишем его в виде

$$y\sqrt{-P_{yy}''(0,0,0)} - \nu\sqrt{P(0,0,0)} + R_1(y,\nu) = 0, \tag{8}$$

где $\nu = \sqrt{\mu}$, а $R_1(y,\nu)$ – C^1-функция, определенная в некоторой окрестности точки $(0,0)$, $R_1(0,0) = (R_1)_y'(0,0) = (R_1)_\nu'(0,0) = 0$. По теореме о неявной функции найдутся такое число $\mu_4 \in (0,\mu_3]$, что для любого $\nu \in (-\sqrt{\mu_4},\sqrt{\mu_4})$ уравнение (8) имеет решение

$$y = \hat{y}(\nu) = \nu\sqrt{-P_\mu'(0,0,0)/P_{yy}''(0,0,0)} + o(\nu).$$

Выбрав μ_4 достаточно малым, получим

$$0 < \hat{y}(\sqrt{\mu}) \le K\sqrt{\mu} < d/2 \text{ при } \mu \in (0,\mu_4), \tag{9}$$

где $K = 2\sqrt{-P_\mu'(0,0,0)/P_{yy}''(0,0,0)}$. Следовательно, при $\mu \in [0,\mu_4)$ $\hat{y}(\sqrt{\mu})$ – решение уравнения $P(0,y,\mu) = 0$. Ввиду (2) и (7) можно считать $P_y'(0,y,\mu) < 0$ при $y \in (0,d]$, $\mu \in [0,\mu_4)$. Поэтому

$$\operatorname{sgn}P(0,y,\mu) = \operatorname{sgn}(\hat{y}(\sqrt{\mu}) - y) \text{ при всех } y \in (0,d],\ \mu \in [0,\mu_4). \tag{10}$$

Пусть $d/2 < d_1 < d$. Обозначим множество точек из $V_\delta(O) \cap G_L$ с координатами $(x,y) \in [-d,0] \times (0,d_1]$ символом Π, с координатами $(x,y) \in (-d,0) \times \{d_1\}$ символом l_1 и с координатами $(x,y) \in \{-d\} \times (0,d_1)$ символом l_2. Ввиду (5) и (6) d_1 можно считать выбранным так, что траектория L_0^+ пересекает границу Π в единственной точке, принадлежащей одной из дуг l_1 или l_2, трансверсально этой дуге. Для определенности, пусть эта точка принадлежит l_1 и имеет координаты $x = u_0$, $y = d_1$. Случай, когда точка принадлежит l_2, рассматривается аналогично.

При достаточно малом μ_4 поле $X_\mu^{k_S}$, $\mu \in (-\mu_4, \mu_4)$, имеет грубое седло $S(\mu)$ с координатами $x_2 = 0$, $x_1 = \hat{x}_1(\mu)$, $\hat{x}_1(\cdot) \in C^r$, $\hat{x}_1(0) = x_0$ и характеристическими показателями $\lambda_1^S(\mu) > 0$ и $\lambda_2^S(\mu) < 0$, C^{r-1}-гладко зависящими от μ.

Пусть G_ε^0 – дуга G^0, задаваемая в координатах (x, y) неравенством $0 < y \le \varepsilon$. Поскольку сепаратриса L_0^+ не содержит особых точек, то из [14, п. 13.8] следует, что при достаточно малых ε и μ_4 траектория поля X_μ, $\mu \in (-\mu_4, \mu_4)$, начинающаяся в точке G_ε^0 с координатой $y = v \in (0, \varepsilon]$, пересекает дугу l_1 в точке с координатой $x = \psi(v, \mu)$, где

$$x = \psi(v, \mu) = \hat{u}(\mu) + c(\mu) v^{\gamma(\mu)} + \rho(v, \mu), \tag{11}$$

$$\hat{u}(\cdot), c(\cdot) \in C^1,\ \hat{u}(0) = u_0,\ \gamma(\mu) = -\frac{\lambda_2^S(\mu)}{\lambda_1^S(\mu)} > 0,\ |\rho(v, \mu)| \le v^{\gamma(\mu)+\alpha},\ \left|\rho_v'(v, \mu)\right| \le v^{\gamma(\mu)+\alpha-1},\ 0 < \alpha < 1. \tag{12}$$

