

## ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧЕ О НАЗНАЧЕНИИ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ ПРОЕКТА

Ю.В. Бугаев<sup>1</sup>, А.В. Калач<sup>2,3</sup>, Б.Е. Никитин<sup>2</sup>, И.Ю. Шурупова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация

<sup>3</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: a\_kalach@mail.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача о назначении исполнителей проекта – совокупности взаимозависимых работ, связи между которыми описываются с помощью ориентированных взвешенных графов без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие некоторые характеристики проекта. При этом события (факт окончания или начала выполнения работ) соответствуют вершинам графа, а работы – дугам, ориентация которых соответствует технологии этого процесса. Цель управления проектом заключается в оптимальном распределении исполнителей проекта по проектным заданиям. Критерий эффективности – минимум времени реализации проекта. Анализ литературы показал, что подобная задача является важной составной частью большинства сложных моделей управления проектами. Предложен метод решения данной задачи с использованием аппарата двойственности. Показано, что для вычисления соответствующей двойственной функции необходимо на каждом шаге решать классическую задачу о назначениях, ценовая матрица которой определяется умножением элементов ценовой матрицы исходной задачи на соответствующие множители Лагранжа. В ходе решения тестовых задач выяснилось, что классический алгоритм Х. Удзавы негладкой оптимизации порождает зигзагообразную траекторию поиска, сходную с траекторией оптимизации «овражных» функций. Было предложено воспользоваться подходом, разработанным В.Ф. Демьяновым и В.Л. Малоземовым для решения нелинейных минимаксных задач. В работе детально описан пример использования предлагаемого алгоритма. Тестовые расчеты подтвердили эффективность метода для задач умеренной размерности. Было показано, что в общем случае для данной задачи наблюдается разрыв двойственности, что не мешает найти приемлемое приближенное решение.

*Ключевые слова:* управление проектами, сетевая модель, теория двойственности, функция Лагранжа, разрыв двойственности, задача о назначениях, минимакс, поверхность разрыва.

### Введение

Реализация сложных проектов предусматривает выполнение совокупности взаимозависимых работ, связи между которыми хорошо описываются с помощью сетевых моделей – ориентированных взвешенных графов без петель и контуров, элементам которых поставлены в соответствие некоторые характеристики проекта. При этом события (факт окончания или начала выполнения работ) соответствуют вершинам графа, а работы – дугам, ориентация которых соответствует технологии этого процесса. Принятие управленческих решений традиционно отождествляют с распределением ресурсов, необходимых для выполнения работ, в том числе людских ресурсов, т. е. исполнителей проекта. Целью управления является построение расписания выполнения заданного комплекса взаимозависимых работ таким образом, чтобы при заданных свойствах ресурсов и работ оптимизировать выбранную меру эффективности.

Одним из важных моментов на начальных этапах проектирования является формирование команды исполнителей. От решения этой задачи во многом зависит успешное выполнение проекта. Данная область не охватывается существующими системами управления проектами [1–4]. Поэтому актуальной является разработка методов, позволяющих формировать проектную команду и определять круг работ, поручаемых каждому исполнителю.

Как следует из формулировки проблемы, речь идёт о решении двухэтапной задачи – формирование и предварительная оценка списка потенциальных исполнителей и назначение конкретного исполнителя каждой работы. Решению этих подзадач посвящено достаточно много публикаций [5–14]. Обширный обзор соответствующих моделей и методов их решения представлен в монографии [5]. Для решения задачи первого этапа в последнее время приобрели популярность генетические алгоритмы [6–8]. Что касается решения задачи второго этапа, то предлагаются различные методы. Данная задача является обобщением классической задачи о назначениях и отличается от неё наличием дополнительных допущений и ограничений. Традиционный подход основан на сведении данной задачи к задаче смешанного целочисленного математического программирования [9], для решения которых в настоящее время существует широкий спектр программных средств, включая расширение Solver в MS Excel, LPSolve с IDE и CPLEX Optimizer. Недостаток такого подхода состоит в ограниченной размерности решаемых задач. Также предлагаются эвристические методы решения типа локального поиска и жадного алгоритма [10–13]. В [14] предложен алгоритм, основанный на сведении задачи второго этапа к обычной задаче о назначениях путём наложения системы штрафов за нарушения дополнительных ограничений.

В предлагаемой работе предпринята попытка построить алгоритм решения, основанный не только на эвристике, но и имеющий определенное математическое обоснование. Речь пойдет о весьма распространенном аппарате теории двойственности оптимизационных задач.

### Методы и материалы

Пусть сформирован сетевой план проекта в виде графа  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ , отражающего отношения взаимосвязи между работами. Каждая дуга  $e \in E$  представляет собой определённую работу в рамках проекта. Пусть  $s$  – исток сети,  $f$  – ее сток.

Сделаем следующие допущения:

- каждая работа может быть выполнена каждым работником с сопоставимой эффективностью, иными словами, характер выполняемых работ более или менее однороден;
- не предполагается совмещение, т. е. выполнение нескольких работ одним исполнителем.

Обозначим:

- $J = \{1, 2, \dots, m\}$  – множество исполнителей; без ограничения общности можно считать, что число работ и исполнителей совпадает; в противном случае несложно провести дробление работ на более мелкие или ввести фиктивных исполнителей;
- $T_{ij}$  – время, которое требуется  $j$ -му исполнителю для выполнения  $i$ -й работы; при фиксированном назначении  $T_{ij}$  можно интерпретировать как вес (длину)  $i$ -й дуги графа.

