УДК 517.95 DOI: 10.14529/mmph260104

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ И С УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ РЕШЕНИИ

Р.К. Тагиев, А.К. Мамедова
Бакинский государственный университет, г. Баку,
Азербайджанская Республика
E-mail: r.tagiyev@list.ru, amamedova0209@mail.ru

Аннотация. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений при классических граничных условиях изучены достаточно полно. Однако эти задачи при условиях периодичности исследованы существенно слабее. В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления для эллиптического уравнения с условиями периодичности. Управляющая функция является коэффициент при решения эллиптического уравнения и принадлежит пространству Лебега с конечным индексом суммируемости. Решение краевой задачи для эллиптического уравнения определяется как обобщенное решение из пространства Соболева. Исследованы вопросы корректности рассматриваемой задачи оптимального управления, получена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие для оптимальности управления.

Ключевые слова: оптимальное управление; эллиптическое уравнение; условие периодичности; корректность задачи; необходимое условие оптимальности.

Введение

Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений при классических граничных условиях изучены в работах [1–6] и др. Однако эти задачи при граничных условиях периодичности исследованы существенно слабее [7, 8]. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений с периодическими краевыми условиями встречаются в различных областях, таких как инженерия, физика, медицина и другие. Эти задачи обычно связаны с управлением или оптимизацией физических процессов, и периодические краевые условия используются для моделирования повторяющихся процессов или условий. Они также находят применение в обратных задачах, например, медицинской визуализации и геофизической разведке, а также в оптимальном проектировании форм и управлении распределением нагрузок. [9, 10].

В настоящей работе изучается задача оптимального управления для эллиптического уравнения с условиями периодичности. Исследованы вопросы корректности постановки рассматриваемой задачи, получена формула для градиента целевого функционала и установлено необходимое условие оптимальности.

1. Постановка задачи и его корректность

Пусть $\Omega=\left\{x=(x_1,...,x_n)\in R^n : 0<x_i<l_i, (i=\overline{1,n})\right\}$-параллелепипед в R_n. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для эллиптического уравнения: требуется минимизировать функционал

$$J(v)=\int_\Omega \left|u(x,v)-u_0(x)\right|^2 dx \tag{1}$$

на множестве

$$V=\left\{v=v(x)\in L_s(\Omega): \mu_1\le v(x)\le \mu_2 \ \ п.в.на\ \Omega\right\} \tag{2}$$

при условиях, что $u=u(x)=u(x,v)$ является решением краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+v(x)u=f(x), \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u\big|_{x_i=0}=u\big|_{x_i=l_i}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=0} = k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=l_i}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Здесь $s>2$ при $n=2$ и $s\ge n$ при $n\ge 3$, $\mu_1,\mu_2>0$ - заданные числа, $k(x), f(x), u_0(x)-$ заданные измеримые функции удовлетворяющие следующие условия:

$$0<\xi\le k(x)\le\mu, \quad x\in\Omega, \quad f(x), u_0(x)\in L_2(\Omega), \tag{6}$$

где $\nu,\mu>0-$ заданные числа.

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [11, с. 23]. Ниже положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через М.

Обозначим через $\hat{W}_2^1(\Omega)$ подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, состоящее из элементов $W_2^1(\Omega)$ удовлетворяющих условия периодичности (4). Пусть $v=v(x)\in V$ фиксированное управление. Обобщённым решением из $W_2^1(\Omega)$ краевой задачи (3)–(5) назовем функцию $u(x)=u(x,v)$ из $\hat{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+v(x)u\eta\right)dx=\int_\Omega f(x)\eta dx \tag{7}$$

при $\forall\eta=\eta(x)\in\hat{W}_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. Краевая задача (3)–(5) при каждом заданном $v=v(x)\in V$ однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ и верна априорная оценка

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\|f\|, \tag{8}$$

где $M>0$ не зависит от f .