Доопределим $\psi(v, \mu)$ при $v = 0$, положив $\psi(0, \mu) := \hat{u}(\mu)$. Из (11) и (12) получаем, что ε и $\bar{\mu} \in (0, \mu_4]$ можно выбрать столь малыми, что

$$\psi(v, \mu) \in (-d, 0) \text{ для всех } v \in [0, \varepsilon],\ \mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu}). \tag{13}$$

Из (5), (6), (10), (9) и свойств функции соответствия по траекториям между дугами без контакта [15, с. 81] следует, что положительная полутраектория поля X_μ^L, $\mu \in (0, \mu_4)$, начинающаяся в точке дуги l_1 с координатами $x = u \in (-d, 0)$, $y = d_1$ трансверсально пересекает дугу $x = 0$ в точке с координатой $y = \varphi(u, \mu)$, где $\varphi \in C^r$, $\varphi_u'(u, \mu) > 0$, $0 < \varphi(u, \mu) < \hat{\eta}(\sqrt{\mu}) \le K\sqrt{\mu}$.

Выберем $0 < \bar{\mu} < \varepsilon^2 / K^2$. Тогда

$$0 < \varphi(u, \mu) < \varepsilon \text{ при всех } u \in (-d, 0),\ \mu \in (0, \bar{\mu}). \tag{14}$$

Из (13) и (14) получаем, что при $\mu \in (0, \bar{\mu})$ определена функция $f(\cdot, \mu) := \varphi(\psi(\cdot, \mu), \mu)$, отображающая $[0, \varepsilon]$ в $(0, \varepsilon)$. Она имеет хотя бы одну устойчивую неподвижную точку

$$v_0(\mu) \in (0, K\sqrt{\mu}) \subset (0, \varepsilon). \tag{15}$$

Поскольку $f(v, \mu)$ при $v \in (0, \varepsilon)$ является функцией последования по траекториям поля X_μ на G_ε^0, то через точку G_ε^0 с координатой $y = v_0(\mu)$ проходит единственная траектория Γ_μ^+, причем она орбитно устойчива. Поскольку число ε можно выбрать произвольно, то из (14) следует, что $\operatorname*{lt}_{\mu \to 0+} \Gamma_\mu^+ = \Gamma_0^+$.

При $\mu \in (-\bar{\mu}, 0]$ из (4) вытекает, что поле X_μ имеет в Π особую точку O_μ, к которой ω-предельны все траектории, начинающиеся в Π.

Построим простые замкнутые кривые γ_μ^+, γ_μ^- и γ_μ^{ext}, $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$, следующим образом. Кривая γ_μ^+ состоит из дуги траектории поля X_μ между точками $A_1^+ \in G_\varepsilon^0$ с координатой $\eta = \varepsilon$ и точкой $A_2^+ \in l_1$, а также дуги $\partial\Pi$ между этими точками (рис. 2). Кривая $\gamma_\mu^- = I(\gamma_\mu^+)$. Мы можем выбрать точки B_1^+ в верхней полуплоскости и точку B_1^0 на оси x так, чтобы отрезок $[B_1^0 B_1^+]$ был трансверсален траекториям векторных полей X_μ^S при всех $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$, а положительные полутраектории поля X_μ, начинающиеся в точках $[B_1^0 B_1^+] \setminus B_1^0$, пересекали трансверсально дугу l_1. Пусть $\widehat{B_1^+ B_2^+}$ – дуга полутраектории траектории, начинаю-

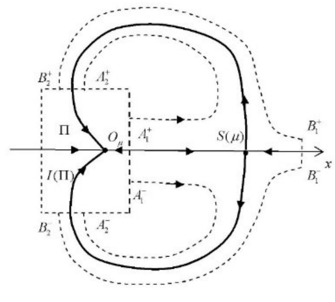

Рис. 2. Окрестность U_μ

щейся в точке B_1^+, с концом $B_2^+ \in l_1$. Составим $\gamma_\mu^{\mathrm{ext}}$ из дуг $[B_1^0 B_1^+]$, $[B_1^0 B_1^-] = I[B_1^0 B_1^-]$, $\widehat{B_1^- B_2^-} = I(\widehat{B_1^+ B_2^+})$, а также из дуги границы $\Pi \cup I(\Pi)$ между точками B_2^+ и $B_2^- = I(B_2^+)$.