Варьируемыми параметрами математической модели являются величины  $Z_{ij} \in \{0, 1\}$  – распределение операций по исполнителям:  $Z_{ij} = 1$ , если  $i$ -я операция поручена  $j$ -му исполнителю,  $Z_{ij} = 0$  в противном случае. При этом должны выполняться следующие ограничения:

каждая работа выполняется лишь одним исполнителем:

$$\sum_{j \in J} Z_{ij} = 1 \quad \forall i \in E; \quad (1)$$

каждому исполнителю поручается лишь одна работа:

$$\sum_{i \in E} Z_{ij} = 1 \quad \forall j \in J. \quad (2)$$

В публикациях [5–14] предложено достаточно много моделей реализации проекта с различными целевыми функциями и ограничениями. Наиболее распространенным способом синтеза оптимального управления, используемым в современных системах управления проектами, является Program (Project) Evaluation and Review Technique (сокращённо PERT) – метод оценки и ана-

лиза проектов. Ключевой частью PERT является метод критического пути в сетевом графике (сетевой диаграмме PERT). Остановимся на постановке задачи с минимизацией критического пути, т. е. с минимизацией времени исполнения проекта.

Связь между длиной критического пути и введенными выше величинами можно описать следующим образом. Пусть  $E_k, k \in \{1, \dots, N\}$  – множество дуг, составляющих  $k$ -й по порядку путь от источника к стоку. Если распределение работ зафиксировано в элементах матрицы  $Z$ , то длина  $k$ -го пути вычисляется по формуле

$$d_k = \sum_{i \in E_k} \sum_{j \in J} T_{ij} Z_{ij}.$$

Введем вспомогательную переменную  $\xi$ , значение которой равно длине критического пути. В соответствии с определением  $\xi$  для нее должны выполняться условия

$$\sum_{i \in E_k} \sum_{j \in J} T_{ij} Z_{ij} \leq \xi \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (3)$$

$$\xi \rightarrow \min. \quad (4)$$

Поскольку  $Z_{ij} \in \{0, 1\}$ , а переменная  $\xi$  произвольна, задача определения исполнителей работ свелась к задаче частичного булевого программирования (1)–(4). Как известно, эти задачи в общем случае являются *NP*-трудными, поэтому нужно подобрать соответствующий метод решения.

Сложность решения модели (1)–(4) в частности состоит из необходимости перебора всех путей в сетевом графе. Их количество  $N$  сильно варьируется в разных задачах и в графах даже средней размерности может достигать весьма больших значений. Алгоритмически же задача не представляет сложности, наиболее простой метод её решения – алгоритм поиска с возвратом (*back-tracking*). Часто он реализуется в рекурсивной форме.

В линейном программировании задачи с большим числом ограничений рекомендуется решать сведением исходной задачи к двойственной. В дискретной оптимизации, кроме того, переход от исходной дискретной задачи к непрерывной двойственной открывает возможности использования таких апробированных понятий непрерывной оптимизации, как окрестность, направление наискорейшего спуска и т. п. Применим этот подход в данном случае.

Произвольная оптимизационная задача сводится к двойственной следующим образом [15]. Пусть поставлена задача

$$\min(\varphi(x) \mid x \in S), \quad (5)$$

$$h_k(x) \leq 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}. \quad (6)$$

Функция Лагранжа для неё имеет следующий вид:

$$L(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k h_k(x), \quad x \in S, \lambda_k \geq 0. \quad (7)$$

По определению задача, двойственная к (5)–(6), записывается как

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in S} L(x, \lambda). \quad (8)$$

Функцию

$$\omega(\lambda) = \min_{x \in S} L(x, \lambda), \quad \lambda_k \geq 0$$

называют двойственной функцией для задачи (5)–(6), и двойственную задачу (8) можно представить в виде

$$\max_{\lambda \geq 0} \omega(\lambda).$$

Конкретно для задачи (1)–(4) функция Лагранжа (7) выглядит так:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left( \sum_{i \in E_k} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi \right), \quad (9)$$

$$Z \in S, \lambda_k \geq 0.$$

Область допустимых решений  $S$  определяется ограничениями (1)–(2) и условием  $Z_{ij} \in \{0, 1\}$ ,  $\xi$  произвольно.

Преобразуем формулу (9). Для этого введём матрицу  $M$  размера  $(N \times m)$ , элементы которой зададим следующим образом:  $M_{ki} = 1$ , если  $i$ -е ребро содержится в  $k$ -м пути,  $M_{ki} = 0$  в противном случае. Тогда длина  $k$ -го пути определится по формуле

$$d_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij}.$$

Подставим это выражение в формулу (9) на место первоначального выражения для  $d_k$ :

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left( \sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi \right).$$

Поменяем порядок суммирования:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi \left( 1 - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \lambda_k M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij}.$$

Обозначим

$$\mu_i = \sum_{k=1}^N \lambda_k M_{ki}. \quad (10)$$

В итоге получим:

$$L(Z, \xi, \lambda) = \xi \left( 1 - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i T_{ij} Z_{ij}, \quad (11)$$

$(Z, \xi) \in S, \lambda_k \geq 0.$

Возможны три случая для значений  $\lambda_k$ .

