

# Механика

УДК 536.21; 517.958

DOI: 10.14529/mmp260106

## ТОЧНОЕ КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА– ПУАЗЕЙЛЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

**К.В. Губарева<sup>1</sup>, Е.Ю. Просвиряков<sup>2,3</sup>, А.В. Еремин<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт машиноведения, г. Екатеринбург, Российская Федерация

<sup>3</sup> Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация

E-mail: r.kristina2017@mail.ru

**Аннотация.** Исследуется установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с проницаемыми параллельными стенками. В отличие от классических постановок, на верхней границе задаются не только значение скорости, но и её первые два пространственных градиента. Такой подход позволяет моделировать течения с локальной неоднородностью вдоль канала. Нижняя стенка неподвижна и удовлетворяет условию прилипания. Учитывается постоянный градиент давления произвольного знака и равномерный нормальный поток через обе границы. Задача решена аналитически в безразмерной форме, где определяющую роль играют число Рейнольдса, число Рейнольдса на основе скорости проницаемости и безразмерный градиент давления. Проведён асимптотический анализ в предельных случаях слабой и сильной проницаемости. На основе структуры точно-го решения получена оценка толщины пограничного слоя при инжекции. Результаты подтверждены численным моделированием для реальных жидкостей и демонстрируют переход от вязко-доминированного к конвективно-доминированному режиму течения.

**Ключевые слова:** течение Куэтта–Пузейля; проницаемые границы; ана-  
литическое решение; число Рейнольдса; пограничный слой; градиент давления;  
нормальный поток; неоднородные граничные условия.

### Введение

Исследование ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости между параллельными пластинами служит классической моделью для изучения фундаментальных закономерностей гидродинамики. Такие эталонные решения, как течение Куэтта (сдвиговое течение, вызванное движением стенки) и течение Пузейля (напорное течение, обусловленное градиентом давления) [1, 2], на протяжении более века используются для верификации численных методов и построения более сложных моделей.

Однако в реальных технических и природных системах границы потока часто являются проницаемыми [3–7]. В таких приложениях, как системы охлаждения с пористыми элементами, микрофлюидные устройства для разделения компонентов или процессы фильтрации, сквозной поток через стенки играет ключевую роль в формировании структуры течения. Учет проницаемости качественно меняет картину течения: в отличие от чисто вязкого механизма переноса, характерного для непроницаемых каналов, нормальный поток вносит конвективную составляющую. Это приводит к формированию тонких пограничных слоев, резкой неоднородности полей скорости и открывает возможности для управления течением, что широко используется в технологиях активного контроля пограничного слоя и тепломассообмена.

Большинство существующих моделей течений в каналах с проницаемыми стенками опирается на простые граничные условия прилипания, что ограничивает их применимость случаями, когда граница движется как единое целое [3, 8]. В то же время, на практике часто возникают ситуации, требующие учета неоднородности профиля скорости на границе, например, при сопряжении с внешним потоком, имеющим поперечные градиенты, или при локальном изменении свойств поверхности.

## Механика

В настоящей работе предлагается обобщенная постановка задачи, в которой на верхней проницаемой границе задаются не только значение скорости, но и её первые два пространственных градиента [9–12]. Такой подход позволяет моделировать течения с локальной неоднородностью, не усложняя геометрию расчетной области. Нижняя стенка считается неподвижной и непроницаемой (условие прилипания). Модель учитывает постоянный градиент давления произвольного знака и равномерный нормальный поток (инжекцию или отсос) через обе стены.

Целью работы является получение точного аналитического решения сформулированной краевой задачи, выявление определяющих безразмерных параметров и анализ структуры течения. Особое внимание уделено асимптотическому поведению решения и количественной оценке толщины пограничного слоя при интенсивной инжекции.

Актуальность исследования обусловлена его приложениями в области микрофлюидики и теплообмена. Например, в биохимических анализаторах с полупроницаемыми мембранами или в системах охлаждения турбинных лопаток с пористыми покрытиями гидродинамическое поле существенно зависит от сквозного потока, и классические модели оказываются неприменимы.

Таким образом, вклад данной работы заключается в построении замкнутого аналитического решения для обобщенной модели течения с проницаемыми границами, учитывающей неоднородные кинематические условия и градиент давления. В отличие от большинства известных решений, ограниченных однородными граничными условиями, предложенная постановка охватывает более широкий класс практических задач. На основе решения строго выводятся ключевые безразмерные параметры подобия: число Рейнольдса  $Re$ , число Рейнольдса проницаемости  $Re_w$  и безразмерный градиент давления  $S$ . Это позволяет провести универсальный анализ перехода от вязко-доминированного к конвективно-доминированному режиму течения. Полученные результаты могут служить как для верификации численных методов, так и для проектирования технических систем с управляемыми проницаемыми поверхностями.

### Постановка задачи и аналитическое решение

Рассматривается установившееся (стационарное) течение ньютоновской несжимаемой жидкости в плоском канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными на фиксированном расстоянии  $h$  друг от друга (рис. 1) [13, 14]. Пластины обладают свойством проницаемости, что означает возможность сквозного прохождения жидкости через них в направлении, нормальному к их поверхности. Такая постановка широко используется в теории течений с инжекцией или отсосом и находит применение в задачах охлаждения пористых поверхностей, микрофлюидики и фильтрации.

Вдоль канала, то есть в направлении оси  $x$ , поддерживается постоянный градиент давления. Это означает, что давление  $p$  является линейной функцией координаты  $x$ :

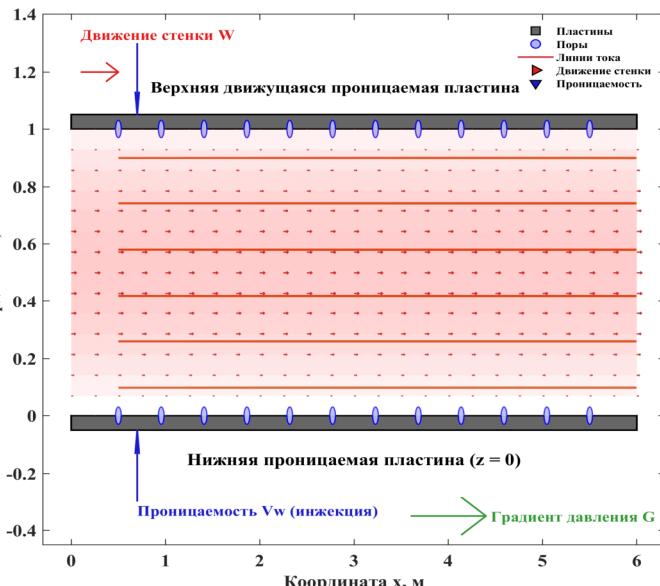


Рис. 1. Схема течения с проницаемыми границами

$$\frac{dp}{dx} = G, \quad (1)$$

где  $G$  – заданная константа, имеющая размерность паскаль на метр (Па/м). Важно подчеркнуть, что знак величины  $G$  не фиксирован априори. Если  $G < 0$ , то давление убывает вдоль направления течения, что соответствует благоприятному градиенту давления и способствует ускорению потока. Если же  $G > 0$ , то давление возрастает вдоль течения – это неблагоприятный градиент, который может приводить к замедлению потока, образованию зон обратного течения или даже к

отрыву пограничного слоя при достаточной интенсивности. Случай  $G = 0$  соответствует отсутствию перепада давления, и движение обусловлено исключительно движением границ и проницаемостью.

Выбор системы координат осуществляется следующим образом: ось  $x$  направлена вдоль пластин, совпадая с основным направлением течения; ось  $z$  направлена перпендикулярно пластинам, причем нижняя пластина расположена в плоскости  $z = 0$ , а верхняя – в плоскости  $z = h$ . Ось  $y$  вводится для описания возможной слабой пространственной неоднородности течения вдоль канала; в рамках данного анализа она рассматривается как поперечная координата, отсчитываемая от некоторого фиксированного продольного сечения. Таким образом, течение считается двумерным в плоскости  $(x, z)$ , но продольная компонента скорости может иметь слабую зависимость от координаты  $y$ .