Множество $\gamma_\mu^+ \cup \gamma_\mu^+ \cup \gamma_\mu^{\mathrm{ext}}$ является границей ∂U_μ области U_μ. Область U_0 является окрестностью полицикла Γ_0. Расстояние между Γ_0 и ∂U_0 – положительная величина, которую обозначим ρ_0. Считая $\bar{\mu}$ достаточно малым, будем иметь расстояние между ∂U_μ и Γ_0 большим $\rho_0 / 2$ при всех $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$. Но тогда U_μ – окрестность Γ_0.

Пусть U – $\rho_0 / 2$-окрестность Γ_0. Она содержится в U_μ, $\mu \in (-\bar{\mu}, \bar{\mu})$. При $\mu \in (-\bar{\mu}, 0]$ все положительные полутраектории, начинающиеся в U_μ, отличные от седла $S(\mu)$, ω-предельны к O_μ и потому в U нет периодических траекторий векторных полей X_μ, $\mu \in (-\bar{\mu}, 0]$. Поскольку $\operatorname{lt}_{\mu \to 0+} \Gamma_\mu^+ = \Gamma_0^+$, то можно считать, что при выбранном $\bar{\mu}$ $\Gamma_\mu^\pm \subset U$ для $\mu \in (0, \bar{\mu})$. Других периодических траекторий в U_μ, а потому и в U нет.

4. Случай (Б). Как и в случае (А) векторное поле $\bar{X}_\mu^L$, $\mu \in (0, \mu_1)$ имеет грубый устойчивый узел O_μ с координатами $x = \xi(\mu) > 0$, $y = 0$. Для $d \in (0, \delta)$ определено множество

$$K_d^\mu := \{(x, y) \in V_\delta(O) : -d \le x < \xi(\mu),\ 0 \le y \le \xi(\mu) - x\}.$$

Поскольку $\operatorname{diag}(\lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu))$ – матрица линейной части поля в точке O_μ, а по условию (Б) $\dfrac{\lambda_2(0)}{\lambda_1(0)} = \dfrac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0} > 1$, то, выбрав достаточно малые $\mu_2 \in (0, \mu_1]$ и d, можно считать, что при $\mu \in (0, \mu_2)$

$$P(x, y, \mu) > 0 \text{ для } (x, y) \in K_d^\mu,\quad Q(x, y, \mu) / P(x, y, \mu) < -1 \text{ для } (x, y) \in K_d^\mu,\ y = \xi(\mu) - x. \tag{16}$$

Рассмотрим в K_d^μ дифференциальное уравнение

$$y' = R(x, y, \mu), \text{ где } R(x, y, \mu) := Q(x, y, \mu) / P(x, y, \mu).$$

Ввиду (16) оно имеет решение $Y(x, u, \mu)$, $-d \le x < \xi(\mu)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(-d, u, \mu) = v$. Вследствие (1) $Y(-d, 0, \mu) \equiv 0$. Дуга $y = Y(x, u, \mu)$, $-d \le x \le 0$ – пересечение с K_d^μ траектории поля X_μ^L. Поэтому $\varphi(\cdot, \mu) := Y(0, \cdot, \mu)$ является функцией соответствия по траекториям векторных полей X_μ^L и X_μ между дугами $l_-^\mu := \{(x, y) \in K_d^\mu : x = -d\}$ и $l_0^\mu := \{(x, y) \in K_d^\mu : x = 0,\ 0 \le y \le \xi(\mu)\}$.