1.  $\sum_{k=1}^N \lambda_k > 1$ . Поскольку  $\xi$  не ограничено, то минимум  $L(Z, \xi, \lambda)$  при произвольном фиксированном  $\lambda$  достигается при  $\xi = \infty$ . При этом  $\omega(\lambda) = -\infty$ . Данное решение двойственной задачи, очевидно, не имеет практического значения, этот случай мы рассматривать не будем.
2.  $\sum_{k=1}^N \lambda_k < 1$ . Аналогичная ситуация, только минимум  $L(Z, \xi, \lambda)$  достигается при  $\xi = -\infty$ .
3.  $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$ . В этом случае значение функции (11) не зависит от  $\xi$  и она примет вид

$$L(Z, \mu) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_i T_{ij} Z_{ij} = \sum_{k=1}^N \lambda_k d_k, \quad Z \in S, \lambda \geq 0, \quad (12)$$

а  $k$ -я координата ее градиента равна

$$g(\lambda^u)_k = \sum_{i=1}^m M_{ki} \sum_{j=1}^m T_{ij} Z_{ij} - \xi = d_k - \xi.$$

Выражение (12) представляет собой целевую функцию классической задачи о назначениях, ценовая матрица которой образована из матрицы  $T$  задачи (1)–(4) умножением каждой её  $i$ -й строки на весовой коэффициент  $\mu_i$ , определяемый по формуле (10) при условии

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1. \quad (13)$$

Известна тесная связь между прямой и двойственной задачами. Так, при определенных условиях [15], например, для задачи линейного программирования (ЛП), оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают. При несовпадении говорят, что имеет место разрыв двойственности. Опыт решения тестовых примеров показал, что в общем случае для задачи (1)–(4) разрыв двойственности имеет место. Данный факт не позволяет использовать

двойственный метод для поиска точного решения задачи. Однако он вполне пригоден для построения приближенного алгоритма.

Решение двойственной задачи сводится к непосредственному поиску максимума функции Лагранжа. К сожалению, по известному её свойству [15] разрыв двойственности влечёт отсутствие седловой точки, из чего, в свою очередь, следует недифференцируемость функции Лагранжа в оптимальной точке. Это означает, что для решения двойственной задачи следует привлекать специальные алгоритмы [15–22], приспособленные к оптимизации вогнутых (выпуклых вверх) функций, которые не всюду дифференцируемы. Помимо классических лагранжевых методов [15–17] можно отметить семейства субградиентных методов с растяжением пространства, которые известны как  $r$ -алгоритмы Н.З. Шора [21, 22]. Они имеют ускоренную сходимость при минимизации выпуклых функций с овражной структурой поверхностей уровня, а также хорошо зарекомендовали себя при минимизации негладких выпуклых функций. Тем не менее есть основания полагать, что алгоритмы, в основе которых положена идея движения по гребню минимизируемой негладкой функции, выдвинутая и обоснованная в монографии В.Ф. Демьянова и В.Л. Малоземова [23], вполне конкурентоспособна на фоне методов с переменной метрики.

В общем случае субградиентный алгоритм с ограничениями состоит из следующих шагов [15].

Обозначим  $A \subset R^N$  – множество весов  $\lambda$ , удовлетворяющих условию (13).

1. Задать начальную точку  $\lambda^0$ , положить номер итерации  $u = 0$ .

2. На  $u$ -м шаге итерации мы находимся в точке  $\lambda^u$ . Вычислить величину

$$\omega(\lambda^u) = \min_{x \in S} L(x, \lambda^u).$$

3. Вычислить вектор  $g(\lambda^u)$  – субградиент функции  $\omega(\lambda)$  в точке  $\lambda^u$ .

4. Определить  $\lambda^{u+1}$  равенством

$$\lambda^{u+1} = \Pr_{R^+ \cap \Lambda} \left[ \lambda^u + \rho_u g(\lambda^u) \right], \quad (14)$$

где  $\rho_u$  – шаг перемещения на  $u$ -й итерации.

5. Если выполнен тест остановки, то СТОП. Иначе положить  $u = u + 1$  и вернуться к пункту 2.

В ходе итераций следует фиксировать получаемые пути и отмечать минимум их максимальной длины. В результате найдется максимум функции Лагранжа. Результирующие назначения можно приближенно считать решением задачи. Кроме того, в процессе итераций может обнаружиться назначение, не доставляющее оптимальное решение двойственной задачи, но имеющее наилучшее значение функции  $\varphi$ . Его также можно считать искомым решением. Найденное значение максимума функции Лагранжа может служить оценкой близости полученного решения к оптимуму прямой задачи.

В ходе поиска оптимума возможно получение точки разрыва градиента. В данном случае разрыв обусловлен тем, что задача о назначениях, а значит, и задача (3)–(4) может иметь несколько решений с одинаковыми значениями целевой функции, но с разными наборами протяженностей путей  $\{d_k\}$ , которые, в свою очередь, определяют векторы-градиенты функции (12).

Отсюда возникают две подзадачи:

– поиск различных решений задачи (3)–(4), порождающих при фиксированном  $\lambda$  одинаковые значения функции Лагранжа;

– поиск направления максимального локального роста целевой функции при отсутствии дифференцируемости в обычном смысле.

