

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-2 ДЛЯ 4-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: karachik@susu.ru

Аннотация. Построена функция Грина краевой задачи Дирихле-2 для 4-гармонического уравнения в единичном шаре, граничные условия которой представляют собой сочетание граничных условий задач Навье и Навье–Неймана. Дано интегральное представление решения этой задачи как через найденную функцию Грина, так и ее представление, не включающее функцию Грина в явном виде.

Ключевые слова: 4-гармоническое уравнение; функция Грина; задача Дирихле-2; интегральное представление.

Введение. В настоящей работе рассматривается представление решения следующей краевой задачи для 4-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^4 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_2, \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_3, \quad (2)$$

где ν – внешняя единичная нормаль к ∂S и $\varphi_k \in C^{m-k-1+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0, \dots, 3$, $f \in C^1(\bar{S})$. Эту задачу будем называть задачей Дирихле-2 по причине ее близости в некотором смысле к классической задаче Дирихле, а решение будем искать из класса $u, \Delta u, \Delta \Delta u \in C^\varepsilon(\bar{S})$, где $\varepsilon > 0$ – малое, а оператор Δ определен ниже. Вариант задачи Дирихле-2 для 3-гармонического уравнения был сформулирован и исследован в [1], где были также доказаны подобные утверждения теоремы 6.

В качестве области приложения полученных результатов отметим, что 3-гармоническое и 4-гармоническое уравнения встречаются в областях механики сплошных сред, включая линейную теорию упругости и задачи вязкого течения. Именно в этих областях могут быть применены полученные результаты. Например, плоский медленно вращающийся поток высоковязкой жидкости в малых полостях моделируется 3-гармоническим уравнением для функции тока [2] при различных граничных условиях. В работе [3] предложен итерационный метод решения краевой задачи для 3-гармонического уравнения. Следует отметить, что точность такого приближенного метода может быть проверена с помощью точных решений, полученных, например, в данной работе.

Функции Грина для различных полигармонических краевых задач в явном виде встречаются во многих работах. Для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [4, 5] приведена явная форма функции Грина в секторе. В [6] дается явный вид функции Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре, а в [7, 8] находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения. Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в [9–14].

Элементарные решения. Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в единичном шаре S при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E_2(x, \xi) - E_2\left(\frac{x}{|x|}, |x| \xi\right),$$

где $E_2(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа, как его определил А.В. Бицадзе в [15]. Для $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множе-

ство $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. В [16] были введены элементарные функции для полигармонического уравнения следующего вида:

$$\mathcal{E}_{2m}(x, \xi) = \frac{(-1)^m}{(2m-2)!!} \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^*} \left(\ln |x-\xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases}$$

С.Л. Соболев в [17] использовал похожие фундаментальные решения полигармонического уравнения. В [16] было доказано, что функция вида

$$\mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} \mathcal{E}_{2m-2k}^*(x, \xi) \quad (3)$$

является функцией Грина задачи Дирихле при всех натуральных $n \geq 2$ без ограничений. В частности, для 4-гармонического уравнения функция Грина задачи Дирихле в S имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_8(x, \xi) = & \mathcal{E}_8(x, \xi) - \mathcal{E}_8^*(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{(|x|^2 - 1)(|\xi|^2 - 1)}{6} \mathcal{E}_6^*(x, \xi) \\ & - \frac{1}{4!!} \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)^2}{6 \cdot 4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{1}{6!!} \frac{(|x|^2 - 1)^3 (|\xi|^2 - 1)^3}{6!!} \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \end{aligned}$$

где обозначено $\mathcal{E}_{2k}^*(x, \xi) = \mathcal{E}_{2k} \left(\frac{x}{|x|}, |x| |\xi| \right)$.

Вспомогательные утверждения. В дальнейшем необходимо будет следующее интегральное представление функций класса $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D , полученное в [1, лемма 3.1].

Лемма 1. Функция $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ имеет следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi \\ & + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

где функция $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ определена в (3), $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, а ν – внешняя единичная нормаль к ∂D .