Ввиду (3) найдутся числа α_L и α_R такие, что

$$1 < \alpha_L < \lambda_2^0 / \lambda_1^0 < \alpha_R,\quad \alpha_L > \alpha_R (1 - \gamma_0). \tag{17}$$

Аналогично лемме из [5] доказывается, что μ_2 и d можно считать столь малыми, что для всех $-d \le x \le 0$, $\mu \in (0, \mu_2)$.

$$\varphi(u, \mu) \ge [\xi(\mu)]^{\alpha_R}, [\xi(\mu)]^{\alpha_R} \le \varphi_u'(u, \mu) \le [\xi(\mu)]^{\alpha_L}. \tag{18}$$

Как и в случае (А) при достаточно малом $\mu_3 \in (0, \mu_2]$ поле $X_\mu^{k_S}$, $\mu \in (-\mu_3, \mu_3)$, имеет грубое седло $S(\mu)$ с характеристическими показателями $\lambda_1^S(\mu) > 0$ и $\lambda_2^S(\mu) < 0$, C^{r-1}-гладко зависящими от μ.

Поскольку сепаратриса L_0^+ входит в точку O по направлению оси x, то число d можно считать выбранным так, что L_0^+ пересекает дугу l_-^0 в ее внутренней точке. Так как L_0^+ не содержит особых точек, то числа $\varepsilon > 0$ и $\mu_4 \in (0, \mu_3]$ можно выбрать так, что траектория поля X_μ,

$\mu \in (0, \mu_4)$, начинающаяся в точке дуги l_0^μ с координатой $y = v \in (0, \xi(\mu)]$ пересекает дугу l_-^μ в точке с координатой $x = \psi(v, \mu)$, где ψ удовлетворяет условиям (11) и (12).

Для любого $\mu \in (0, \mu_4)$ определена функция последования $f(\cdot, \mu) := \varphi(\psi(\cdot, \mu), \mu)$ и функция расхождения $d(v, \mu) := f(v, \mu) - v$, производная которой

$$d_v'(v, \mu) = \varphi_u'(\psi(v, \mu), \mu)\psi_v'(v, \mu) - 1. \tag{19}$$

Из (11) получаем

$$\psi_v'(v, \mu) = v^{\gamma(\mu)-1}\gamma(\mu)c(\mu) + \rho_v'(v, \mu). \tag{20}$$

По условию (Б) $\gamma(0) = \gamma_0 \neq 1$. Если $\gamma(0) > 1$, то из (20) и (12) следует, что μ_4 можно считать столь малым, что $0 < \psi_v'(v, \mu) \le 1$ для всех $\mu \in (0, \mu_4)$, $v \in (0, \xi(\mu)]$. Отсюда, из (18), (4) и (19) получаем, что при некотором $\bar{\mu} \in (0, \mu_4]$ $d_v'(v, \mu) < 0$ для всех $\mu \in (0, \bar{\mu})$, $v \in (0, \xi(\mu)]$. Поскольку $d(0, \mu) > 0$, $d(\xi(\mu), \mu) < 0$, то $d(\cdot, \mu)$ имеет единственный нуль $v_0(\mu) \in (0, \xi(\mu))$. Соответственно, дугу l_0^μ пересекает единственная периодическая траектория Γ_μ^+; она устойчивая и гиперболическая.

В случае $\gamma(0) < 1$, выбрав μ_4 достаточно малым, при $\mu \in (0, \mu_4)$ будем иметь $0 < 1 - \gamma(\mu) < 1$ и $v_*(\mu) := (2c(0))^{\frac{1}{1-\gamma(\mu)}}[\xi(\mu)]^{\frac{\alpha_L}{1-\gamma(\mu)}} \in (0, \xi(\mu))$. Из (17)–(20) получаем, что при некотором $\bar{\mu} \in (0, \mu_4]$

$$d(v, \mu) \ge [\xi(\mu)]^{\alpha_R} - [\xi(\mu)]^{\frac{\alpha_L}{1-\gamma(\mu)}} > 0 \text{ для всех } v \in (0, v_*(\mu)],\ \mu \in (0, \bar{\mu}).$$

$$d_v'(v, \mu) \le [\xi(\mu)]^{\alpha_L} 2c(0)\gamma(0)(v_*(\mu))^{\gamma(\mu)-1} - 1 \le \gamma(0) - 1 < 0 \text{ для всех } v \in [v_*(\mu), \xi(\mu)),\ \mu \in (0, \bar{\mu}).$$