Изложим способ нахождения соответствующего вектора  $p(\lambda^u)$  – проекции субградиента на множество  $R^+ \cap \Lambda$ .

Пусть  $\lambda^u$  – точка разрыва градиента и  $\{Z(\lambda^u)\}$  – набор всех решений задачи минимизации функции Лагранжа (12), соответствующих  $\lambda^u$ . Обозначим  $A$  – матрица  $(m \times t)$ , столбцами которой являются градиенты, образованные решениями из  $\{Z(\lambda^u)\}$ . Потребуем, чтобы вектор

$p(\lambda^u)$  образовывал максимально острый угол со всеми столбцами  $A$ . Точнее, чтобы выполнялось условие

$$\tau \rightarrow \max, A^T p(\lambda^u) \geq \tau e_t.$$

Здесь  $e_t$  – столбец из  $t$  единиц.

Помимо этого, вектор  $p(\lambda^u)$  должен удовлетворять следующим условиям.

1. Поскольку при достаточно малой величине шага  $\rho$  вдоль направления  $p(\lambda^u)$  элементы матрицы  $Z$  не изменятся, а условие (13) для новых значений  $\lambda^{u+1}$  должно остаться в силе, то для его соблюдения необходимо, чтобы сумма элементов  $p(\lambda^u)$  была равна 0. Для этого введем произвольную матрицу  $H$ ,  $(m \times (m-1))$  ранга  $m-1$ , сумма элементов каждого столбца которой равна 0. Сделаем замену переменных, положив  $p = Hx$ , где  $x$  – вектор с  $m-1$  координатами, и вместо поиска  $p$  будем подбирать  $x$ . Нетрудно доказать, что при такой подстановке требуемое условие для  $p$  будет выполнено.

2. В процессе поиска максимума  $L$  некоторые  $\lambda_k$  могут обратиться в 0. В этом случае соответствующие значения  $p_k$  должны быть неотрицательны. Обозначим множество номеров таких  $p_k$  через  $Q$ ,  $|Q| = s$ . Введём матрицу  $D$ ,  $(m \times s)$  у которой в  $r$ -м столбце,  $r = 1, 2, \dots, s$ , отличен от нуля только элемент  $D_{k,r}$ ,  $k \in Q$ . Тогда соответствующее условие можно записать как  $D^T Hx \geq 0$ .

Кроме того, ограничим норму вектора  $x$  условием  $x^T x \leq 1$ , чтобы не получить вектор бесконечной длины.

Окончательно получаем, что для обеспечения максимального локального роста функции Лагранжа необходимо решить задачу условной оптимизации

$$\tau \rightarrow \max; A^T Hx \geq \tau e; x^T x \leq 1; D^T Hx \geq 0. \quad (15)$$

Данная задача имеет линейную целевую функцию и содержит квадратичное ограничение, т. е. не является стандартной. Вычислительные эксперименты показали, что при неудачном начальном приближении не удастся найти решение с помощью математических пакетов. Для достижения надежности нахождения решения приближенно сведем (15) к задаче квадратичного программирования, которая решается конечным методом.

Можно предложить два варианта такой замены:

$$x^T x \rightarrow \min; A^T Hx \geq \gamma e; D^T Hx \geq 0 \quad (16)$$

либо

$$x^T x - \gamma\tau \rightarrow \min; A^T Hx \geq \tau e; D^T Hx \geq 0. \quad (17)$$

Здесь  $\gamma > 0$  – некоторое большое число.

Как было сказано выше, для определения направления поиска  $p(\lambda^u)$  в точке разрыва градиента необходимо решить задачу поиска различных решений задачи (3)–(4), порождающих при фиксированном  $\lambda$  одинаковые значения функции Лагранжа. В общем случае это потребует определения всех возможных решений задачи о назначениях. Соответствующий метод предложен авторами в работе [24]. При этом использован комбинированный алгоритм, сочетающий ускоренный вариант модифицированного симплекс-метода и алгоритм поиска в ширину на графе.

Очевидно, что трудоемкость каждой итерации изложенного метода решения задачи (3)–(4) намного выше, чем, например, классического варианта алгоритма Утзавы [15], в котором направление поиска совпадает с направлением градиента. Однако такой вариант применим лишь при отсутствии разрыва градиента и выполнении условия  $\lambda_k > 0, k = 1, \dots, m$ , в противном случае траектория поиска становится зигзагообразной, сходной с траекторией оптимизации «овражных» функций, что, в конечном счете, может привести к закливанию. Соответствующие примеры приведены в [22].

Остается рассмотреть вопрос о выборе длины шага поиска  $\rho$ . Предлагается определять его из условия минимума функции Лагранжа в направлении  $p(\lambda^u)$ . Поскольку данная целевая функция кусочно-линейная, то весьма эффективным будет метод касательных. В [22] предложена формула для определения производной по направлению  $p$  в точке разрыва градиента целевой функции. Применительно к функции (12) формула имеет вид  $\frac{\partial L}{\partial p} = \min_{j=1,t} q_j$ , где  $q = A^T p$ .

В заключение рассмотрим пример. Пусть граф  $G$  имеет 4 вершины и 5 дуг. Элементы матрицы  $T$  и дуги графа заданы в таблице.