Далее необходим будет также следующий оператор $\Lambda v(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i u_{\xi_i}$, который преобразует гармонические функции $v(\xi)$ в гармонические функции $\Lambda v(\xi)$ и обладает свойством $\Lambda u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}|_{\partial S}$. Поскольку функции $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ являются по существу функцией разностного аргумента, то необходимо следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t > 0$ функция. Тогда

$$\Lambda_\xi \varphi(|x - \xi|) = \frac{\varphi'(|x - \xi|)}{|x - \xi|} (|\xi|^2 - x \cdot \xi), \quad (5)$$

а также

$$\Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi/|x||) = \frac{\varphi'(|x/|x| - \xi/|x||)}{|x/|x| - \xi/|x||} (|\xi|^2 |x|^2 - x \cdot \xi). \quad (6)$$

Кроме того, при $m > 1$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ верно равенство

$$\Delta_{\xi} \left(\varphi(|\xi|^2) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) \right) = 4 \left(|\xi|^2 \varphi''(|\xi|^2) + \varphi'(|\xi|^2) (\Lambda_{\xi} + n/2) \right) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) - |x|^2 \varphi(|\xi|^2) \mathcal{E}_{2m-2}^*(x, \xi). \quad (7)$$

Доказательство равенств (5) и (6), можно найти в [1, лемма 3.2], а доказательство равенства (7) в [1, лемма 3.3].

Лемма 3. При $m > 1$, $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ и $x \neq \xi \in S$ справедливо равенство

$$(\Lambda_{\xi} + n/2) \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) = m \mathcal{E}_{2m}^*(x, \xi) + \frac{1 - |x|^2 |\xi|^2}{2(2m-2)} \mathcal{E}_{2m-2}^*(x, \xi),$$

а также при $\xi \in \partial S$

$$(2\Lambda_{\xi} + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = -\Lambda_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi). \quad (8)$$

Свойства функции $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$. Сформулируем полезные ниже свойства функции Грина $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле.

Теорема 1. При $m \geq 3$, $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ и $x \neq \xi \in S$ справедливо равенство

$$\Delta_{\xi} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = -\mathcal{G}_{2m-2}(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^{m-1} (|\xi|^2 - 1)^{m-2}}{(2m-2)!!(2m-4)!!} (2\Lambda_{\xi} + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi). \quad (9)$$

Кроме того, при $m = 2$ и $n \geq 3$ верно равенство

$$\Delta_{\xi} \mathcal{G}_4(x, \xi) = -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda_{\xi} + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \quad (10)$$

которое при $n = 2$ справедливо на ∂S .

С помощью теоремы 1 нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Функция $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ при $m \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}_{m-1}$ обладает свойством

$$\Delta_{\xi}^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad 2k < m; \quad \frac{\partial \Delta_{\xi}^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu}|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad 2k + 1 < m. \quad (11)$$

На основании теорем 1 и 2 докажем существование функции Грина задачи (1)–(2).

Теорема 3. Функция Грина $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ задачи Дирихле при $n \notin \mathbb{N}_3^c = \{2, 4, 6\}$ является также и функцией Грина задачи Дирихле-2 (1)–(2).

Доказательство. Действительно, функция Грина задачи Дирихле $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ при $n \in \mathbb{N}_3$ обладает свойствами:

- а) является 4-гармонической при $x \neq \xi \in S$;
- б) имеет особенность фундаментального решения 4-гармонического уравнения [16];
- с) согласно равенствам (11) в случае четного $m = 4$ выполнены однородные условия (2) по переменной ξ :

$$\mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = \Delta_{\xi} \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu}|_{\partial S} = \frac{\partial \Delta_{\xi} \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0, \quad (12)$$

поскольку при $k = 0, 1$ имеем $2k < 4$ и $2k + 1 < 4$.

Все перечисленные выше свойства делают функцию $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ функцией Грина задачи Дирихле-2 в S . Теорема доказана.

Теорема 4. 1. При $n \in \mathbb{N}_3$ решение однородной задачи Дирихле-2 (1)–(2) (выполнены условия $\varphi_k = 0$), если оно существует, то может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_8(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

2. Функция $u(x)$, определяемая из (13) при $f \in C^1(\bar{S})$, является решением однородной задачи (1)–(2).

Доказательство. Воспользуемся леммой 1 при $D = S$ для $u(x)$ – решения однородной задачи (1)–(2). Оно может быть записано в виде (4)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^3 \left(\frac{\partial \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_8(x, \xi) \Delta^4 u(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Для $0 \leq k \leq 3$ обозначим

$$I_k(\xi) = \Delta^k u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi), \quad I'_k(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta^k u(\xi)) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi)$$

и покажем, что $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial S$ и для всех $0 \leq k \leq 3$.