Из этих неравенств следует, что $d(\cdot, \mu)$ имеет единственный нуль $v_0(\mu)$; он принадлежит интервалу $(v_*(\mu), \xi(\mu))$ и $d_v'(v_0(\mu), \mu) < 0$. Тем самым, дугу l_0^μ пересекает единственная периодическая траектория Γ_μ^+; она устойчивая и гиперболическая.

Окрестность U выбирается так же, как и в случае (А).

Литература

1. Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

2. Piecewise Smooth Dynamical Systems / M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Capneys, P. Kowalczyk. – Appl. Math. Sci., Vol. 163. London: Springer-Verlag, 2008. – 482 p.

3. Guardia, M. Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems / M. Guardia, T.M. Seara, M.A. Teixeira // J. of Differential Equations. – 2011. – Vol. 250, no. 4. – P. 1967–2023.

4. Simpson D.J.W. A Compendium of Hopf-like Bifurcations in Piecewise-Smooth Dynamical Systems / D.J.W. Simpson // Physics Letters A. – 2018. – Vol. 382, no. 35. – P. 2439–2444.

5. Ройтенберг, В.Ш. О рождении замкнутых траекторий из двух петель сепаратрис сшитого седло-узла, проходящих через развилку / В.Ш Ройтенберг // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. – 2023. – № 3. – С. 11–20.

6. Жолондек, Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости / Х. Жолондек // Математический сборник. – 1983. – Т. 120(162), № 4. – С. 473–499.

7. Golubitsky, M. Singularities and Groups in Bifurcation Theory / M. Golubitsky, D. Shaeffer, I. Stewart. – NY.: Springer-Verlag, 1985. – 466 p.

8. Николаев, Е.В. Бифуркации предельных циклов дифференциальных уравнений, допускающих инволютивную симметрию / Е.В. Николаев // Математический сборник. – 1995. – Т. 186, № 4. – С. 143–160.

9. Шноль, Э.Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.Э. Шноль // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, № 8. – С. 141–157.

10. Ройтенберг, В.Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, №3. –С. 39–46.

11. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией / В.Ш. Ройтенберг // Прикладная математика & Физика. – 2024. – Т. 56, № 1. – С. 5–12.

12. Ройтенберг, В.Ш. О бифуркациях периодической траектории «восьмерка» кусочно-гладкого векторного поля с симметрией / В.Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3. – С. 98–113.

13. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / Г.М. Фихтенгольц. – Т. 1. – М., СПб.: Физматлит, Нев. диалект, 2001. – 679 с.

14. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», ИКИ, 2019. – 548 с.

15. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

Поступила в редакцию 2 октября 2025 г.

Сведения об авторе

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Высшая математика и физика», Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Российская Федерация, e-mail: vroitenberg@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 1, pp. 26–33

DOI: 10.14529/mmph260103

ON BIFURCATIONS OF CERTAIN SEPARATRIX CONTOURS OF A PIECEWISE-SMOOTH DYNAMICAL SYSTEM WITH SYMMETRY

V.Sh. Roitenberg
Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation
E-mail: vroitenberg@mail.ru

Abstract. This article considers a one-parameter family of piecewise-smooth vector fields that are invariant under reflection from the x-axis on a plane with Cartesian coordinates (x, y). The switching line passes through the origin O, transversally to the x-axis. For a zero value of the parameter, let the vector field of the family in the left half-neighborhood of the switching line coincide with a smooth vector field that has the O point as a rough stable node, and in its right half-neighborhood it coincides with a smooth vector field without singular points. Let this field also have a rough saddle S on the x-axis such that the open arc of the x-axis between the O and S points is an incoming separatrix of the saddle, and the two symmetric outgoing separatrices of the saddle do not contain any singular points and lead to the O point. The article demonstrates that if there is no singular point in the left semi-neighborhood of the switching line for the positive values of the parameter, then a unique, stable, periodic trajectory arises from each of the two symmetrical contours formed by the separatrices. Under certain additional conditions, the emerging periodic trajectory is unique and hyperbolic.