Предполагается, что нормальная компонента скорости постоянна по всему объему:

$$V_z = V_w = \text{const}, \quad (2)$$

где  $V_w$  – скорость проницаемости, имеющая размерность м/с. Положительное значение  $V_w > 0$  соответствует инжекции (втеканию жидкости в канал через обе пластины), отрицательное  $V_w < 0$  – отсосу (вытеканию жидкости из канала). Поперечная компонента скорости отсутствует:

$$V_y = 0. \quad (3)$$

Продольная компонента скорости  $V_x$  представляется в виде разложения по степеням координаты  $y$  до второго порядка включительно:

$$V_x = U(z) + yu_1(z) + \frac{y^2}{2}u_2(z). \quad (4)$$

Такая форма разложения является естественным обобщением одномерного профиля и позволяет учесть линейные и квадратичные градиенты скорости вдоль канала. Функции  $U(z)$ ,  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$  являются неизвестными и подлежат определению из уравнений движения и граничных условий. Размерности этих функций следующие:  $[U] = \text{м/с}$ ,  $[u_1] = \text{с}^{-1}$ ,  $[u_2] = \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ , что обеспечивает корректную размерность всех слагаемых в правой части уравнения (4).

Границные условия формулируются на основе физической постановки задачи. На нижней пластине ( $z = 0$ ) предполагается, что жидкость полностью прилипает к неподвижной стенке. Это классическое условие прилипания (*no-slip condition*) означает, что продольная скорость обращается в нуль для любого значения  $y$ . Подстановка  $z = 0$  в (4) и приравнивание нулю коэффициентов при всех степенях  $y$  дает:

$$U(0) = 0, u_1(0) = 0, u_2(0) = 0. \quad (5)$$

На верхней пластине ( $z = h$ ) задается конкретный профиль скорости, который не обязательно соответствует простому условию прилипания. Вместо этого предписываются значения самой скорости и ее первых двух градиентов по  $y$ . Это может моделировать, например, сопряжение с внешним течением, имеющим ненулевые поперечные градиенты, или движение стенки с пространственно изменяющейся скоростью. Математически это выражается в виде:

$$U(h) = W, u_1(h) = A, u_2(h) = B, \quad (6)$$

где  $W$  – характерная скорость (м/с),  $A$  – параметр линейного градиента ( $\text{с}^{-1}$ ),  $B$  – параметр квадратичного градиента ( $\text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ ). В частном случае  $A = 0$ ,  $B = 0$  эти условия сводятся к классическому прилипанию на движущейся стенке со скоростью  $W$ .

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Подстановка предположений (2)–(4) в это уравнение показывает, что  $\partial V_z / \partial z = 0$  (поскольку  $V_z = \text{const}$ ),  $\partial V_y / \partial y = 0$  (поскольку  $V_y = 0$ ), и  $\partial V_x / \partial x = 0$  (поскольку в разложении (4) явная зависимость от  $x$  отсутствует, а  $y$  рассматривается как локальный параметр). Следовательно, уравнение неразрывности выполняется тождественно во всем объеме канала.

Уравнение движения вдоль оси  $x$  для стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье–Стокса без временной производной) записывается как [15, 16]:

$$\rho \left( V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right). \quad (8)$$

## Механика

С учетом предположений (2)–(4) и того, что  $\partial V_x / \partial x = 0$ ,  $V_y = 0$ , уравнение (8) существенно упрощается. Левая часть (инерционные члены) сводится к одному слагаемому:

$$\rho V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = \rho V_w \frac{\partial V_x}{\partial z}, \quad (9)$$

поскольку  $V_x$  зависит от  $z$  только через функции  $U(z)$ ,  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$ . Правая часть уравнения (8) также упрощается: вторая производная по  $x$  равна нулю, а производные по  $y$  и  $z$  легко вычисляются из разложения (4):

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} = u_2(z), \quad \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = U''(z) + y u_1''(z) + \frac{y^2}{2} u_2''(z), \quad (10)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ . Градиент давления задан соотношением (1), поэтому  $-\partial p / \partial x = -G$ .

Подставляя (9) и (10) в (8), получаем:

$$\rho V_w \left( U'(z) + y u_1'(z) + \frac{y^2}{2} u_2'(z) \right) = -G + \mu \left( U'' + y u_1'' + \frac{y^2}{2} u_2'' + u_2 \right). \quad (11)$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любого  $y$ , приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $y$  в левой и правой частях. Приравнивая коэффициенты при  $y^0$ ,  $y^1$  и  $y^2$ , получаем систему из трех независимых обыкновенных дифференциальных уравнений:

при  $y^0$ :

$$\rho V_w U' = -G + \mu(U'' + u_2); \quad (12)$$

при  $y^1$ :

$$\rho V_w u_1' = \mu u_1''; \quad (13)$$

при  $y^2$ :

$$\rho V_w u_2' = \mu u_2''. \quad (14)$$

Эта система, дополненная граничными условиями (5) и (6), полностью определяет искомые функции  $U(z)$ ,  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ . Уравнения (13) и (14) являются линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами и имеют идентичную структуру. Уравнение (12) является линейным неоднородным, причем его правая часть зависит от функции  $u_2(z)$ , которая находится из уравнения (14).

Перейдем к решению системы уравнений (12)–(14) в безразмерной форме [17, 18]. Целью такого перехода является выявление основных физических параметров, определяющих структуру течения, и приведение задачи к универсальному виду, не зависящему от конкретных размерных величин. Для этого вводится набор характерных масштабов, основанных на геометрии канала и кинематических условиях на верхней стенке.

В качестве масштаба длины выбирается расстояние между пластинами  $h$ , в качестве масштаба скорости – величина  $W$ , заданная в граничном условии (6). Масштаб давления естественным образом определяется из вязкого члена в уравнении Навье–Стокса и равен  $\mu W/h$ . На основе этих масштабов вводятся следующие безразмерные переменные:

$$\zeta = \frac{z}{h}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{W}, \quad \tilde{u}_1 = \frac{u_1 h}{W}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2 h^2}{W}. \quad (15)$$

Безразмерная координата  $\zeta$  изменяется в интервале от 0 до 1, что соответствует нижней и верхней пластинам соответственно. Введенные безразмерные функции  $\tilde{U}(\zeta)$ ,  $\tilde{u}_1(\zeta)$ ,  $\tilde{u}_2(\zeta)$  теперь являются величинами порядка единицы, что удобно для численного анализа и физической интерпретации.

Переход к безразмерным переменным в уравнениях (13) и (14) требует замены производных. Поскольку  $d/dz = (1/h)d/d\zeta$ , то  $u_i' = (W/(h^i))\tilde{u}_i'/h = (W/(h^{i+1}))\tilde{u}_i'$  и  $u_i'' = (W/(h^{i+2}))\tilde{u}_i''$ , где штрихи в правой части обозначают дифференцирование по  $\zeta$ . Подстановка этих соотношений в уравнения (13) и (14) и сокращение общих множителей приводит к одинаковой безразмерной форме для обоих уравнений:

$$\tilde{u}_i'' - Re_w \tilde{u}_i' = 0, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

где введено безразмерное число, играющее ключевую роль в задачах с проницаемыми границами. Это число Рейнольдса, основанное на скорости проницаемости:

$$\text{Re}_w = \frac{V_w h}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (17)$$

Здесь  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости ( $\text{m}^2/\text{s}$ ), а  $\text{Re}_w$  физически представляет собой отношение конвективного переноса импульса, обусловленного нормальным потоком через стенки, к диффузионному переносу, обусловленному вязкостью. При  $\text{Re}_w \ll 1$  вязкие силы доминируют, и течение распределено по всему сечению канала. При  $|\text{Re}_w| \gg 1$  конвективный перенос локализует течение в тонких слоях вблизи границ.

Границные условия (5) и (6) в безразмерной форме принимают следующий вид. На нижней стенке ( $\zeta = 0$ ):

$$\tilde{U}(0) = 0, \quad \tilde{u}_1(0) = 0, \quad \tilde{u}_2(0) = 0. \quad (18)$$

На верхней стенке ( $\zeta = 1$ ) вводятся безразмерные параметры, характеризующие заданные градиенты скорости:

$$a = \frac{Ah}{W}, \quad b = \frac{bh^2}{W}, \quad (19)$$

что позволяет записать условия как:

$$\tilde{U}(1) = 1, \quad \tilde{u}_1(1) = a, \quad \tilde{u}_2(1) = b. \quad (20)$$

Параметры  $a$  и  $b$  являются безразмерными и описывают относительную интенсивность линейного и квадратичного градиентов скорости по сравнению с основной скоростью  $W$ .