Из условий задачи (1)–(2) и теоремы 2 при $0 \leq k \leq 1$ и $\xi \rightarrow \partial S$ вытекают равенства

$$\Delta_\xi^k u(\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_\xi^k u(\xi) = 0, \quad \Delta_\xi^k \mathcal{G}_8(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta_\xi^k \mathcal{G}_8(x, \xi) = 0.$$

Поэтому имеем $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ на ∂S при $0 \leq k \leq 1$. Если $2 \leq k \leq 3$, то $-2 \geq -k \geq -3$ и, значит, $0 \leq 3-k \leq 1$, а поэтому в силу условий $\Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) = 0$ на ∂S получим равенства $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ на ∂S и при $2 \leq k \leq 3$, т. е. $I_k(\xi) = I'_k(\xi) = 0$ при $\xi \in \partial S$ и для $0 \leq k \leq 3$. Поэтому все интегралы по ∂S из (14) обратятся в ноль, и мы получаем равенство (13).

В [16, теорема 2] показано, что функция $u(x)$, определяемая из (13) при $f \in C^1(\bar{S})$ и $n \geq 2$, является решением однородной задачи Дирихле для уравнения (1). В частности, $\Delta^m u = f$ в S . В силу симметрии функции $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ для нее будут также выполнены симметричные условия из теоремы 2 по переменной x

$$\Delta_x^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Delta_x^k \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = 0, \quad 0 \leq k \leq 1$$

для $x \in \partial S$. Поэтому функция $u(x)$ из (13) является решением задачи (1)–(2). Теорема доказана.

Основные результаты

Теорема 5. Пусть $n \in \mathbb{N}_3$, тогда решение задачи Дирихле-2 (1)–(2) для однородного уравнения (1) из класса $u \in C^8(S) \cap C^7(\bar{S})$ может быть записано в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^1 \left(\varphi_{2k}(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) - \varphi_{2k+1}(\xi) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \right) ds_\xi. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1)–(2). По лемме 1 при $D = S$ и $f = 0$ решение задачи (1)–(2) может быть записано в виде (4)

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^3 \left(\Delta^k u \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) - \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) \right) ds_\xi.$$

Поскольку здесь при $k = 2, 3$ имеем $3-k = 1, 0$, то в силу равенств (12) для $\mathcal{G}_8(x, \xi)$ слагаемые под знаком суммы при $k = 2, 3$ обращаются в ноль. Учитывая также граничные условия (2) задачи, запишем:

$$\Delta^k u|_{\partial S} = \varphi_{2k}, \quad \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_{2k+1},$$

где $k = 0, 1$, и, значит, приходим к равенству (15). Теорема доказана.

Определение 1. Обозначим через $u_{\varphi}^{(i)}(x)$ функцию, которая является решением задачи Дирихле-2 (1)–(2), в которой $\varphi_k = 0$ при $k \in \{0, \dots, 3\} \setminus \{i\}$, а $\varphi_i = \varphi$.

Теорема 6. Пусть $\varphi_i \in C^{3-i+\varepsilon}(\partial S)$ при $i = 0, \dots, 3$, тогда функции $u_{\varphi_i}^{(i)}(x)$, определяемые из равенств

$$\begin{aligned} u_{\varphi}^{(2k)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_{\xi}, k = 0, 1, \\ u_{\varphi}^{(2k+1)}(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta^{3-k} \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_{\xi}, k = 0, 1, \end{aligned} \quad (16)$$

удовлетворяют определению 1, а значит, решение (15) задачи Дирихле-2 (1)–(2) из теоремы 5 можно представить в виде суммы $u(x) = \sum_{k=0}^3 u_{\varphi_k}^{(k)}(x)$. Это решение $u(x)$ обладает следующей гладкостью $u, \Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u \in C^{\varepsilon}(\bar{S})$, где $\varepsilon > 0$ – малое.

Доказательство. 1. Найдем функцию $u_{\varphi}^{(3)}(x)$. Для этого вычислим значение $\Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)$. В соответствии с формулой (9) из теоремы 1 запишем

$$\Delta_{\xi} \mathcal{G}_8(x, \xi) = -\mathcal{G}_6(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3 (|\xi|^2 - 1)^2}{6!! 4!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi),$$

где обозначено

$$\mathcal{H}_1^*(x, \xi) = (2\Delta_{\xi} + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

Применим оператор Лапласа Δ_{ξ} к полученному равенству и опять по теореме 1 найдем

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) &= -\Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} \Delta_{\xi} (|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \\ &= \mathcal{G}_4(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)}{4!! 2!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} \Delta_{\xi} (|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично (7) при $\varphi(t) = (t - 1)^2$, с учетом гармоничности $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)$, запишем

$$\Delta_{\xi} (|\xi|^2 - 1)^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = 8|\xi|^2 \mathcal{H}_1^*(x, \xi) + 8(|\xi|^2 - 1)(\Delta_{\xi} + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \quad (17)$$

и, следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) &= \mathcal{G}_4(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2 (|\xi|^2 - 1)}{4!! 2!!} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \\ &\quad - 8 \frac{(|x|^2 - 1)^3}{6!! 4!!} (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Delta_{\xi} + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (18)$$

Поэтому, учитывая свойства функции Грина $\mathcal{G}_4(x, \xi)$ и равенство (8), получим

$$\Delta_{\xi}^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = \mathcal{G}_4(x, \xi)|_{\partial S} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S} = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Delta_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S},$$

где $\xi \in \partial S$. Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$u_{\varphi}^{(3)}(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_{\xi} = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_{\xi} = \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} u_{\varphi}(x),$$

где $u_{\varphi}(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_{\varphi}(x)|_{\partial S} = \varphi$. С помощью этой формулы и результатов работы [18] легко находятся полиномиальные решения задачи Дирихле-2.

Проверим, удовлетворяет ли 4-гармоническая функция $u_{\varphi}^{(3)}(x)$ определению 1, если $\varphi \in C^{\varepsilon}(\partial S)$, т. е. является ли она решением следующей задачи Дирихле-2

$$\Delta^4 u(x) = 0, x \in S; \quad u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \Delta u|_{\partial S} = 0, \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi. \quad (19)$$

Для этого проверим выполнимость граничных условий этой задачи. Поскольку

$$\Lambda u_\varphi^{(3)}(x) = 6|x|^2 \frac{(|x|^2 - 1)^2}{48} u_\varphi(x) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Lambda u_\varphi(x),$$

то $u_\varphi^{(3)}|_{\partial S} = \frac{\partial u_\varphi^{(3)}}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0$. Далее, используя (17) относительно x , найдем

$$\Delta u_\varphi^{(3)}(x) = \frac{1}{48} \Delta \left((|x|^2 - 1)^3 u_\varphi(x) \right) = \frac{1}{4} (|x|^2 - 1) \left(2|x|^2 + (|x|^2 - 1)(\Lambda_x + n/2) \right) u_\varphi(x),$$

где при $\varphi \in C^\varepsilon(\partial S)$ будем иметь $u_\varphi \in C^\varepsilon(\partial S)$ и значит, согласно [19, лемма 2.2], существуют пределы $\Delta u_\varphi^{(3)}|_{\partial S} = 0$ и

$$\Lambda \Delta u_\varphi^{(3)}(x)|_{\partial S} = \frac{1}{4} 4|x|^2 u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi.$$

Подобные пределы основаны на формуле (2.4.114) из [20, с. 146]. Итак, $u_\varphi^{(3)}(x)$ – решение задачи (19).

2. Для нахождения функции $u_\varphi^{(2)}(x)$ вычислим значение $\Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S}$. Сначала заметим, что в силу (6) $\Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x, \xi)$, а значит, можно записать

$$\Lambda_\xi \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = (2\Lambda_\xi + n - 2) \Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = (2\Lambda_\xi + n - 2) \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \quad (20)$$

Если применить оператор Λ_ξ к обеим частям равенства (18), затем воспользоваться свойством (20), а потом перейти к пределу при $\xi \rightarrow \partial S$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} &= \Lambda_\xi \mathcal{G}_4(x, \xi)|_{\partial S} + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S} \\ &\quad - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (2 + \Lambda_x + 2(\Lambda_x + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\partial S}, \end{aligned}$$

где $\xi \in \partial S$. Учитывая свойства функции Грина $\mathcal{G}_4(x, \xi)$ и равенство (8), которое означает, что $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$, получим

$$\Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} = - \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda_x + n + 2) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}.$$

Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(2)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^2 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda_x + n + 2) \right) \\ &\quad \times \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi = \left(\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} (3\Lambda + n + 2) \right) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi$, а $\Lambda = \Lambda_x$.

Легко видеть, что $u_\varphi^{(2)}|_{\partial S} = \frac{\partial u_\varphi^{(2)}}{\partial \nu}|_{\partial S} = 0$, а поскольку аналогично (17)

$$\Delta u_\varphi^{(2)}(x) = \left(|x|^2 - \frac{|x|^2 - 1}{2} (3\Lambda + n + 2) + \left(|x|^2 - 1 - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (3\Lambda + n + 2) \right) (\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x),$$

то $\Delta u_\varphi^{(2)}|_{\partial S} = \varphi$ и, кроме того, отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Delta u_\varphi^{(2)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda \Delta u_\varphi^{(2)}(x) \Big|_{\partial S} = (2 + \Lambda - (3\Lambda + n + 2) + 2(\Lambda + n/2))u_\varphi(x) \Big|_{\partial S} = 0.$$

Значит, функция $u_\varphi^{(2)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. В этом случае для существования пределов производных функции $u_\varphi^{(2)}(x)$ в граничных условиях задачи Дирихле-2 опять, в соответствии с [19, лемма 2.2], достаточно, чтобы $\varphi \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$.