Дуги		Длительности работ				
Начальная вершина	Конечная вершина					
1	2	10	5	9	18	11
2	4	13	19	12	6	14
1	4	19	2	20	4	19
1	3	18	9	12	17	15
3	4	11	6	14	19	10

Данный граф имеет, очевидно, три пути из истока (вершина 1) к стоку (вершина 4): путь № 1: 1 – 2 – 4 (дуги 1 и 2); путь № 2: 1 – 4 (дуга 3); путь № 3: 1 – 3 – 4 (дуги 4 и 5).

Зададим начальные значения  $\lambda^0 = \frac{1}{3} \cdot (1, 1, 1)^T$ . Тогда решением задачи минимизации  $L$  по  $Z_{ij}$  будут следующие назначения:

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кратко запишем данное назначение, указав порядковые номера исполнителей для 1-й, 2-й и т. д. задач в виде (1, 4, 2, 3, 5). Соответственно, длины путей составят (16, 2, 22). Отсюда  $\omega(\lambda^0) = 13,3333$ . Направление поиска определяется вектором  $p(\lambda^0) = (0,1837, -0,7808, 0,5971)^T$ .

Минимум  $\omega(\lambda)$  в направлении  $p(\lambda^0)$  достигается при  $\rho^0 = 0,2767$ , следующее приближение  $\lambda^1 = (0,3842, 0,1173, 0,4985)^T$ ,  $\omega(\lambda^1) = 17,3489$ .

Весовому вектору  $\lambda^1$  соответствуют два назначения (1, 4, 2, 3, 5) и (1, 4, 5, 3, 2) со значениями длин путей (16, 2, 22) и (16, 19, 18) соответственно. Следовательно,

$$A(\lambda^1) = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 2 & 19 \\ 22 & 18 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следующее направление  $p(\lambda^1) = (-0,7689, 0,1465, 0,6224)^T$ .

Новые значения весов будут  $\lambda^2 = (0,2632, 0,1404, 0,5965)^T$ . Соответствующие назначения: (1, 4, 2, 3, 5) с длинами путей (16, 2, 22); (5, 1, 4, 3, 2) и (1, 5, 4, 3, 2) с одинаковыми длинами (24, 4, 18) и (1, 4, 5, 3, 2) с длинами (16, 19, 18).  $\omega(\lambda^1) = 17,6140$ . Следовательно,

$$A(\lambda^2) = \begin{pmatrix} 16 & 24 & 16 \\ 2 & 4 & 19 \\ 22 & 18 & 18 \end{pmatrix},$$

Направление поиска  $p(\lambda^2) = (-0,5245, -0,2796, 0,8042)^T$ ,  $\lambda^3 = (0, 0, 1)^T$ ,  $L(Z^{(3)}, \lambda^3) = 18$ . В точке  $\lambda^3$  имеем 6 назначений, 5 различных возможных путей. Матрицы  $A(\lambda^3)$  и  $D$  имеют вид:

$$A(\lambda^3) = \begin{pmatrix} 31 & 32 & 17 & 24 & 16 \\ 19 & 19 & 19 & 4 & 19 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача (15) при таких данных имеет нулевое решение  $p(\lambda^3) = (0, 0, 0)^T$ , следовательно, допустимых направлений нет, найдено оптимальное значение  $L = 18$ .

Наилучшие из полученных назначений – (1, 4, 5, 3, 2), (5, 4, 1, 3, 2) и (1, 4, 5, 3, 2) с протяженностью критического пути 19. Их можно приять за решение задачи. Разрыв двойственности составит  $\Delta = 1$ .

Проверка полным перебором показала, что минимальная длина критического пути действительно 19 и существует еще одно оптимальное назначение (3, 4, 1, 2, 5).

Разработанный алгоритм был реализован нами в системе MATLAB для решения тестовых задач. Сравнение значения функции Лагранжа в найденных решениях с полученной длиной критического пути указывает на близость полученного решения к оптимальному. Для сравнения была предпринята попытка решить тестовые задачи посредством программы bintprog системы MATLAB и пакета «Поиск решения» системы Excel.

Соответствующая задача булевого программирования содержит  $m^2$  переменных и при  $m \geq 20$  решение этим программным обеспечением уже не находилось.

### Заключение

Предложен метод с использованием аппарата двойственности и составлена соответствующая программа решения задачи о назначении исполнителей проекта – последовательности работ с отношением предшествования. Тестовые расчеты подтвердили эффективность метода для задач умеренной размерности. Было показано, что в общем случае для данной задачи наблюдается разрыв двойственности, что не мешает найти приемлемое приближенное решение.

К недостаткам предложенного подхода следует отнести необходимость перебора всех путей в сетевом графе, что в общем случае приводит к задаче высокой вычислительной сложности. Однако в постановке задачи предполагали, что характер выполняемых работ более или менее однороден, а значит, их перечень не может быть слишком большим, поскольку в больших и сложных проектах виды работ обычно весьма разнообразны. Следовательно, не стоит опасаться, что в графах реальных проектов список путей будет неподъемным.