Рассмотрим теперь решение уравнения (16). Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет корни  $r = 0$  и  $r = \text{Re}_w$ , поэтому общее решение записывается в виде:

$$\tilde{u}_i(\zeta) = C_i + D_i e^{\text{Re}_w \zeta}, \quad (21)$$

где  $C_i$  и  $D_i$  – константы интегрирования, подлежащие определению из граничных условий (18) и (20).

Применяя условие  $\tilde{u}_i(0) = 0$ , получаем:

$$C_i = -D_i. \quad (22)$$

Подстановка этого результата в (21) дает:

$$\tilde{u}_i(\zeta) = D_i (e^{\text{Re}_w \zeta} - 1). \quad (23)$$

Далее, используя условие на верхней стенке  $\tilde{u}_i(1) = K_i$ , где  $K_1 = a$  и  $K_2 = b$ , находим:

$$D_i = \frac{K_i}{e^{\text{Re}_w} - 1}. \quad (24)$$

Окончательно, подставляя (24) в (23), получаем явные выражения для безразмерных профилей:

$$\tilde{u}_1(\zeta) = a \frac{e^{\text{Re}_w \zeta} - 1}{e^{\text{Re}_w} - 1}, \quad (25)$$

$$\tilde{u}_2(\zeta) = b \frac{e^{\text{Re}_w \zeta} - 1}{e^{\text{Re}_w} - 1}, \quad (26)$$

Эти формулы представляют собой точные аналитические решения для коэффициентов разложения продольной скорости. Их структура – экспоненциальная, что является прямым следствием наличия нормального потока через проницаемые границы. В пределе  $\text{Re}_w \rightarrow 0$  с использованием разложения  $e^x \approx 1 + x$  эти выражения переходят в линейные зависимости  $\tilde{u}_i(\zeta) = K_i \zeta$ , что соответствует классическому случаю отсутствия проницаемости. При больших положительных значениях  $\text{Re}_w$  профили становятся резко неоднородными, концентрируясь вблизи верхней стенки.

Для приведения уравнения (12) к безразмерному виду необходимо ввести еще один ключевой безразмерный параметр, характеризующий влияние перепада давления. Из уравнения (12):

$$\rho V_w U' = -G + \mu(U'' + u_2),$$

## Механика

---

выразим все члены через безразмерные переменные (15). Учитывая, что  $U' = (W/h)\tilde{U}'$  и  $U'' = (W/h^2)\tilde{U}''$ , а также подставляя  $u_2 = (W/h^2)\tilde{u}_2$ , получаем после деления всего уравнения на  $\mu W/h^2$ :

$$\frac{\rho V_w h}{\mu} \tilde{U}' = -\frac{Gh^2}{\mu W} + \tilde{U}'' + \tilde{u}_2.$$

Первый коэффициент в левой части является числом  $\text{Re}_w$ , определенным в (17). Второй коэффициент в правой части – это безразмерный градиент давления, который удобно определить со знаком «минус», чтобы положительное значение параметра соответствовало движению, вызванному падением давления вдоль течения. Таким образом, вводим:

$$S = \frac{h^2}{\mu W} (-G). \quad (27)$$

Этот параметр  $S$  является безразмерным и может принимать любые вещественные значения. При  $G < 0$  (давление падает вдоль  $x$ ) имеем  $S > 0$ ; при  $G > 0$  (давление растет) –  $S < 0$ ; при отсутствии градиента давления ( $G = 0$ ) –  $S = 0$ . С учетом этого определения безразмерная форма уравнения (12) принимает окончательный вид:

$$\tilde{U}'' - \text{Re}_w \tilde{U}' = -S - \tilde{u}_2(\zeta). \quad (28)$$

Правая часть этого уравнения полностью определена, поскольку функция  $\tilde{u}_2(\zeta)$  уже найдена и задается формулой (26). Для упрощения записи введем вспомогательную константу:

$$C = \frac{b}{e^{\text{Re}_w} - 1}, \quad (29)$$

что позволяет переписать (26) в компактной форме:

$$\tilde{u}_2(\zeta) = C(e^{\text{Re}_w \zeta} - 1). \quad (30)$$

Подстановка (30) в правую часть уравнения (28) дает:

$$-S - \tilde{u}_2(\zeta) = -S - Ce^{\text{Re}_w \zeta} + C = -(S - C) - Ce^{\text{Re}_w \zeta}. \quad (31)$$

Таким образом, уравнение (28) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью, состоящей из константы и экспоненциальной функции. Его общее решение строится как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

Однородное уравнение, соответствующее (28), имеет вид  $\tilde{U}'' - \text{Re}_w \tilde{U}' = 0$  и, как и ранее, имеет общее решение:

$$\tilde{U}_h(\zeta) = D_1 + D_2 e^{\text{Re}_w \zeta}, \quad (32)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  – новые константы интегрирования.

Для нахождения частного решения  $\tilde{U}_p(\zeta)$  воспользуемся методом неопределенных коэффициентов [19]. Правая часть (31) состоит из двух слагаемых: константы –  $(S - C)$  и экспоненты  $-Ce^{\text{Re}_w \zeta}$ . Для константного слагаемого частное решение ищем в виде линейной функции  $\alpha\zeta$ , поскольку константа является решением однородного уравнения (корень  $r = 0$ ). Подстановка  $\alpha\zeta$  в левую часть (28) дает  $-\text{Re}_w \alpha$ , что должно равняться  $-(S - C)$ . Отсюда:

$$\alpha = \frac{S - C}{\text{Re}_w}. \quad (33)$$

Для экспоненциального слагаемого  $-Ce^{\text{Re}_w \zeta}$  стандартный анзац  $\beta e^{\text{Re}_w \zeta}$  не подходит, так как  $e^{\text{Re}_w \zeta}$  также является решением однородного уравнения (корень  $r = \text{Re}_w$ ). В этом случае частное решение следует искать в виде  $\beta\zeta e^{\text{Re}_w \zeta}$ . Вычислим его производные:

$$\frac{d}{d\zeta} (\beta\zeta e^{\text{Re}_w \zeta}) = \beta e^{\text{Re}_w \zeta} + \beta \text{Re}_w \zeta e^{\text{Re}_w \zeta},$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}(\beta\zeta e^{\text{Re}_w \zeta}) = 2\beta \text{Re}_w e^{\text{Re}_w \zeta} + \beta \text{Re}_w^2 \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}.$$

Подстановка в левую часть (28):

$$[2\beta \text{Re}_w e^{\text{Re}_w \zeta} + \beta \text{Re}_w^2 \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}] - \text{Re}_w [\beta e^{\text{Re}_w \zeta} + \beta \text{Re}_w \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}] = \beta \text{Re}_w e^{\text{Re}_w \zeta}.$$

Это должно равняться  $-Ce^{\text{Re}_w \zeta}$ , откуда:

$$\beta \text{Re}_w = -C, \quad \beta = -\frac{C}{\text{Re}_w}. \quad (34)$$

Собирая оба вклада, получаем частное решение:

$$\tilde{U}_p(\zeta) = \frac{S-C}{\text{Re}_w} \zeta - \frac{C}{\text{Re}_w} \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}. \quad (35)$$

Полное общее решение уравнения (28) есть сумма (32) и (35):

$$\tilde{U}(\zeta) = D_1 + D_2 e^{\text{Re}_w \zeta} + \frac{S-C}{\text{Re}_w} \zeta - \frac{C}{\text{Re}_w} \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}. \quad (36)$$

Теперь необходимо определить константы  $D_1$  и  $D_2$  из граничных условий (18) и (20) для функции  $\tilde{U}$ . Первое условие  $\tilde{U}(0) = 0$  дает:

$$D_1 = -D_2. \quad (37)$$

Подставим это соотношение в (36):

$$\tilde{U}(\zeta) = D_2(e^{\text{Re}_w \zeta} - 1) + \frac{S-C}{\text{Re}_w} \zeta - \frac{C}{\text{Re}_w} \zeta e^{\text{Re}_w \zeta}. \quad (38)$$

Второе граничное условие  $\tilde{U}(1) = 1$  приводит к уравнению:

$$1 = D_2(e^{\text{Re}_w} - 1) + \frac{S-C}{\text{Re}_w} - \frac{C}{\text{Re}_w} e^{\text{Re}_w}. \quad (39)$$

Решая это уравнение относительно  $D_2$ , получаем:

$$D_2 = \frac{1 - \frac{S-C}{\text{Re}_w} + \frac{C}{\text{Re}_w} e^{\text{Re}_w}}{e^{\text{Re}_w} - 1} = \frac{1 + \frac{S}{\text{Re}_w} + \frac{C}{\text{Re}_w} (e^{\text{Re}_w} - 1)}{e^{\text{Re}_w} - 1}. \quad (40)$$

Вспоминая определение константы  $C$  из (29), замечаем, что  $C(e^{\text{Re}_w} - 1) = b$ . Это позволяет существенно упростить выражение (40):

$$D_2 = \frac{1 + \frac{S}{\text{Re}_w} + \frac{b}{\text{Re}_w}}{e^{\text{Re}_w} - 1} = \frac{1 + \frac{S+b}{\text{Re}_w}}{e^{\text{Re}_w} - 1}. \quad (41)$$

Соответственно, из (37):

$$D_1 = \frac{1 + \frac{S+b}{\text{Re}_w}}{e^{\text{Re}_w} - 1}. \quad (42)$$

Таким образом, функция  $\tilde{U}(\zeta)$  полностью определена формулами (36), (41) и (42). В совокупности с (25) и (26) это завершает построение полного аналитического решения задачи в безразмерной форме.