Доказательство. Введем в $\hat{W}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,w]=\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^n k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}+v(x)uw\right)dx. \tag{9}$$

В силу предположения $0<\xi\le k(x)\le\mu,\ 0<\mu_1\le v(x)\le\mu_2,\ x\in\Omega,$ норма $\|u\|_1\equiv\sqrt{[u,u]}.$ эквивалентна исходной норме $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$ пространства $\hat{W}_2^1(\Omega)$ [12, с.149]. Поэтому тождество (7) можно переписать в виде

$$[u,\eta]=(f,\eta). \tag{10}$$

При фиксированном f из $L_2(\Omega)$ выражение (f,η) определяет линейный функционал по η на $\hat{W}_2^1(\Omega)$. Кроме того, так как

$$|(f,\eta)|\le\|f\|\|\eta\|\le M\|f\|\|\eta\|_1,$$

то этот функционал ограничен и его норма не превосходит $M\|f\|$, где постоянна $M>0$ не зависит от f и η. Тогда, по теореме Рисса [12, с.75], существует единственная функция $F\in\hat{W}_2^1(\Omega)$ для которого $[u,\eta]=[F,\eta]$ при всех $\eta\in\hat{W}_2^1(\Omega)$, и эта функция удовлетворяет неравенству $\|F\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\|f\|$. Следовательно, в $\hat{W}_2^1(\Omega)$ существует единственная функция $u=F$, удовлетворяющая тождеству (10) или (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1)–(5) корректно поставлена в слабой топологии пространства $L_s(\Omega)$, т. е. множество оптимальных управлений $V_*=\{v_*\in V: J(v_*)=\inf\{J(v):v\in V\}\}$ не пусто и любая минимизирующая последовательность $\{v_m\}\subset V$ функционала $J(v)$ слабо в $L_s(\Omega)$ сходится к множеству V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал $J(v)$ слабо в $L_s(\Omega)$ непрерывен на множестве V. Пусть последовательная $\{v_m\} \subset V$ такова что

$$v_m \to v \text{ слабо в } L_s(\Omega), \tag{11}$$

где $v \in V$ фиксированный элемент.

Обозначим $u_m = u_m(x) = u_m(x, v_m)$. Тогда, из оценки (8) при $u = u_m$, следует, что последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в $W_2^1(\Omega)$. В силу теоремы вложения [11, c.83], не ограничивая общности, можно считать, что

$$u_m \to u \text{ слабо в } W_2^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_s(\Omega), \tag{12}$$

где $u = u(x)$ – некоторая функция из $W_2^1(\Omega)$.

Полагая в (7) $v = v_m, u = u_m$ получим тождества

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n k(x) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v_m(x) u_m \eta \right) dx = \int_\Omega f(x) \eta dx,$$
$$(m = 1, 2, ...), \quad \forall \eta = \eta(x) \in \hat{W}_2^1(\Omega). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что

$$\left| \int_\Omega v_m u_m \eta dx - \int_\Omega v u \eta dx \right| = \left| \int_\Omega v_m (u_m - u) \eta dx + \int_\Omega (v_m - v) u \eta dx \right| \le \mu_2 \|u_m - u\| \|\eta\| + \left| \int_\Omega (v_m - v) u \eta dx \right|. \tag{14}$$

Используя теоремы вложения [11, c.83] и условия $s > 2$ при $n = 2, s \ge n$ при $n \ge 3$ можно показать, что $u\eta \in L_{s/(s-1)}(\Omega)$. Тогда из (11), (12), (14) следует что,

$$\left| \int_\Omega v_m u_m \eta dx - \int_\Omega v u \eta dx \right| \to 0, \text{ при } \quad m \to \infty. \tag{15}$$

Теперь переходя к пределу в (13) и учтя соотношения (11), (12), (15) получаем, что функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству (7), т. е. $u(x) = u(x, v)$.

Таким образом, соотношение (12) справедливо с функцией $u = u(x, v)$ и в частности

$$u(x, v_m) \to u(x, v) \text{ сильно в } L_s(\Omega). \tag{16}$$

Тогда из (1) и (16) следует, что $J(v_m) \to J(v)$ при $m \to \infty$ т.е. функционал $J(v)$ слабо непрерывен на V. Кроме того, так как множество V определяемое равенством (2) замкнуто, ограничено и выпукло на рефлексивном банаховом пространстве $L_s(\Omega)$ оно слабо компактно [13, c.51]. Поэтому, утверждения теоремы 2 следует из теоремы Вейерштрасса [13, c. 49]. Теорема 2 доказана.