### Литература

1. Cerebro: Система управления проектами. – <http://cerebrohq.com>.
2. Trac: Project management tool. – [www.trac.edgwall.org](http://www.trac.edgwall.org).
3. PayDox: система электронного документооборота. – [www.paydox.ru](http://www.paydox.ru).
4. Автоматизированная система АСОНИКА для проектирования высоконадежных радиоэлектронных средств на принципах CALS-технологий. Том 1 / Под ред. Ю.Н. Кофанова, Н.В. Малютина, А.С. Шалумова. – М.: Энергоатомиздат, 2007. – 368 с.
5. Катаев, А.В. Управление проектами на базе динамической сети партнеров: монография / А.В. Катаев, Т.М. Катаева. – Ростов н/Д. – Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2017. – 125 с.
6. Филиппов, А.А. Применение генетического алгоритма для формирования проектных команд на основе уровня квалификации специалиста / А.А. Филиппов, В.В. Шеркунов // Информатика и вычислительная техника: Сборник научных трудов VII Всероссийской научно-

технической конференции аспирантов, студентов и молодых ученых ИВТ-2015, Ульяновск, 25–27 мая 2015 года / Ульяновский государственный технический университет. – Ульяновск: Ульяновский государственный технический университет, 2015. – С. 541–550.

7. Синдюкова, М.О. Генетическая оптимизация подбора исполнителей из списка потенциальных участников для проектов / М.О. Синдюкова, Е.А. Горлова // Прикладные информационные системы (ПИС-2019). Сб. научн. трудов VI Всероссийской научно-технической конференции с международным участием. – Ульяновск, 2019. – С. 49–57.

8. Ковшов, Е.Е. Автоматизированный подбор руководителей образовательных проектов на основе генетических алгоритмов / Е.Е. Ковшов, В.С. Кувшинников, Л.Е. Осипенко // Известия Юго-Западного государственного университета. Курск. – 2021. – Т. 25, № 1. – С. 162–180.

9. Катаев, А.В. Управление проектами: математические модели оптимального назначения исполнителей проектных работ / А.В. Катаев, Т.М. Катаева, Е.Л. Макарова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Экономика. Управление. Право. – 2016. – Т.16, № 3. – С. 294–299.

10. Катаев, А.В. Задача минимизации количества исполнителей работ в проекте: математическая модель и алгоритм решения / А.В. Катаев, Т.М. Катаева // Экономика и социум. – 2016. – № 6-3 (25). – С. 77–84.

11. Катаев, А.В. Формирование и оптимизация проектных команд: математические модели и алгоритмы / А.В. Катаев, А.В. Тычинский // Вестник Таганрогского института управления и экономики. – 2021. – № 1 (33). – С. 57 – 60.

12. Новикова, Т.П. Алгоритм решения задачи оптимального распределения работ в сетевых канонических структурах / Т.П. Новикова, А.И. Новиков // Лесотехнический журнал. – 2014. – Т. 4, № 4(16). – С. 309–317.

13. Метод сетевого планирования разработки сложных технических систем / Р.В. Допира, Р.Ю. Кордюков, А.А. Беглецов, С.В. Сергиенко // Программные продукты и системы. – 2014. – № 2. – С. 22–26.

14. Алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях на сетях / Ю.В. Бугаев, О.В. Авсеева, Л.А. Коробова, И.Ю. Шурупова // Вестник ВГУИТ. Серия: «Информационные технологии, моделирование и управление». – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 71–74.

15. Мину, М. Математическое программирование. Теория и практика: Пер. с фр. / М. Мину – М.: Наука, 1990. – 485 с.

16. Zhao, X. Surrogate Gradient Algorithm for Lagrangian Relaxation / X. Zhao, P. B. Luh, J. Wang // Journal of optimization Theory and Applications. – 1999. – Vol. 100, no. 3. – P. 699–712.

17. Fisher, M.L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems / M.L. Fisher // Management science. – 2004. – Vol. 50, no. 12 suppl. – P. 1861–1871.

18. Bagirov, A. Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software / A. Bagirov, N. Karmitsa, M.M. Mäkelä // Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software, 2014. – 372 p.

19. Gradient Sampling Methods for Nonsmooth Optimization / J.V. Burke, F.E. Curtis, A.S. Lewis *et al.* // Numerical Nonsmooth Optimization: State of the Art Algorithms. – 2020. – P. 201–225.

20. Numerical Nonsmooth Optimization / под ред. А.М. Bagirov, M. Gaudioso, N. Karmitsa *et al.* – Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2020. – 698 p.

21. Стецюк, П.И. Субградиентные методы  $ralgb5$  и  $ralgb4$  для минимизации овражных выпуклых функций / П.И. Стецюк // Вычислительные технологии. – 2017. – Т. 22, № 2. – С. 127–149.

22. Шор, Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. – Киев: Наук. думка, 1979. – 199 с.

23. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Л. Малоземов. – М.: Наука, 1972. – 368 с.

24. Бугаев, Ю.В. Поиск всех решений задачи о назначениях / Ю.В. Бугаев, И.Ю. Шурупова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сб. тр. Международной научной конференции. – Воронеж: ВГУ, 2024. – С.1461–1465.

Поступила в редакцию 23 января 2026 г.

### Сведения об авторах

Бугаев Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: y\_bugaev52@mail.ru.

Калач Андрей Владимирович – доктор химических наук, профессор, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация; Институт информационных технологий РТУ МИРЭА, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a\_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

Никитин Борис Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий, моделирования и управления, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация

Шурупова Ирина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: i\_shur@mail.ru.