Проведем анализ полученного решения в предельных случаях. Начнем с предела малых чисел Рейнольдса,  $\text{Re}_w \rightarrow 0$ , который соответствует ситуации слабой проницаемости или высокой вязкости [20, 21]. В этом случае все экспоненциальные функции раскладываются в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} e^{\text{Re}_w \zeta} &= 1 + \text{Re}_w \zeta + \frac{(\text{Re}_w \zeta)^2}{2} + \frac{(\text{Re}_w \zeta)^3}{6} + O(\text{Re}_w^4), \\ e^{\text{Re}_w} - 1 &= \text{Re}_w + \frac{\text{Re}_w^2}{2} + \frac{\text{Re}_w^3}{6} + O(\text{Re}_w^4). \end{aligned}$$

## Механика

---

Подстановка этих разложений в (25) и (26) с точностью до первого порядка по  $\text{Re}_w$  дает:

$$\tilde{u}_1(\zeta) = a \left[ \zeta + \frac{\text{Re}_w}{2} (\zeta^2 - \zeta) + O(\text{Re}_w^2) \right], \quad (43)$$

$$\tilde{u}_2(\zeta) = b \left[ \zeta + \frac{\text{Re}_w}{2} (\zeta^2 - \zeta) + O(\text{Re}_w^2) \right]. \quad (44)$$

Для основного профиля  $\tilde{U}(\zeta)$  в пределе  $\text{Re}_w \rightarrow 0$  уравнение (28) переходит в уравнение Пуазейля с дополнительным источником:

$$\tilde{U}_0''(\zeta) = -S - b\zeta. \quad (45)$$

Двукратное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий  $\tilde{U}_0(0) = 0$ ,  $\tilde{U}_0(1) = 1$  приводит к полиномиальному решению третьей степени:

$$\tilde{U}_0(\zeta) = \left( 1 + \frac{S}{2} + \frac{b}{2} \right) \zeta - \frac{S}{2} \zeta^2 - \frac{b}{6} \zeta^3. \quad (46)$$

Этот результат полностью согласуется с классической теорией течения Куттга–Пуазейля, обобщенной на случай квадратичной неоднородности на верхней стенке.

Теперь рассмотрим противоположный предел больших положительных чисел Рейнольдса [22, 23],  $\text{Re}_w \rightarrow +\infty$ , который описывает режим сильной инжекции. В этом случае  $e^{\text{Re}_w} \gg 1$ , и для  $\zeta < 1$  справедливо приближение:

$$\frac{e^{\text{Re}_w \zeta} - 1}{e^{\text{Re}_w} - 1} \approx \frac{e^{\text{Re}_w \zeta}}{e^{\text{Re}_w}} = e^{-\text{Re}_w(1-\zeta)}. \quad (47)$$

Следовательно, профили (25) и (26) приобретают вид:

$$\tilde{u}_1(\zeta) \approx ae^{-\text{Re}_w(1-\zeta)}, \quad \tilde{u}_2(\zeta) = be^{-\text{Re}_w(1-\zeta)}. \quad (48)$$

Эти функции экспоненциально малы во всем объеме канала, за исключением тонкой области вблизи верхней стенки, где  $1-\zeta = O(1/\text{Re}_w)$ . Аналогичное поведение демонстрирует и профиль  $\tilde{U}(\zeta)$ , который стремится к нулю при  $\zeta < 1$  и быстро нарастает до единицы вблизи  $\zeta = 1$ .

Характерная толщина области, в которой происходит этот резкий переход, определяется из условия, что аргумент экспоненты в (47) имеет порядок единицы:

$$\text{Re}_w(1-\zeta) = O(1). \quad (49)$$

Переходя к размерным переменным с помощью  $\zeta = z/h$ , получаем:

$$\text{Re}_w \frac{h-z}{h} = O(1), \quad h-z = O\left(\frac{h}{\text{Re}_w}\right). \quad (50)$$

Таким образом, толщина пограничного слоя у верхней стенки оценивается как:

$$\delta \sim \frac{h}{\text{Re}_w}. \quad (51)$$

Эта оценка является прямым следствием структуры точного аналитического решения и не требует дополнительных гипотез. Она справедлива при  $\text{Re}_w \gg 1$  и описывает локализацию течения в тонком слое у верхней пластины в случае инжекции ( $V_w > 0$ ). В случае отсоса ( $V_w < 0$ ,  $\text{Re}_w \rightarrow -\infty$ ) аналогичный пограничный слой формируется у нижней стенки, и его толщина также оценивается как  $\delta \sim h/|\text{Re}_w|$ .

Полученное решение является строгим аналитическим результатом для поставленной краевой задачи с учетом постоянного градиента давления произвольного знака, проницаемости границ и неоднородных кинематических условий на верхней стенке. Оно применимо для анализа течений в каналах с проницаемыми поверхностями, возникающими в задачах фильтрации, теплообмена и микрофлюидики.

### Методика численного моделирования

Численное моделирование выполнено на основе полученного аналитического решения [24, 25]. Для верификации решения и визуализации пространственной структуры течения проведены расчеты для трех реальных ньютоновских жидкостей: воды, глицерина и этиленгликоля при температуре 20 °C. Физические свойства жидкостей (плотность  $\rho$  и динамическая вязкость  $\mu$ ) взяты из справочных данных.

Геометрические и кинематические параметры задачи зафиксированы следующим образом: расстояние между пластинами  $h = 10$  мм, скорость верхней стенки  $W = 0,5$  см/с, параметры градиента скорости  $A = 0,1$  с<sup>-1</sup> и  $B = 0,002$  м<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>, скорость проницаемости  $V_w = 0,2$  см/с (инжекция), градиент давления  $G = -5$  Па/м.

Расчетная область дискретизирована с использованием неравномерной сетки по координате  $z$ , сгущенной вблизи верхней стенки ( $z = h$ ) для точного разрешения тонкого пограничного слоя при больших значениях  $Re_w$ . По координате  $y$  использована равномерная сетка на интервале  $[-10, 10]$  см. Для каждой жидкости вычисляются безразмерные параметры  $Re = Wh/v$ ,  $Re_w = V_w h/v$ ,  $a = Ah/W$ ,  $b = Bh^2/W$  и  $S = h^2(-G)/(\mu W)$ .

Поле продольной скорости  $V_x(y, z)$  вычисляется по формуле (4) с подстановкой аналитических выражений для  $U(z)$ ,  $u_1(z)$  и  $u_2(z)$ . На основе этого поля численно определяются производные  $\partial V_x/\partial z$  и  $\partial V_x/\partial y$  с использованием центральных разностей второго порядка точности, что позволяет рассчитать поля завихренности и напряжений сдвига. Все вычисления выполнены в среде MATLAB R2023b с двойной точностью. Для предотвращения численной неустойчивости при  $|Re_w| < 10^{-12}$  используется предельный полиномиальный вариант решения (46) [26].

### Результаты и их обсуждение

Для верификации полученного аналитического решения и исследования влияния физических свойств жидкости на структуру течения был проведен расчетный эксперимент. Результаты демонстрируют качественно различное поведение течения в зависимости от соотношения между вязкостью жидкости и интенсивностью проницаемости.