3. Дифференцируемость целевого функционала и необходимое условие оптимальности.

Пусть $\psi(x) = \psi(x, v) \in \hat{W}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ сопряженной краевой задачи:

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + v(x)\psi = 2\left[u(x, v) - u_0(x)\right], \quad x \in \Omega, \tag{17}$$

$$\psi\big|_{x_i=0} = \psi\big|_{x_i=l_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{18}$$

$$k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=0} = k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=l_i}, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

Обобщенное решение задачи (17)–(19) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n k(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + v(x)\psi\eta \right) dx = 2\int_\Omega \left[u(x, v) - u_0(x)\right] \eta dx, \quad \forall \eta = \eta(x) \in \hat{W}_2^1(\Omega). \tag{20}$$

В силу теоремы 1 краевая задача (17)–(19) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le 2M\|u(x,v)-u_0(x)\|.$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le 2M\left(M\|f\|+\|u_0(x)\|\right). \tag{21}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем на множестве V по норме $L_s(\Omega)$ и его градиент в точке $v\in V$ имеет вид

$$J'(v)=u(x,v)\psi(x,v), \quad x\in\Omega. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $v\in V$ – фиксированное управление, $\Delta v\in L_s(\Omega)$ – его приращение такое, что $v+\Delta v\in V$. Обозначим $\Delta u=\Delta u(x)=u(x,v+\Delta v)-u(x,v), x\in\Omega.$ Из (7) следует, что функция $\Delta u\in\hat{W}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n k(x)\frac{\partial\Delta u}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+(v(x)+\Delta v(x))\Delta u\eta\right]=-\int_\Omega\Delta v(x)u\eta dx, \quad \forall\eta=\eta(x)\in\hat{W}_2^1(\Omega). \tag{23}$$

Кроме того, в силу (8) для Δu верна оценка:

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\|\Delta vu\|.$$

Тогда, используя неравенство (1.7$'$) из [14, с.75] и ограниченность вложения $W_2^1(\Omega)\to L_{2s/(s-2)}(\Omega)$ получаем

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)}\le M\|\Delta v\|_{s,\Omega}\|u\|_{\frac{2s}{s-2},\Omega}\le M\|\Delta v\|_{s,\Omega}\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}. \tag{24}$$

Приращение $\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)$ функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(v)=2\int_\Omega\left[u(x,v)-u_0(x)\right]\Delta u(x)dx+\|\Delta u\|^2. \tag{25}$$

В тождестве (20) положим $\eta=\Delta u,$ в (23) $\eta=\psi$, вычтем полученные равенства и придем к равенству

$$2\int_\Omega\left[u(x,v)-u_0(x)\right]\Delta u(x)dx=\int_\Omega\left(u\psi+\Delta u\psi\right)\Delta vdx.$$

Отсюда и из (25), получим

$$\Delta J(v)=\int_\Omega u\psi\Delta vdx+R, \tag{26}$$

где

$$R=\|\Delta u\|^2+\int_\Omega\Delta u\psi\Delta vdx. \tag{27}$$

Используя неравенство (1.8) из [14, с.75], ограниченность вложения $W_2^1(\Omega)\to L_{2s/(s-1)\Omega}$ и оценки (24), имеем

$$\left|\int_\Omega\Delta u\psi\Delta vdx\right|\le\|\Delta u\|_{\frac{2s}{s-1},\Omega}\|\psi\|_{\frac{2s}{s-1},\Omega}\|\Delta v\|_{s,\Omega}\le M\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)}\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)}\|\Delta v\|_{s,\Omega}\le M\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)}\left(\|\Delta v\|_{s,\Omega}\right)^2. \tag{28}$$

Кроме того, используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (24), имеем

$$|R|\le M\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}\left(M\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}+\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)}\right)\left(\|\Delta v\|_{s,\Omega}\right)^2. \tag{29}$$

Тогда из (26), (29) следует, что функционал $J(v)$ (5) дифференцируем и его градиент имеет вид (22).