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"  
2026, vol. 18, no. 2, pp. 5–16*

---

DOI: 10.14529/mmph260201

## AMBIVALENCE IN THE ASSIGNMENT OF PROJECT EXECUTORS

**Yu.V. Bugaev<sup>1</sup>, A.V. Kalach<sup>2,3</sup>, B.E. Nikitin<sup>2</sup>, I.Yu. Shurupova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Military Educational and Scientific Center of the Air Force "Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin", Voronezh, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation*

<sup>3</sup> *Institute of Information Technologies RTU MIREA, Moscow, Russian Federation*

**Abstract.** This paper considers the assignment of project executors to a set of interdependent tasks. The relationships between these tasks are described using weighted directed graphs without loops and contours, the elements of which correspond to certain project characteristics. At the same time, events (the completion or commencement of work) are represented by the vertices of the graph, while tasks are represented by arcs, with their orientation corresponding to the technology of this process. Project management aims to optimally distribute project executors according to project assignments, with the efficiency criterion of minimizing the time required for project completion. Literature review has shown that this task is an essential component of most complex project management models. The authors proposed a method for solving this problem using the duality apparatus. It is shown that the classical assignment problem should be solved at each step to calculate the corresponding dual function. The price matrix of this problem is determined by multiplying the elements of the price matrix of the original problem by the corresponding Lagrange multipliers. When solving the test problems, it was found that H. Uzawa's classical non-smooth optimization algorithm generates a zigzag search trajectory, similar to the optimization trajectory of "ravine" functions. It was proposed to use the approach developed by V.F. Demyanov and V.L. Malozemov to solve nonlinear minimax problems. The paper provides a detailed example of using the proposed algorithm. Test calculations have confirmed the effectiveness of this method for moderate-dimensional problems. It has been shown that, in general, there is a duality gap for this problem, but an acceptable approximate solution can still be found.

*Keywords:* project management; network model; duality theory; Lagrange function; duality gap; assignment problem; minimax; gap surface.

## References

1. *Cerebro: Sistema upravleniya proektami* (Cerebro: Project Management System). <http://cerebrohq.com>.
2. *Trac: Project Management Tool*. [www.trac.edgwall.org](http://www.trac.edgwall.org).
3. *PayDox: sistema elektronnoy dokumentooborota* (PayDox: Electronic Document Management System). [www.paydox.ru](http://www.paydox.ru).
4. Kofanova Yu.N., Malyutina N.V., Shalumova A.S. (eds.) *Avtomatizirovannaya sistema ASONIKA dlya proektirovaniya vysokonadezhnykh radioelektronnykh sredstv na printsipakh CALS-tekhnologiy. Tom 1* (Automated ASONICS system for the design of highly reliable electronic devices based on the principles of CALS technologies. Volume 1). Moscow, Energoatomizdat Publ., 2007, 368 p. (in Russ.).
5. Kataev A.V., Kataeva T.M. *Upravlenie proektami na baze dinamicheskoy seti partnerov: monografiya* (Project Management based on a Dynamic Network of Partners: Monograph). Rostov-na-Donu–Taganrog, Izd-vo Yuzhnogo federal'nogo un-ta Publ., 2017, 125 p. (in Russ.).
6. Filippov A.A., Sherkunov V.V. Primenenie geneticheskogo algoritma dlya formirovaniya proektnykh komand na osnove urovnya kvalifikatsii spetsialista (The use of a genetic algorithm for the formation of project teams based on the skill level of a specialist). *Informatika i vychislitel'naya tekhnika. Sb. nauchn. trudov VII Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii aspirantov, studentov i molodykh uchenykh (IVT-2015)* (Computer Science and Computer Engineering. Proc. VII All-Russian Scientific and Technical Conference of Graduate Students, Students and Young Scientists (IVT-2015)). Ul'yanovsk, Ul'yanovskiy gosudarstvennyy tekhnicheskii universitet Publ., 2015, pp. 541–550. (in Russ.).
7. Sindukova M.O., Gorlova E.A. Geneticheskaya optimizatsiya podbora ispolniteley iz spiska potentsial'nykh uchastnikov dlya proektov (Genetic Optimization of the Selection of Performers from the List of Potential Participants for Projects). *Prikladnye informatsionnye sistemy (PIS-2019). Sb. nauchn. trudov VI Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem* (Applied Information Systems (IIS-2019). Proc. VI All-Russian Scientific and Technical Conference with International Participation). Ul'yanovsk, 2019, pp. 49–57. (in Russ.).
8. Kovshov E.E., Kuvshinnikov V.S., Osipenko L.E. Avtomatizirovannyi podbor rukovoditeley obrazovatel'nykh pro-ektov na osnove geneticheskikh algoritmov (Automated Selection of Educational Project Managers based on Genetic Algorithms) *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Kursk*, 2021, Vol. 25, no. 1, pp. 162–180. (in Russ.). DOI: 10.21869/2223-1560-2021-25-1-162-180
9. Kataev A.V., Kataeva T.M., Makarova E.L. Upravlenie proektami: matematicheskie modeli optimal'nogo naznacheniya ispolniteley proektnykh rabot (Project Management: Mathematical Models of Optimal Assignment of Project Work Performers). *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Ekonomika. Upravlenie. Pravo*, 2016, Vol. 16, no. 3, pp. 294–299. (in Russ.). DOI: 10.18500/1994-2540-2016-16-3-294-299
10. Kataev A.V., Kataeva T.M. Zadacha minimizatsii kolichestva ispolniteley rabot v proekte: matematicheskaya model' i algoritm resheniya (The Task of Minimizing the Number of Performers in a Project: a Mathematical Model and a Solution Algorithm). *Ekonomika i sotsium*, 2016, no. 6-3 (25), pp. 77–84. (in Russ.).
11. Kataev A.V., Tyichinskiy A.V. Formirovanie i optimizatsiya proektnykh komand: matematicheskie modeli i algoritmy (Formation and Optimization of Project Teams: Mathematical Models and Algorithms). *Vestnik Taganrogskego instituta upravleniya i ekonomiki*, 2021, no. 1 (33), pp. 57–60. (in Russ.).
12. Novikova T.P., Novikov A.I. Algorithms for Solving Problems of Optimum Distribution Work in Network Canonical Structures. *Lesotekhnicheskii zhurnal*, 2014, Vol. 4, no. 4(16), pp. 309–317. (in Russ.). DOI: 10.12737/8515
13. Dopira. R.V., Kordyukov R.Yu., Begletsov A.A., Sergienko S.V. Metod setevogo planirovaniya razrabotki slozhnykh tekhnicheskikh sistem (A Method of Network Planning for the Development of Complex Technical Systems). *Programmnye produkty i sistemy*, 2014, no. 2, pp. 22–26. (in Russ.).
14. Bugaev Yu.V., Avseeva O.V., Korobova L.A., Shurupova I.Yu. Algorithm for Solving Multicriteria Problem of Appointments on the Networks. *Vestnik VGUIT. Seriya: "Informatsionnye*

