УДК 517.925.7 DOI: 10.14529/mmph260105

ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕМБРАННОЙ ЭЛЕКТРОХИМИИ

Н.О. Чубырь
Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Российская Федерация
e-mail: chubyr-natalja@mail.ru

Аннотация. При математическом моделировании процессов переноса в электромембранных системах в виде краевых задач для систем уравнений Нернста–Планка–Пуассона возникают задачи, содержащие малый параметр при старшей производной, то есть сингулярно-возмущенные задачи. При малых плотностях тока эти задачи можно решать различными методами, например, методом погранслойных функций. Однако при больших плотностях тока известные методы асимптотического решения необходимо модифицировать, так как решение вырожденной задачи не существует на всем интервале. Для выявления структуры асимптотического решения, например, асимптотической шкалы, в таких случаях используют модельные задачи, допускающие точные аналитические решения. Кроме того, точное решение служит тестом для приближенных аналитических решений, например, асимптотических, а также численных решений. Точное решение дифференциальных уравнений имеет важное значение, так как позволяет исследовать задачу с исчерпывающей полнотой. Наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений высокого порядка является метод понижения порядка, позволяющее находить частное решение. В работе предлагается метод понижения порядка для некоторого класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры конкретных нелинейных уравнений и их точных решений.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения; точное решение; понижение порядка.

Введение

Для глубокого понимания качественных характеристик различных природных явлений и процессов используют точные решения нелинейных дифференциальных уравнений. Они позволяют иллюстрировать сложные нелинейные эффекты, помогая раскрыть их механизмы [1]. Также частные точные решения широко используются для проверки корректности и точности численных, асимптотических и приближенных аналитических методов [1, 2]. Кроме того, точные решения являются основой для проверки и улучшения специализированных компьютерных программ, таких как Mathematica, Maple и др.

Нелинейные дифференциальные уравнения редко разрешимы в элементарных функциях, и их анализ требует специальных методов. Не существуют общих методов для нахождения точных решений, поэтому каждый раз используются уникальные способы, которые имеют малую область использования [3–7]. Наиболее эффективным методом решения нелинейных уравнений высокого порядка является метод понижения порядка, позволяющее находить частное решение. В данной работе описаны точные решения некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений, которые не допускают понижения порядка уравнения с использованием известных методов, например, таких которые путем замены понижают порядок в уравнениях, не содержащих независимой переменной x или не содержащих искомой функции y, в однородных уравнения (обобщенная однородность) или в уравнениях, допускающие понижение порядка специальной подстановкой. Аналогичные уравнения встречаются в электрохимии. Так, например, при аналитическом решении модельной задачи стационарного переноса ионов соли для 1:1 электролита в сечение канала обессоливания с учетом пространственного заряда и реакции диссоциации/рекомбинации с учетом зависимости коэффициента равновесия от величины пространственного заряда [8], которая описывается расширенной системой уравнений Нернста–Планка–Пуассона, в области погранслоя у анионообменной мембраны приходим к решению уравнения для безразмерного потенциала электрического поля φ:

$$\varepsilon\frac{d^3\varphi}{dx^3}=\left(\frac{\varepsilon}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2-\frac{a}{2\varepsilon}k_{w_0}x^2+b_0\varphi-\gamma_1x+\gamma_2\right)\frac{d\varphi}{dx}-\frac{a}{\varepsilon}k_{w_0}x+b_0\frac{d\varphi}{dx}-\gamma_1,$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, k_{w_0} – коэффициент равновесия реакции диссоциации молекул воды, a,b_0 – безразмерные параметры, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ – константы интегрирования [9]. Обобщение уравнения такого типа рассматриваются в данной работе.

Методы и результаты

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n}=\left(\frac{1}{2}(\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}})^2+u\right)\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}+\frac{d}{dx}(u), \tag{1}$$

Где u непрерывно дифференцируемая функция, в общем случае, зависящая от x и φ.

Не сложно видеть, что любое гладкое решение уравнения

$$\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}=\frac{1}{2}(\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}})^2+u \tag{2}$$

является решением уравнения (1).

Действительно, продифференцируем уравнения (2) по x, тогда получим

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n}=(\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}})\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}+\frac{d}{dx}(u).$$

Подставим вместо $\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}$ из уравнения (2) правую часть, тогда после ряда преобразований, получим

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n}=\left(\frac{1}{2}(\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}})^2+u\right)(\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}})+\frac{d}{dx}(u)$$

ч. т. д.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть в уравнении (1) $n = 3$

а) $u(x)$ гладкая функция, например, $u(x)=\frac{A}{2}x^2+Cx+D$. Рассмотрим уравнение типа (1)

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3}=\left(\frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2+\frac{A}{2}x^2+Cx+D\right)\frac{d\varphi}{dx}+Ax+C. \tag{3}$$

Из первого утверждения следует, что любое решение следующего нелинейного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2+\frac{A}{2}x^2+Cx+D \tag{4}$$

является решением уравнения (3).