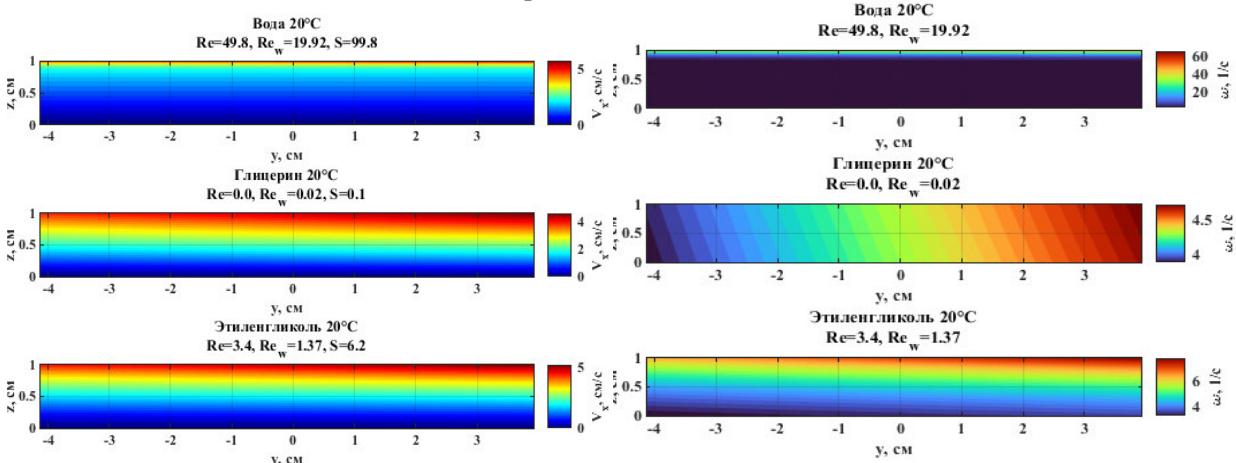


Рис. 2. Поля продольной компоненты скорости  $V_x$  для различных жидкостей

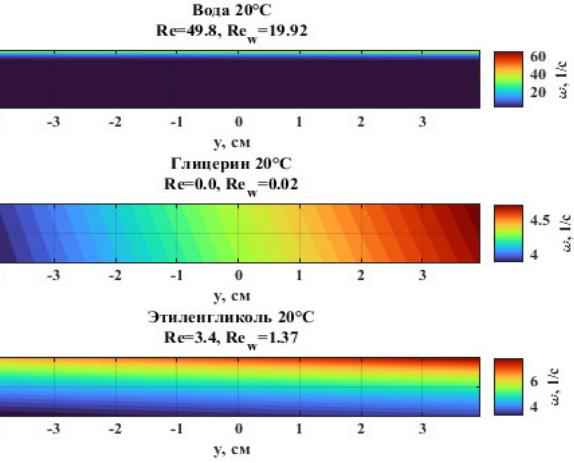


Рис. 3. Поля завихренности  $\omega$  для различных жидкостей

На рис. 2 представлены поля продольной компоненты скорости  $V_x$  для всех трех жидкостей. Несмотря на идентичные граничные условия и геометрию, профили существенно различаются. Вода, обладающая наименьшей вязкостью, демонстрирует наиболее выраженную неоднородность вблизи верхней стенки, что является следствием высокого значения  $Re_w = 19,92$ . Напротив, глицерин с его высокой вязкостью ( $\mu = 1,49$  Па·с) характеризуется почти линейным профилем скорости по всему сечению канала ( $Re_w = 0,027$ ), что указывает на доминирование вязких сил. Этиленгликоль занимает промежуточное положение. Полученные результаты находятся в качественном соответствии с выводами асимптотического анализа.

Структура течения более полно раскрывается при анализе поля завихренности  $\omega = \partial V_x / \partial z$ , представленного на рис. 3. Для воды наблюдается резкий пик завихренности в тонком слое у

## Механика

верхней стенки, что подтверждает наличие конвективно-доминированного пограничного слоя. У глицерина распределение завихренности практически однородно, что типично для течений, управляемых вязкостью. Этиленгликоль вновь демонстрирует переходный характер. Сравнение этих полей с профилями скорости позволяет сделать вывод о том, что именно градиент скорости, а не ее абсолютное значение, определяет локальную динамику вязкого трения.

Этот вывод подтверждается и распределением напряжений сдвига  $\tau = \mu \partial V_x / \partial z$ , показанным на рис. 4. Несмотря на то, что градиент скорости у воды максимален, ее низкая вязкость приводит к умеренным напряжениям. В то же время, глицерин, несмотря на малый градиент скорости, создает значительно более высокие напряжения сдвига из-за своей высокой вязкости. Это подчеркивает важность комплексного учета обоих факторов: как кинематики течения, так и реологических свойств жидкости – при оценке сил трения в каналах с проницаемыми стенками.

Полная картина течения, включающая вклад нормальной компоненты скорости  $V_z = V_w$ , отражена в модулях полной скорости  $|\vec{V}|$ , изображенных на рис. 5. Видно, что для всех жидкостей

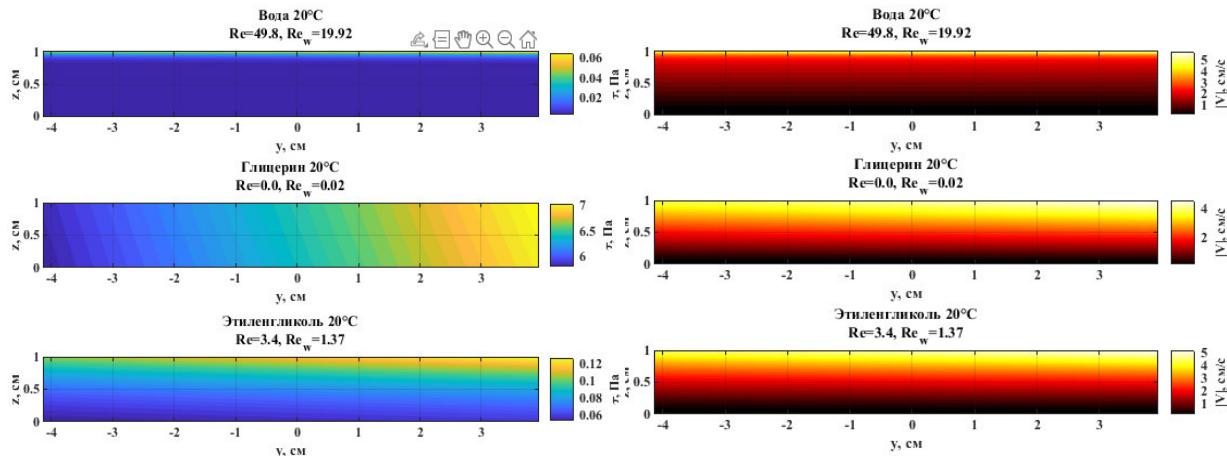


Рис. 4. Поля напряжений сдвига  $\tau$  для различных жидкостей

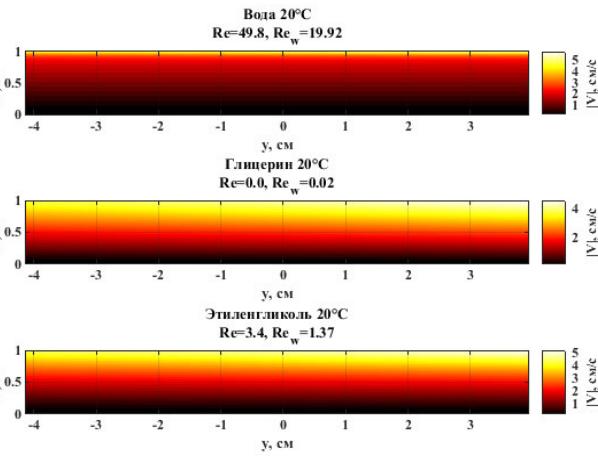


Рис. 5. Поля модулей полной скорости  $|V|$  для различных жидкостей

нормальная компонента вносит заметный вклад, особенно в области, удаленной от верхней стенки. Для воды, где продольная скорость в ядре канала мала, модуль полной скорости определяется в основном проницаемостью, что приводит к почти однородному полю. Для глицерина, напротив, высокая продольная скорость в центре канала доминирует над нормальной компонентой. Это демонстрирует сложное взаимодействие между движением стенки, градиентом давления и проницаемостью.