Покажем, что отображение $v\to J'(v)$ непрерывно действует из V в $L_{s'}(\Omega),$ где $L_{s'}(\Omega)$ – сопряженное пространство к $L_s(\Omega), s'=s/(s-1).$ Пусть

$$\Delta\psi = \psi(x, v + \Delta v) - \psi(x, v), \quad \psi = \psi(x) = \psi(x, v).$$

Из (17)–(19) следует, что $\Delta\psi$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ краевой задачи

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_i}\right) + (v + \Delta v)\Delta\psi = 2\Delta u(x, v), \quad x \in \Omega, \tag{30}$$

$$\Delta\psi\big|_{x_i=0} = \Delta\psi\big|_{x_i=l_i}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{31}$$

$$k(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=0} = k(x)\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=l_i}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{32}$$

Рассуждая аналогично выводу оценки (21) и используя оценки (24), можно показать, что для решения задачи (30)–(32) верна оценка

$$\|\Delta\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \le 2M^2 \|\Delta v\|_{s,\Omega} \|u\|_{2,\Omega}^{(1)}. \tag{33}$$

Используя неравенство (1.7$'$) из [14, с.75] и оценки (24), (33), и рассуждая аналогично работе [15] можно показать, что

$$\left\|J'(v + \Delta v) - J'(v)\right\|_{s',\Omega} \le M\left[\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\Delta v\|_{s,\Omega}\right]\|\Delta v\|_{s,\Omega}.$$

Отсюда следует, что $v \to J'(v)$ есть непрерывное отображение из V в $L_{s'}(\Omega)$. Теорема 2 доказана.

С помощью формулы градиента (22) и теоремы 5 из [13, с. 28] можно установить необходимое условие оптимальности управления в задаче.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $v_* = v_*(x) \in V$ - решение задачи (1)–(6), т. е. оптимальное управление. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} u(x, v_*)\psi(x, v_*)\left[v(x) - v_*(x)\right]dx \ge 0, \quad \forall v = v(x) \in V.$$

Литература

1. Литвинов, В.Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике / В.Г. Литвинов. – М.: Наука, 1987. – 366 с.

2. Алексеев, Г.В. Идентификация младшего коэффициента для стационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции / Г.В. Алексеев, Е.А. Калинина // Сиб. журн. индуст. математики. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 3–16.

3. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

4. Тагиев, Р.К. Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптического уравнения / Р.К. Тагиев // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 871–879.

5. Тагиев, Р.К. Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного эллиптического уравнения / Р.К. Тагиев // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 9. – С. 19–32.

6. Тагиев, Р.К. Вариационная постановка одной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 3. – С. 34–40.

7. Taghiyev, R.K. An Optimal Control Problem for an Elliptic Equation with Periodicity Conditions / R.K. Taghiyev, A.K. Mammadova // Baku State University Journal of Mathematics and Computer Sciences. – 2024. – Vol. 1, no. 4. – P. 39–48.

8. Mammadova, A.K. Optimal Control Problem for a Second-Order Linear Ordinary Differential Equation with Periodic Boundary Conditions / A.K. Mammadova // XXVII Republican Scientific Conference of Doctoral Students and Young Researchers dedicated to the "Year of Solidarity for a Green World", Azerbaijan, Sumgayit, December 10–11, 2024. – P. 160–164.

9. Troeltzsch, F. Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications / F. Troeltzsch. – American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 2010. – 399 p.

10. Isakov, V. Partial Inverse Problems for Differential Equations / V. Isakov. – Springer Cham, 2017. – 406 p.

11. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

12. Михайлов, В.П. Уравнения с частными производными / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

13. Васильев, Ф.П. Методы решения экстремальных задач: задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация / Ф.П. Васильев. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

14. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

15. Тагиев, Р.К. Вариационный метод решения одной коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с интегральными условиями / Р.К. Тагиев, Ш.И. Магеррамли // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2023. – Т. 224. – С. 133–141.

Поступила в редакцию 29 апреля 2025 г.

Сведения об авторах

Тагиев Рафиг Каландар оглы – доктор математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Оптимизация и управления», Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика, e-mail: r.tagiyev@list.ru.