Можно показать, что уравнение (4) допускает точное решение с использованием функций Эйри [8]. Действительно, сделаем в уравнении (4) замену $\varphi=-2\ln\psi$, тогда

$$\frac{d\varphi}{dx}=-2\frac{\psi_x}{\psi},\ \varphi_x=-2\frac{\psi_x}{\psi},\ \varphi_{xx}=2(\frac{\psi_x}{\psi})^2+\frac{A}{2}x^2+Cx+D.$$

Таким образом, получаем линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$2\frac{d^2\psi}{dx^2}=-(\frac{A}{2}x^2+Cx+D)\psi$$

или

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=-(Ax^2+2Cx+2D)\psi$$

Это уравнение приводится к уравнению Вебера–Эрмита, которое имеет решение с использованием функций параболического цилиндра. В частности, если $A=0$, то решение уравнение выражается через функции Эйри $\psi = C_1 Ai\left(\dfrac{2D+2Cx}{(-2C)^{2/3}}\right) + C_2 Bi\left(\dfrac{2D+2Cx}{(-2C)^{2/3}}\right)$, где $Ai(x)$ и $Bi(x)$ функции Эйри соответственно первого и второго рода.

б) пусть теперь u гладкая функция, зависящая от x и неизвестной функции φ, например, $u(x) = \dfrac{A}{2}x^2 + Cx + D + B\varphi$, то есть рассматривается уравнение

$$\frac{d^3\varphi}{dx^3} = \left(\frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2 + \frac{A}{2}x^2 + Cx + D + B\varphi\right)\frac{d\varphi}{dx} + Ax + C + B\frac{d\varphi}{dx}. \tag{5}$$

Из утверждения выше следует, что любое решение следующего нелинейного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2 + \frac{A}{2}x^2 + Cx + D + B\varphi \tag{6}$$

является решением уравнения (5).

Пусть $A \neq 0,\ B \neq 0$, тогда уравнение (6) имеет частное решение вида $\varphi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Для нахождения коэффициентов подставим функцию $\phi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ в исходное уравнение.

$$2\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha x + \beta)^2 + \frac{A}{2}x^2 + Cx + D + B(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Упростив и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений

$$0 = 2\alpha^2 + \frac{A}{2} + B\alpha,\ 0 = 2\alpha\beta + C + B\beta,\ 2\alpha = \frac{1}{2}\beta^2 + D + B\gamma.$$

а) из первого уравнения получаем, что при условии $B^2 - 4A = 0$ имеем единственное решение $\alpha = -\dfrac{B}{4}$, из второго уравнения $\beta = \dfrac{C}{B}$, а из последнего $\gamma = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{C^2}{B^3} + \dfrac{D}{B}$, и, соответственно,

$$\varphi = -\frac{B}{4}x^2 + \frac{C}{B}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{C^2}{B^3} + \frac{D}{B}.$$

б) при условии $B^2 - 4A > 0$ получим два решения для α: $\alpha = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{4}$.

Подставим их во второе уравнение системы и найдем β: $\beta = -\dfrac{2C}{3B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}$.

И из третьего найдем γ: $\gamma = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A} - 2D}{2B} - \dfrac{2C^2}{9B^3 \pm 6B^2\sqrt{B^2 - 4A} + B^3 - 4AB}$

Подставляя найденные коэффициенты в $\varphi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ получим частное решение.

В случае, когда в уравнении (6) $A = 0$ и $C = 0$ уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{2}(\frac{d\varphi}{dx})^2 + D + B\varphi$$

и допускает еще одно понижение порядка заменой $\dfrac{d\varphi}{dx} = z(\varphi)$,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{dx}z(\varphi) = \frac{dz}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = z\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{dz^2}{d\varphi}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{dz^2}{d\varphi} = \frac{1}{2}z^2 + D + B\varphi$$

или

$$\frac{dy}{d\varphi} = y + 2B\varphi, \qquad (7)$$

где $y(\varphi) = z^2(\varphi) + 2D$.

Решая линейное уравнение (7) получим: $y = -2B\varphi - 2B + \tilde{C}e^{\varphi}$.

Вернемся к замене $z^2(\varphi) + 2D = -2B\varphi - 2B + \tilde{C}e^{\varphi}$, то есть получим уравнение первого порядка $\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{-2B\varphi - 2B - 2D + C_2 e^{\varphi}}$.

Замечание 1. Очевидно, уравнение (4) в отличие от уравнения (5) допускает понижение порядка также и заменой $\frac{d\varphi}{dx} = z(\varphi)$.