Keywords: piecewise-smooth vector field; symmetry; invariance; singular point; separatrix contour; bifurcation, periodic trajectory.

References

1. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* (Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side). Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (in Russ.).

2. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. *Piecewise smooth dynamical systems.* Appl. Math. Sci. V. 163. London: Springer-Verlag, 2008, 482 p. DOI: 10.1007/978-1-84628-708-4

3. Guardia M., Seara T.M, Teixeira M.A. Generic Bifurcations of Low Codimension of Planar Filippov Systems. *J. of Differential Equations*, 2011, Vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023. DOI: 10.1016/ j.jde.2010.11.0163.

4. Simpson D.J.W. A Compendium of Hopf-Like Bifurcations in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. *Physics Letters A,* 2018, vol. 382, no. 35, pp. 2439–2444. DOI: 10.1016/j.physleta.2018.06.004

5. Roitenberg V.Sh. On the Generation of Closed Trajectories from Two Separatrix Loops of a Sewn Saddle-Node Passing Through a Fork. *Bulletin of Adyghe State University. Series: Natural-Mathematical and Technical Sciences*, 2023, Iss. 3 (326), pp. 11–20. (in Russ). DOI: 10.53598/2410-3225-2023-3-326-11-20.

6. Zholondek H. On the Versality of a Family of Symmetric Vector Fields on the Plane. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1984, Vol. 48, Iss. 2, pp. 463–492. DOI: 10.1070/ SM1984v048n02ABEH002686

7. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* NY.: Springer-Verlag, 1985, 466 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-5034-0

8. Nikolaev E.V. Bifurcations of Limit Cycles of Differential Equations Admitting an Involutive Symmetry. *Sbornik: Mathematics*, 1995, Vol. 186, Iss. 4, pp. 611–627. DOI: 10.1070/ SM1995v186n04ABEH000033

9. Shnol' È.È. Regular Polyhedra and Bifurcations of Symmetric Equilibria of Ordinary Differential Equations. *Sbornik: Mathematics*, 2000, Vol. 191, Iss. 8, pp. 1243–1258. DOI: 10.1070/ sm2000v191n08ABEH000503

10. Roitenberg V.Sh. Bifurcations of a Polycycle Formed by Two Separatrix Loops of a Non-Rough Saddle of a Dynamical System with Central Symmetry. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematics. Mechanics. Physics",* 2021, Vol. 13, no. 3, pp. 39–46. (in Russ.). DOI: 10.14529/ mmph210305.

11. Roitenberg V.Sh. On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fieds with Involutive Symmetry. Applied Mathematics & Physics, 2024, Vol. 56, no. 1, pp. 5–12. (in Russ.) DOI: 10.52575/ 2687-0959-2024-56-1-5-12

12. Roitenberg V.Sh. On Bifurcations of the "Figure-Eight" Periodic Trajectory of a Piecewise Smooth Vector Field with Symmetry. *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences,* 2020, no. 3, pp. 98–113. (in Russ.). DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-8.

13. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Tom 1* (Differential and Integral Calculus Course). Moscow, Saint Petersburg, Fizmatlit Publ., Nev. dialekt Publ., 2001, Vol. 1, 679 p. (in Russ.).

14. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev, D., Chua L.O. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics: Part 2*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, Vol. 5, River Edge, N.J.: World Sci., 2001. DOI: 10.1142/4221

15. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.G. *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems*. Halsted Press [A division of John Wiley & Sons] and Israel Program for Scientific Translations, New York-Toronto, Ont. and Jerusalem-London, 1973, 548 p.

Received October 2, 2025

Information about the author

Roitenberg Vladimir Shleymovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Physics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation. e-mail: vroitenberg@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1293-7998.