*tekhnologii, modelirovanie i upravlenie*”, 2017, Vol. 79, no. 4, pp. 71–74. (in Russ.). DOI: 10.20914/2310-1202-2017-4-71-74

15. Minu M. Matematicheskoe programmirovaniye. Teoriya i praktika (Mathematical Programming. Theory and Practice). Moscow, Nauka Publ., 1990, 485 p. (in Russ.).

16. Zhao X., Luh P.B., Wang J. Surrogate Gradient Algorithm for Lagrangian Relaxation. *Journal of optimization Theory and Applications*, 1999, Vol. 100, no. 3, pp. 699–712. DOI: 10.1023/A:1022646725208

17. Fisher M.L. The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Management science*, 2004, Vol. 50, no. 12 suppl., pp. 1861–1871. DOI: 10.1287/mnsc.1040.0263

18. Bagirov V.A., Karmitsa N., Mäkelä M.M. *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*. Cham, Heidelberg: Springer International Publishing, 2014, 372 p.

19. Burke J.V., Curtis F.E., Lewis A.S., Overton M.L., Simões L.E.A. (eds.) Gradient Sampling Methods for Nonsmooth Optimization. *Numerical nonsmooth optimization: State of the Art Algorithms*, 2020, pp. 201–225. DOI: 10.1007/978-3-030-34910-3\_6

20. Bagirov A.M., Gaudioso M., Karmitsa N., Mäkelä M.M., Taheri S. *Numerical Nonsmooth Optimization*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2020, 698 p. DOI: 10.1007/978-3-030-34910-3

21. Stetsyuk P.I. Subgradientnye metody ralgb5 i ralgb4 dlya minimizatsii ovrazhnykh vypuklykh funktsiy (Subgradient Methods ralgb5 and ralgb4 for Minimizing Gully Convex Functions). *Vychislitel'nye tekhnologii*, 2017, Vol. 22, no. 2, pp. 127–149. (in Russ.).

22. Shor N.Z. *Metody minimizatsii nedifferentsiruemykh funktsiy i ikh prilozheniya* (Methods for Minimizing Non-Differentiable Functions and their Applications). Kiev, Naukova dumka Publ., 1979, 199 p. (in Russ.).

23. Dem'yanov V.F., Malozemov V.L. *Vvedenie v minimaks* (Introduction to Minimax). Moscow, Nauka Publ., 1972, 368 p. (in Russ.).

24. Bugaev Yu.V., Shurupova I.Yu. Poisk vseh resheniy zadachi o naznacheniyakh (Search for all Solutions to the Assignment Problem). *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki. Sb. tr. Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* (Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics. Proc. of the International Scientific Conference). Voronezh, VGU Publ., 2024, pp. 1461–1465. (in Russ.).

*Received January 23, 2026*

### Information about the authors

Bugaev Yuriy Vladimirovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russian Federation, e-mail: y\_bugaev52@mail.ru.

Kalach Andrey Vladimirovich is Dr. Sc. (Chemistry), Professor, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation; Institute of Information Technologies RTU MIREA, Moscow, Russian Federation, e-mail: a\_kalach@mail.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8926-3151>.

Nikitin Boris Egorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Information Technology, Modeling and Management, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation.

Shurupova Irina Yur'evna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor Department of Mathematics, Military Educational and Scientific Center of the Air Force “Air Force Academy Named after Professor N.E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin”, Voronezh, Russian Federation, e-mail: i\_shur@mail.ru.