2. Пусть в уравнение (1) $n = 2$, тогда уравнение (1) имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (\frac{1}{2}\varphi^2 + u)\varphi + \frac{d}{dx}(u). \qquad (8)$$

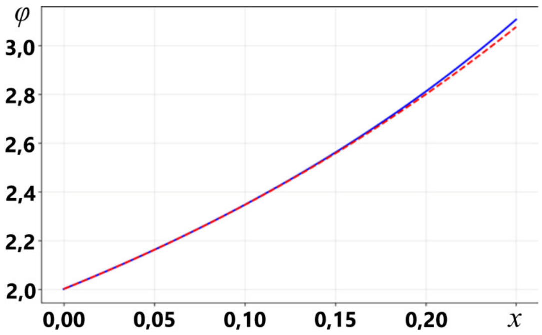
И, соответственно, уравнение (2)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\varphi^2 + u. \qquad (9)$$

Если $u(x) = \frac{A}{2}x^2 + Cx + D$, то уравнение (2) сводится к уравнению Эйри [10].

Если $u(x) = \frac{A}{2}x^2 + Cx + D + B\varphi$, то уравнение (2) имеет различные решение в соответствии со значениями коэффициентов, наиболее сложный случай, где все коэффициенты не равны нулю, можно свести к уравнению Риккати.

Произведем сравнение графиков решений исходной и упрощенной задачи, полагая $A = 4$, $C = 2$, $D = 1$, то есть уравнение (8) примет вид $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = (\frac{1}{2}\varphi^2 + 2x^2 + 2x + 1)\varphi + 4x + 2$, причем для этого уравнения ставится задача Коши с условиями $\varphi(0) = 2$, $\frac{d\varphi(0)}{dx} = 3$, а для соответствующего уравнения (10) $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\varphi^2 + 2x^2 + 2x + 1$ задача Коши с условием $\varphi(0) = 2$. Графики решений даны на рисунке.



Сравнение графиков решений $\varphi(x)$ исходной задачи: сплошная линия – численное решение уравнения (9), пунктирная линия – аналитическое решение уравнения (10)

Заключение

В работе найдены точные решения некоторых классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым не применимы известные методы понижения порядка, приведены конкретные примеры дифференциальных уравнений и их точных решений, которые полезны для теоретического анализа и понимания поведения решения. Предложенные точные решения могут быть использованы в качестве тестов при численном решение краевых задач для нелинейных уравнений, а также служить основой для приближенных аналитических решений. Уравнения данного вида встречаются при аналитическом решении математических моделей в электрохимии, что и привело к необходимости исследования данных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-19-00648.

Литература

1. Mathematical Modeling of Electrodialysis of a Dilute Solution with Accounting for Water Dissociation-Recombination Reactions / A.V. Kovalenko, V.V. Nikonenko, N.O. Chubyr, M.Kh. Urtenov // Desalination. – 2023. – Vol. 550. – P. 116398.

2. Полянин, А.Д. Построение решений нелинейных уравнений математической физики с помощью точных решений более простых уравнений / А.Д. Полянин // Вестник НИЯУ МИФИ. – 2024. – Т. 13, № 2. – С. 66–75.

3. Полянин, А.Д. Точные решения нелинейных консервативно-диффузионных методов гиперболического типа с запаздыванием / А.Д. Полянин, В.Г. Сорокин // Вестник НИЯУ МИФИ. – 2014. – Т. 3, № 2. – С. 141–146.

4. Буданов, В.М. Метод построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений / В.М. Буданов // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 5. – С. 590–603.

5. Полянин, А.Д. Построение точных решении нелинейных дифференциальных уравнений методом расщепления / А.Д. Полянин, Л.В. Линчук // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2020. – Т. 9, № 1. – С. 32–44.

6. Байраш, Р.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения четного порядка с интегральными условиями / Р.А. Байраш, А.Л. Скубачевский // Доклады российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2025. – Т. 522, № 1. – С. 7–10.

7. Полянин, А.Д. Переопределенные системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами и их приложения / А.Д. Полянин // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2016. – Т. 5, № 2. – С.122–136.

8. Асимптотическое решение краевой задачи для стационарной расширенной системы уравнений Нернста–Планка и Пуассона / Н.О. Чубырь, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, З.М. Лайпанова // Перспективы науки. – 2024. – № 2 (173). – С. 72–81

9. Математическое моделирование влияния зависимости константы скорости диссоциации/рекомбинации на перенос ионов соли в диффузионном слое у ионообменной мембраны / Р.Р. Назаров, А.В. Коваленко, Р.А. Бостанова, М.Х. Уртенов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2025. – Т. 29, № 1. – С. 109–128.

10. Коренев, Б.Г. Введение в теорию Бесселевых функций / Б.Г. Коренев. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

Поступила в редакцию 21 июля 2025 г.