Для количественного сравнения профилей на рис. 6 приведены зависимости продольной скорости  $V_x$  от координаты  $z$  в центральном сечении канала ( $y = 0$ ). Четко видна тенденция: с увеличением числа Рейнольдса  $Re$  профиль становится все более «наполненным», стремясь к равномерному распределению. Глицерин ( $Re = 0,034$ ) имеет почти треугольный профиль, характерный для чистого течения Куттга, в то время как вода ( $Re = 49,8$ ) демонстрирует почти плоский профиль в ядре потока с резким падением до нуля у нижней стенки. Этот переход от вязко-доминированного к конвективно-доминированному режиму является основной особенностью исследуемой задачи.

Обобщенная картина режимов течения представлена на карте режимов на рис. 7, где по осям отложены числа Рейнольдса  $Re$  и  $Re_w$  [29, 30]. Жидкости маркированы в соответствии с их физическими свойствами. Карта наглядно демонстрирует, что глицерин находится в области ламинарного, диффузионно-доминированного течения, в то время как вода расположена в зоне лами-

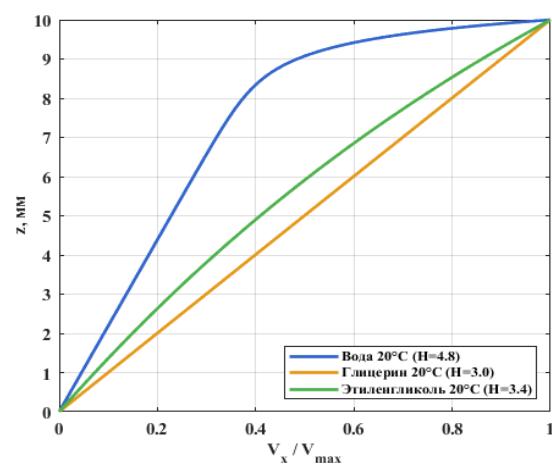


Рис. 6. Профили продольной скорости  $V_x$  ( $y = 0$ ) для различных жидкостей

нарного, но конвективно-доминированного режима. Эта визуализация подтверждает, что для полного описания течения в каналах с проницаемыми стенками недостаточно одного числа Рейнольдса; необходимо учитывать и число  $Re_w$ , характеризующее интенсивность проницаемости.

Для более глубокого анализа структуры пограничного слоя были рассчитаны его интегральные характеристики: толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина импульса  $\theta$ . На рис. 8, а) (слева) показаны нормированные профили скорости, а на рис. 8, б) (справа) – соответствующие интегральные толщины. Форма профиля для глицерина близка к линейной, что дает высокое значение формы  $H = \delta^*/\theta \approx 2,5$ , характерное для ламинарных течений с малым градиентом давления. Профиль для воды значительно более «наполненный», что приводит к снижению  $H$  до значения около 1,2, что типично для течений с благоприятным градиентом давления или сильной инжекцией.

Особое внимание было удалено верификации асимптотической оценки толщины пограничного слоя  $\delta \sim h/Re_w$ . На рис. 9 представлена результаты специализированного анализа для воды

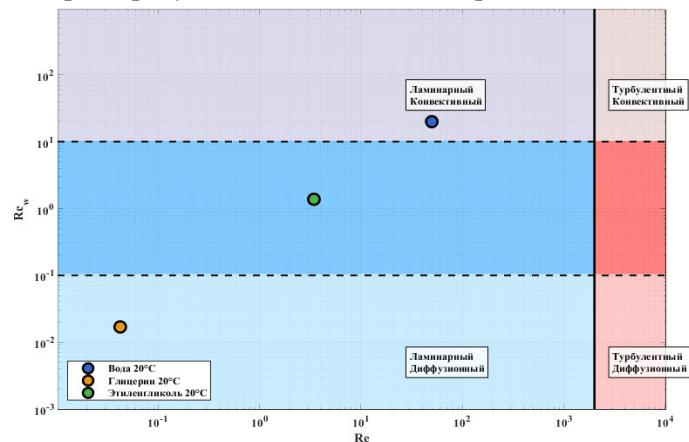
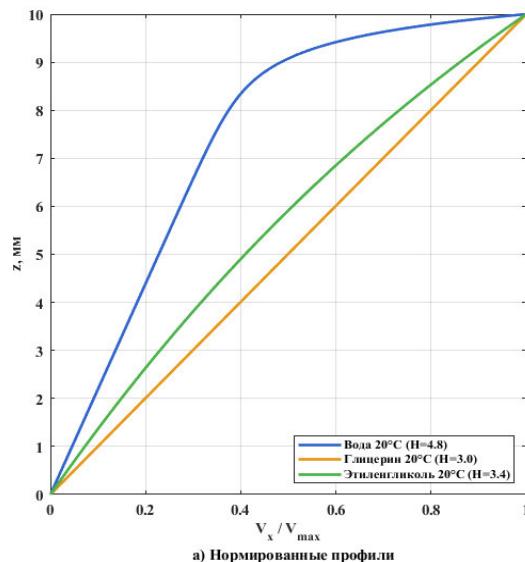
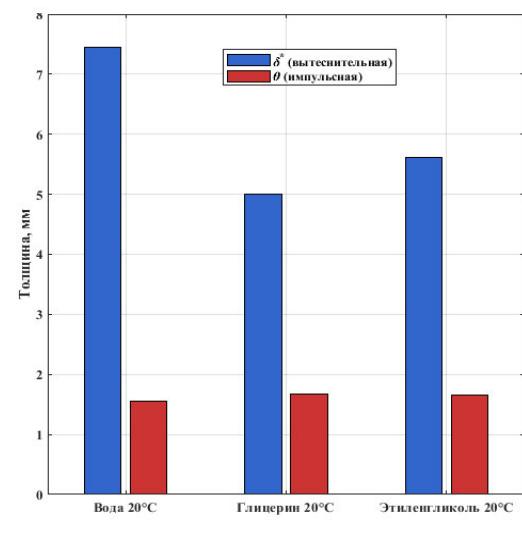


Рис. 7. Карта режимов течения в координатах  $Re$  и  $Re_w$



а) Нормированные профили



б) Интегральные толщины ПС

Рис. 8. Нормированные профили скорости и интегральные толщины пограничного слоя для различных жидкостей

при различных значениях  $Re_w$ . На рис. 9, а видно, как с ростом  $Re_w$  профиль скорости все более локализуется вблизи верхней стенки. Рис. 9, б показывает, что численно определенная толщина слоя  $\delta_9$  (расстояние, на котором скорость достигает 99 % своего максимума) с высокой точностью следует асимптотической зависимости  $\delta = 1/Re_w$ . Рис. 9, в демонстрирует, что относительная ошибка этой оценки стремится к нулю при  $Re_w \rightarrow \infty$ , что является прямым подтверждением корректности проведенного асимптотического анализа.

Таким образом, проведенный численный эксперимент полностью подтверждает все ключевые положения аналитического решения [27, 28]. Полученные результаты демонстрируют, что структура течения в каналах с проницаемыми стенками определяется не только вязкостью и скоростью движения границ, но и интенсивностью нормального потока, которая контролирует локализацию течения. Введение числа Рейнольдса  $Re_w$ , основанного на скорости проницаемости, оказывается необходимым для описания перехода от диффузионного к конвективному режиму. Эти выводы имеют важное значение для прикладных задач в области микрофлюидики, фильтрации и

## Механика

тепломассообмена, где управление течением через проницаемые поверхности является ключевым технологическим приемом.

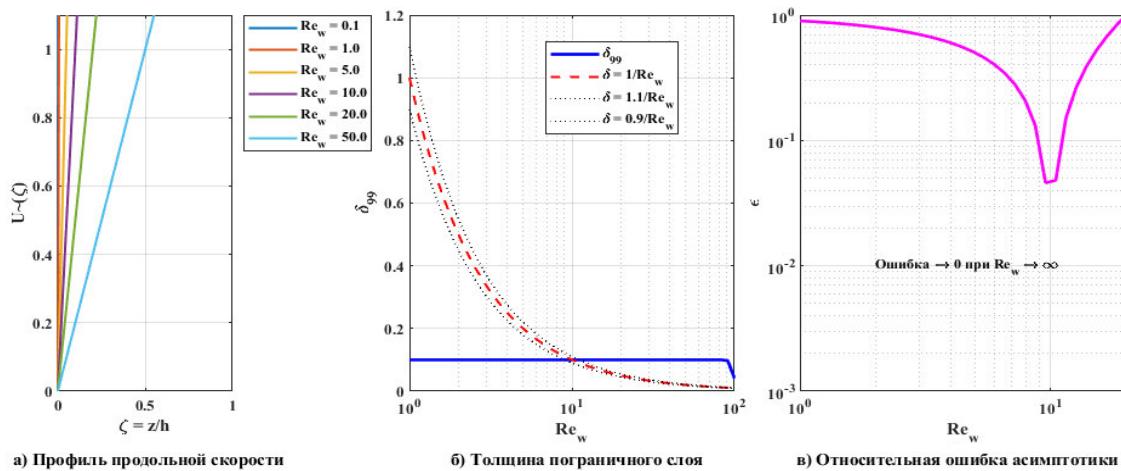


Рис. 9. Анализ пограничного слоя для воды: профили скорости, толщина слоя и относительная ошибка асимптотики

## Заключение

В настоящей работе предложена и исследована модель установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с проницаемыми стенками, учитывающая одновременное влияние движения границ, нормального сквозного потока и постоянного градиента давления. В отличие от классических постановок, на верхней границе задан не только профиль скорости, но и его первые два пространственных градиента, что позволяет описывать более широкий класс практических течений, включая сопряжение с внешними потоками или локальные неоднородности.