Мамедова Айтадж Канан кызы – докторант, кафедра «Оптимизация и управления», Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика, e-mail: amamedova0209@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 1, pp. 34–40

DOI: 10.14529/mmph260104

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH PERIODICITY CONDITIONS AND CONTROL AT SOLUTION

R.K. Tagiyev, A.K. Mammadova
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan
E-mail: r.tagiyev@list.ru, amamedova0209@mail.ru

Abstract. Optimal control problems for elliptic equations with classical boundary conditions have been thoroughly studied. However, these problems with periodicity conditions are less well-researched. This paper focuses on the optimal control problem for an elliptic equation with periodicity conditions. The control function is the quotient at the solution to the elliptic equation and belongs to the Lebesgue space with a finite summability index. The solution to the boundary value problem for the elliptic equation is defined as a generalized solution from the Sobolev space. The paper examines the correctness of the considered optimal control problem, derives a formula for the gradient of the target functional, and determines a necessary condition for control optimality.

Keywords: optimal control; elliptic equation; periodicity condition; correctness of the problem; necessary condition of optimality.

References

1. Litvinov V.G. *Optimizatsiya v ellipticheskikh granichnykh zadachakh s prilozheniyami k mekhanike* (Optimization in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics). Moscow: Nauka Publ., 1987, 366 p. (in Russ.).

2. Alekseev G.V., Kalinina E.A. Identification of the Lower Coefficient for the Stationary Convection-Diffusion-Reaction Equation. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2007, Vol. 10, no. 1, pp. 3–16. (in Russ.).

3. Lions J.L. *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles*. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1968, 426 p. (in Fr.).

4. Tagiev R.K. On the Optimal Control of the Elliptic Equation Coefficients. *Differentsial'nye uravneniya*, 2011, Vol. 47, no. 6, pp. 871–879. (in Russ.).

5. Tagiev P.K. Optimal Control of the Coefficients of Quasilinear Elliptic Equation. *Automation and Remote Control*, 2010, Vol. 71, Iss. 9, pp. 1757–1769. DOI: 10.1134/S000511791009002X.

6. Tagiev R.K., Magerramli S.I. Variational Formulation of one Inverse Problem for Parabolic Equation with Integral Conditions. *Vestnik of South Ural State University Ser. Mathematics, Mechanics. Physics*, 2020, Vol. 12, no 3, pp. 34–40. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph200305

7. Taghiyev R.K., Mammadova A.K. An Optimal Control Problem for an Elliptic Equation with Periodicity Conditions. *Baku State University Journal of Mathematics and Computer Sciences*, 2024, Vol. 1, no 4, pp. 39–48.

8. Mammadova A.K. Optimal Control Problem for a Second-Order Linear Ordinary Differential Equation with Periodic Boundary Conditions. *XXVII Republican Scientific Conference of Doctoral Students and Young Researchers dedicated to the "Year of Solidarity for a Green World"*, Azerbaijan, Sumgayit, December 10–11, 2024, pp. 160–164.

9. Tröltzsch F. *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 2010, 399 p.

10. Isakov V. *Partial Inverse Problems for Differential Equations*. Springer Cham, 2017, 406 p. DOI: 10.1007/978-3-319-51658-5

11. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* (Boundary Value Problems of Mathematical Physics). Moscow, Nauka, 1973, 408 p. (in Russ.).

12. Mikhaylov V.P. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* (Equations with Partial Derivatives). Moscow: Nauka Publ., 1976, 392 p. (in Russ.).

13. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach: Zadachi minimizatsii v funktsion. prostranstvakh, regulyarizatsiya, approksimatsiya* (Methods for Solving Extreme Problems: Minimization Tasks in Functions. Spaces, Regularization, Approximation). Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p. (in Russ.).

14. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* (Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type). Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (in Russ.).

15. Tagiyev R.K., Maharramli Sh.I. Variational Method for Solving a Coefficient Inverse Problem for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2023, Vol. 224, pp. 133–141. (in Russ.). DOI: 10.36535/0233-6723-2023-224-133-141

Received April 29, 2025

Information about the authors

Tagiyev Rafig Kalandar oglu is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Optimization and Management, Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan, e-mail: r.tagiyev@list.ru.

Mammadova Aytadzh Kanan kyzy is Doctoral Candidate, Department of Optimization and Management, Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan, e-mail: amamedova0209@mail.ru.