Сведения об авторе

Чубырь Наталья Олеговна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Российская Федерация, e-mail: chubyr-natalja@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3535-0361.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 1, pp. 41–46

DOI: 10.14529/mmph260105

AN EXACT ANALYTICAL SOLUTION TO A CERTAIN CLASS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MEMBRANE ELECTROCHEMISTRY

N.O. Chubyr
Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation
e-mail: chubyr-natalja@mail.ru

Abstract. Various boundary value problems with a small parameter at the highest derivative, i.e. singularly perturbed boundary value problems, arise in the mathematical modeling of transfer processes in electromembrane systems in the form of boundary value problems for systems of Nernst–Planck–

Poisson equations. At low current densities, these problems can be solved by various order reduction methods for a certain class of nonlinear ordinary differential equations. In some cases, general solutions to the equations can be found or they can be reduced using certain methods, for example, the boundary layer function method. However, at high current densities, the known methods of asymptotic solution should be modified, as the solution to the degenerate problem does not exist on the entire interval. To address this issue, model problems that admit exact analytical solutions are used to identify the structure of the asymptotic solution, i. e. the asymptotic scale and other parameters. Besides, the exact solution of differential equations is crucial, as it allows for a thorough and complete analysis of the problem. The exact solution also acts as a benchmark for methods of approximate analytical solutions, for example, asymptotic, as well as numerical methods of solutions. The most effective method for solving high-order nonlinear equations is the order reduction method, which allows finding a particular solution. This paper proposes a method of order reduction for a specific class of nonlinear ordinary differential equations and gives examples of specific nonlinear equations and their exact solutions.

Keywords: nonlinear differential equations; exact solution; order reduction.

References

1. Kovalenko A.V., Nikonenko V.V., Chubyr N.O., Urtenov M.Kh. Mathematical Modeling of Electrodialysis of a Dilute Solution with Accounting for Water Dissociation-Recombination Reactions. *Desalination*, 2023, Vol. 550, p. 116398. DOI: 10.1016/j.desal.2023.116398

2. Polyanin A.D. Construting Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics using Exact Solutions to Simpler Equations. *Vestnik NIYAU MIFI*, 2024, Vol. 13, no. 2, pp. 66–75. DOI:10.26583/vestnik.2024.318

3. Polyanin A.D., Sorokin V.G. Tochnye resheniya nelinejnyh konservativno-diffuzionnyh metodov giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem (Exact Solutions of Nonlinear Conservative Diffusion Methods of Hyperbolic Type with Delay). *Vestnik NIYAU MIFI*, 2014, Vol. 3, no. 2, pp. 141–146. DOI: 10.1134/S2304487X14020163

4. Budanov V.M. Method for Constructing Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Differential Equations*, 2024, Vol. 60, no. 5, pp. 590–603. DOI: 10.31857/S0374064124050022

5. Polyanin A.D., Linchuk L.V. Construction of Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations by the Splitting Method. *Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2020, Vol. 9, no. 1, pp. 32–44. DOI: 10.1134/S2304487X20010071

6. Bayrash R.A., Skubachevskii A.L. Ordinary Differential Equations of Even Order with Integral Conditions. *Doklady rossijskoj akademii nauk. Matematika, informatika, processy upravleniya*, 2025, Vol. 522, no. 1, pp. 7–10. DOI: 10.31857/S2686954325020024

7. Polyanin, A.D. Pereopredelennye sistemy nelinejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij s parametrami i ih prilozheniya (Redefined Systems of Nonlinear Ordinary Differential Equations with Parameters and their Applications). *Vestnik nacional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI"*, 2016, Vol. 5, no. 2, pp. 122–136. DOI: 10.1134/S2304487X16010119

8. Chubyr N.O., Kovalenko A.V., Urtenov M.H., Lajpanova Z.M. Asimptoticheskoe reshenie kraevoj zadachi dlya stacionarnoj rasshirennoj sistemy uravnenij Nernsta–Planka i Puassona (Asymptotic Solution of a Boundary Value Problem for a Stationary Extended System of Nernst–Planck and Poisson Equations). *Science Prospects*, 2024, no. 2(173), pp. 72–81. (in Russ.).

9. Nazarov R.R., Kovalenko A.V., Bostanov R.A., Urtenov M.H. Mathematical Modeling of the Influence of Dissociation/Recombination Rate Constant Dependence on Salt Ion Transport in the Diffusion Layer Near an Ion-Exchange Membrane. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2025, Vol. 29, no. 1, pp. 109–128. DOI: 10.14498/vsgtu2101

10. Korenev B.G. *Vvedenie v teoriyu Besselevyh funkcij* (Introduction to the Theory of Bessel Functions). Moscow, Nauka Publ., 1971, 287 p. (in Russ.).

Received July 21, 2025

Information about the author

Chubyr Natalia Olegovna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation, e-mail: chubyr-natalja@mail.ru, ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3535-0361.