Аналитическое решение задачи получено в замкнутой форме и выражено через три безразмерных параметра: число Рейнольдса  $Re$ , число Рейнольдса на основе скорости проницаемости  $Re_w$  и безразмерный градиент давления  $S$ . Такая параметризация позволяет единообразно описывать как вязко-доминированные, так и конвективно-доминированные режимы. Особое внимание уделено асимптотическому поведению решения: в пределе слабой проницаемости восстанавливается полиномиальный профиль, характерный для обобщенного течения Куэтта–Пуазеляя, тогда как при сильной инжекции течение локализуется в тонком пограничном слое у верхней стени.

На основе структуры точного решения строго выведена оценка толщины этого слоя, пропорциональная  $h/Re_w$ , что подтверждено численным анализом для реальных жидкостей. Полученные результаты демонстрируют, что для адекватного описания течений в каналах с проницаемыми поверхностями недостаточно традиционного числа Рейнольдса; необходимо дополнительно учитывать интенсивность нормального потока через параметр  $Re_w$ . Данная модель может служить теоретической основой для проектирования и оптимизации технических систем, где управление течением осуществляется именно через проницаемые границы.

## Литература

1. Couette, M. Études sur le Frottement des Liquids / M. Couette // Ann. Chim. Phys., 1890, Vol. 21, P. 433–510.
2. Stokes, G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums / G.G. Stokes // Camb. Philo. Trans. – Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John W. Parker, 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.
3. Berman A.S. Laminar Flow in Channels with Porous Walls / A.S. Berman // J. Appl. Phys. – 1953. – Vol. 24, Iss. 9. – P. 1232–1235.

4. Yuan, S.W. Further Investigation of Laminar Flow in Channels with Porous Walls / S.W. Yuan // *J. Appl. Phys.* – 1956. – Vol. 27, Iss. 3. – P. 267–269.
5. Yuan, S.W. Laminar Pipe Flow with Injection and Suction through Porous Wall / S.W. Yuan, A.B. Finkelstein // *Trans. ASME*. – 1956. – Vol. 78, Iss. 4. – P. 719–724.
6. Sellars, J.R. Laminar Flow in Channels with Porous walls at High Suction Reynolds Numbers / J.R. Sellars // *J. Appl. Phys.* – 1955. – Vol. 26, Iss. 4. – P. 489–490.
7. Регирер, С.А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками / С.А. Регирер // *Изв. вузов. Матем.* – 1962. – № 5. – С. 65–74.
8. Wang, C.Y. Exact Solutions of the Steady-State Navier–Stokes Equations / C.Y. Wang // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177.
9. Аристов, С.Н. Неоднородные течения Куэтта / С.Н. Аристов, Е.Ю. Просвиряков // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10, Вып. 2. – С. 177–182.
10. Горулева, Л.С. Неоднородное сдвиговое течение Куэтта–Пуазеля при движении нижней границы горизонтального слоя / Л.С. Горулева, Е.Ю. Просвиряков // *Химическая физика и мезоскопия*. – 2021. – Т. 23, № 4. – С. 403–411.
11. Горулева, Л.С. Однонаправленное установившееся неоднородное течение типа Куэтта с квадратичным профилем скорости по горизонтальной координате / Л.С. Горулева, Е.Ю. Просвиряков // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60.
12. Горулева, Л.С. Точные решения уравнений Навье–Стокса для описания неоднородных изобарических вертикально завихренных течений жидкости в областях с проницаемыми границами / Л.С. Горулева, Е.Ю. Просвиряков // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53.
13. Drazin, P.G., Riley N. The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. – 208 p.
14. Пухначев, В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса / В.В. Пухначев // Успехи механики. – 2006. – Т. 4, № 1. – С. 6–76.
15. Wang C.Y. Exact Solutions of the Unsteady Navier–Stokes Equations / C.Y. Wang // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42, Iss. 11S. – P. S269–S282.
16. Полянин, А.Д. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики / А.Д. Полянин, А.И. Журов. – М.: ИПМех РАН, 2020. – 384 с.
17. Аристов, С.Н. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных / С.Н. Аристов, Д.В. Князев, А.Д. Полянин // *Теоретические Основы Химической Технологии*. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547–566.
18. Aristov, S.N. Viscous Flow between Two Moving Parallel Disks. Exact Solutions and Stability Analysis / S.N. Aristov, I.M. Gitman // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 464. – P. 209–215.
19. Zubarev, N.M. Exact Solutions for Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of a Viscous Incompressible Fluid / N.M. Zubarev, E.Y. Prosviryakov // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2019. – Vol. 60, no. 6. – P. 1031–1037.
20. Privalova, V.V. Nonlinear Gradient Flow of a Vertical Vortex Fluid in a Thin Layer / V.V. Privalova, E.Yu. Prosviryakov, M.A. Simonov // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* – 2019. – Vol. 15, Iss. 3. – P. 271–283.
21. Привалова, В.В. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами / В.В. Привалова, Е.Ю. Просвиряков // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 230–242.
22. Burmasheva, N.V. Exact Solutions to Navier–Stokes Equations Describing a Gradient Nonuniform Unidirectional Vertical Vortex Fluid Flow / N.V. Burmasheva, E.Yu. Prosviryakov // *Dynamics*. – 2022. – Vol. 2, Iss. 2. – P. 175–186.
23. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier-Stokes equations / S.V. Ershkov, E.Yu. Prosviryakov, N.V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53, no. 4. – P. 044501.
24. Губарева, К.В. Численное решение задачи теплопроводности в пористой пластине с топологией трижды периодических минимальных поверхностей / К.В. Губарева, А.В. Еремин // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. – 2025. – Т. 25, № 1. – С. 23–31.

## Механика

---

25. Губарева, К.В. Исследование процесса теплопереноса в пористой среде со структурой ТПМП Фишера – Кхоза S / К.В. Губарева, А.В. Еремин // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. – 2024. – no. 4. – P. 70–82.
26. Mohammad, M. An Advanced Algorithm for Solving Incompressible Fluid Dynamics: from Navier–Stokes to Poisson Equations / M. Mohammad, A. Trunov // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2025. – Vol. 234. – P. 2191–2208.
27. Shankar, B.M. Stability of Plane Poiseuille and Couette Flows of Navier–Stokes–Voigt Fluid / B.M. Shankar, I.S. Shivakumara // Acta Mechanica. – 2023. – Vol. 234. – P. 4589–4609.
28. Transient Dispersion of a Reactive Solute in an Oscillatory Couette Flow through an Anisotropic Porous Medium / D Das., K. Mondal, N. Poddar, P. Wang // Phys. Fluids. – 2024. – Vol. 36. – P. 023610.
29. Málek, J. On Determining Navier's Slip Parameter at a Solid Boundary in Flows of a Navier–Stokes Fluid / J. Málek, K. Rajagopal // Phys. Fluids. – 2024. – Vol. 36. – P. 017114.
30. Bogoyavlenskij, O. The New Effect of Oscillations of the Total Angular Momentum Vector of Viscous Fluid / O. Bogoyavlenskij // Phys. Fluids. – 2022. – Vol. 34. – P. 083108.

*Поступила в редакцию 4 ноября 2025 г.*

### Сведения об авторах

Губарева Кристина Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры промышленной теплоэнергетики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: r.kristina2017@mail.ru.

Просвиряков Евгений Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных технологий и систем управления ИРИТ-РтФ, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, заведующий сектором, главный научный сотрудник, Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация, e-mail: evgen\_pros@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Еремин Антон Владимирович – доктор технических наук, доцент, проректор по научной работе, заведующий кафедрой «Промышленная теплоэнергетика» Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: a.v.eremin@list.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”  
2026, vol. 18, no. 1, pp. 47–62*

---

DOI: 10.14529/mmp260106

### EXACT QUADRATIC POLYNOMIAL SOLUTION FOR DESCRIBING INHOMOGENEOUS COUETTE–POISEUILLE FLOW IN AN INFINITE HORIZONTAL LAYER WITH PERMEABLE BOUNDARIES

**K.V. Gubareva<sup>1</sup>, E.Yu. Prosviryakov<sup>2,3</sup>, A.V. Eremin<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

<sup>2</sup> Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

<sup>3</sup> Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg,

Russian Federation

E-mail: r.kristina2017@mail.ru

**Abstract.** The paper investigates steady flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel with permeable parallel walls. In contrast to classical formulations, not only the velocity value but also its first two spatial gradients are specified at the upper boundary. This approach enables modeling flows with local inhomogeneity along the channel. The lower wall is stationary and satisfies the no-slip condition. A constant pressure gradient of arbitrary sign and a uniform normal flow through both boundaries are taken into account. The problem is solved analytically in dimensionless form, where the Reynolds number, the permeability-based Reynolds number, and the dimensionless pressure gradient play the de-

termining role. Asymptotic analysis is carried out for the limiting cases of weak and strong permeability. Based on the structure of the exact solution, an estimate for the boundary layer thickness under injection is derived. The results are verified by numerical simulations for real fluids and demonstrate the transition from a viscosity-dominated to a convection-dominated flow regime.

**Keywords:** Couette–Poiseuille flow; permeable boundaries, analytical solution; Reynolds number; boundary layer; pressure gradient, normal flow; inhomogeneous boundary conditions.

### References

1. Couette M. Études sur le Frottement des Liquids. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, Vol. 21, pp. 433–510.
2. Stokes G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums. *Camb. Philo. Trans.*, Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John W. Parker, 1851, Vol. 9, pp. 8–106.
3. Berman A.S. Laminar Flow in Channels with Porous Walls. *J. Appl. Phys.*, 1953, Vol. 24, Iss. 9, pp. 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476
4. Yuan S.W. Further Investigation of Laminar Flow in Channels with Porous Walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, Vol. 27, Iss. 3, pp. 267–269. DOI: 10.1063/1.1722355.
5. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar Pipe Flow with Injection and Suction through Porous Wall. *Trans. ASME*, 1956, Vol. 78, Iss. 4, pp. 719–724. DOI: 10.1115/1.4013794
6. Sellars J.R. Laminar Flow in Channels with Porous Walls at high Suction Reynolds Numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, Vol. 26, Iss. 4, pp. 489–490. DOI: 10.1063/1.1722024
7. Regirer S.A. O priblizhennoy teorii techeniya vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti v trubakh s poristymi stenkami (An Approximate Theory of the Flow of a Viscous Incompressible Fluid in Pipes with Porous Walls). *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1962, no. 5, pp. 65–74. (in Russ.).
8. Wang C.Y. Exact Solutions of the Steady-State Navier–Stokes Equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, Vol. 23, pp. 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
9. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Inhomogeneous Couette flow, Rus. *J. Nonlin. Dyn.*, 2014, Vol. 10, no. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004
10. Goruleva L.S. Prosviryakov E.Yu. The Couette Poiseuille Inhomogeneous Shear Flow with the Motion of the Lower Boundary of the Horizontal Layer. *Chemical Physics and Mesoscopy*, 2021, Vol. 23, no. 4, pp. 403–411. DOI: 10.15350/17270529.2021.4.36.
11. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Unidirectional Steady-State Inhomogeneous Couette Flow with a Quadratic Velocity Profile Along a Horizontal Coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2022, Iss. 3, pp. 47–60. (in Russ.). DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060.
12. Goruleva L.S., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to the Navier–stokes Equations for Describing Inhomogeneous Isobaric Vertical Vortex Fluid Flows in Regions with Permeable Boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, Iss. 1, pp. 41–53. (in Russ.). DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053.
13. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006, 208 p. DOI: 10.1017/CBO9780511526459
14. Pukhnachev V.V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'e–Stoksa (Symmetries in the Navier–Stokes Equations). *Uspekhi mehaniki*, 2006, Vol. 4, no. 1, pp. 6–76. (in Russ.).
15. Wang C.Y. Exact Solutions of the Unsteady Navier–Stokes Equations. *Appl. Mech. Rev.*, 1989, Vol. 42, Iss. 11S, pp. S269–S282. DOI: 10.1115/1.3152400.
16. Polyanin A.D., Zhyrov A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* (Methods of Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mathematical Physics). Moscow, IPMekh RAN Publ., 2020, 384 p. (in Russ.).
17. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations with the Linear Dependence of Velocity Components on Two Space Variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, Vol. 43, no. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
18. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous Flow between Two Moving Parallel Disks. Exact Solutions and Stability Analysis. *J. Fluid Mech.*, 2002, Vol. 464, pp. 209–215. DOI: 10.1017/S0022112002001003.
19. Zubarev N.M., Prosviryakov E.Y. Exact Solutions for Layered Three-Dimensional Nonstationary Isobaric Flows of a Viscous Incompressible Fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, Vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.

## Механика

---

20. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear Gradient Flow of a Vertical Vortex Fluid in a Thin Layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, Vol. 15, Iss. 3, pp. 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
21. Privalova V.V., Prosviryakov E.Y. Nonlinear Isobaric Flow of a Viscous Incompressible Fluid in a Thin Layer with Permeable Boundaries. *Computational Continuum Mechanics*, 2019, Vol. 12, Iss. 2, pp. 230–242. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20
22. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to Navier–Stokes Equations Describing a Gradient Nonuniform Unidirectional Vertical Vortex Fluid Flow. *Dynamics*, 2022, Vol. 2, Iss. 2, pp. 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
23. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Yu., Burmasheva N.V., Christianto V. Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, Vol. 53, no. 4, 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0
24. Gubareva K.V., Eremin A.V. Numerical Solution to the Problem of Thermal Conductivity in a Porous Plate with a Topology of Triply Periodic Minimal Surfaces. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*, 2025, Vol. 25, no. 1, C. 23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.
25. Gubareva K.V., Eremin A.V. Studying the Heat Transfer Process in a Porous Medium with a Fischer–Koch S TPMS Structure. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2024, no. 4, pp. 70–82. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.4.070-082.
26. Mohammad M., Trunov A. An Advanced Algorithm for Solving Incompressible Fluid Dynamics: from Navier–Stokes to Poisson Equations. *The European Physical Journal Special Topics*, 2025, Vol. 234, pp. 2191–2208. DOI: 10.1140/epjs/s11734-024-01209-z
27. Shankar B.M., Shivakumara I.S. Stability of Plane Poiseuille and Couette Flows of Navier–Stokes–Voigt Fluid. *Acta Mechanica*, 2023, Vol. 234, pp. 4589–4609. DOI: 10.1007/s00707-023-03624-0.
28. Das D., Mondal K., Poddar N., Wang P. Transient Dispersion of a Reactive Solute in an Oscillatory Couette Flow through an Anisotropic Porous Medium. *Physics of Fluids*, 2024, Vol. 36, 023610. DOI: 10.1063/5.0184921.
29. Málek J., Rajagopal K. On Determining Navier's Slip Parameter at a Solid Boundary in Flows of a Navier–Stokes Fluid. *Physics of Fluids*, 2024, Vol. 36, 017114. DOI: 10.1063/5.0185585.
30. Bogoyavlenskij O. The New Effect of Oscillations of the Total Angular Momentum Vector of Viscous Fluid. *Physics of Fluids*, 2022, Vol. 34, 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.

*Received November 4, 2025*

### Information about the authors

Gubareva Kristina Vladimirovna is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University Samara, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>, e-mail: r.kristina2017@mail.ru.

Prosviryakov Evgenii Yurievich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Dept. of Information Technology and Automation, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation, Head of Sector, Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>, e-mail: evgen\_pros@mail.ru.

Eremin Anton Vladimirovich is Dr. Sc. (Engineering), Associate Professor, Vice-Rector for Scientific Work, Head of the Department of Industrial Thermal Power Engineering, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>, e-mail: a.v.eremin@list.ru.