3. Для нахождения функции $u_\varphi^{(1)}(x)$ вычислим значение $\Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S}$. Из (18) с учетом (10) получим

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) = & -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{H}_1^*(x, \xi) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{16} \Delta_\xi (|\xi|^2 - 1) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) \\ & - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{48} \Delta_\xi (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned}$$

Аналогично (17) и (7) при $\varphi(t) = t - 1$ вычислим

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 - 1) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = 4(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi),$$

$$\Delta_\xi (|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + n/2)) \mathcal{H}_1^*(x, \xi) = 4(\Lambda_\xi + n/2 + 1)(\Lambda_\xi + n/2) \mathcal{H}_1^*(x, \xi)$$

и поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) = & -\mathcal{G}_2(x, \xi) - \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda_\xi + n/2) \right. \\ & \left. + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda_\xi + n/2 + 1)(\Lambda_\xi + n/2) \right) \mathcal{H}_1^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (21)$$

Учитывая свойства функции $\mathcal{G}_2(x, \xi)$, равенства (20) и (8), получим

$$\Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) \Big|_{\partial S} = \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda_x + \frac{n}{2}) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda_x + \frac{n}{2} + 1)(\Lambda_x + \frac{n}{2}) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) \Big|_{\partial S},$$

где $\xi \in \partial S$. Таким образом, в соответствии с (16) находим

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(1)}(x) = & \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Delta_\xi^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_\xi = - \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda + n/2) \right. \\ & \left. + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_\xi = \\ & \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} (\Lambda + n/2) + \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

где $u_\varphi(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi$ и $\Lambda = \Lambda_x$.

Нетрудно непосредственно видеть, что $u_\varphi^{(1)}|_{\partial S} = 0$ и $\frac{\partial u_\varphi^{(1)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda u_\varphi^{(1)}|_{\partial S} = \varphi$. Поскольку аналогично (17) верно равенство

$$\begin{aligned} \Delta u_\varphi^{(1)}(x) = & (-2|x|^2 (\Lambda + n/2) + 2|x|^2 (|x|^2 - 1)(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \\ & + (2 - 2(|x|^2 - 1)(\Lambda + n/2) + (|x|^2 - 1)^2 (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2))(\Lambda + n/2)) u_\varphi(x), \end{aligned}$$

то из него получаем

$$\Delta u_\varphi^{(1)}|_{\partial S} = (-2(\Lambda + n/2) + 2(\Lambda + n/2)) u_\varphi(x)|_{\partial S} = \varphi,$$

и, кроме того, из него следует, что

$$\begin{aligned} \Lambda \Delta u_{\varphi}^{(1)}(x)|_{\partial S} &= (-2(\Lambda + n/2)(\Lambda + 2) + 4(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) + 2(\Lambda + n/2)\Lambda \\ &- 4(\Lambda + n/2)^2)u_{\varphi}(x)|_{\partial S} = -2(\Lambda + 2 - 2\Lambda - n - 2 - \Lambda + 2\Lambda + n)(\Lambda + n/2)u_{\varphi}(x)|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому функция $u_{\varphi}^{(1)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. Для существования пределов производных функции $u_{\varphi}^{(1)}(x)$ в граничных условиях соответствующей задачи Дирихле-2 в соответствии с [19, лемма 2.2] достаточно, чтобы $\varphi \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$.

4. Для нахождения функции $u_{\varphi}^{(0)}(x)$ вычислим значение $\Lambda_{\xi} \Delta_{\xi}^3 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S}$. Из (21) с учетом равенства $\mathcal{H}_1^*(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = -\Lambda_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S}$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{\xi} \Delta_{\xi}^3 \mathcal{G}_8(x, \xi)|_{\partial S} &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_x + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2 + 1)(\Lambda_x + n/2) \right) (-\Lambda_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}), \end{aligned}$$

откуда в соответствии с (16) находим:

$$\begin{aligned} u_{\varphi}^{(0)}(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^3 \mathcal{G}_8(x, \xi) ds_{\xi} = \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_x + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda_x (\Lambda_x + n/2 + 1)(\Lambda_x + n/2) \right) \frac{(-1)}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi(\xi) \Lambda_{\xi} \mathcal{G}_2(x, \xi) ds_{\xi} \\ &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \Lambda (\Lambda + n/2) - \frac{(|x|^2 - 1)^3}{12} \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \right) u_{\varphi}(x), \end{aligned}$$

где $u_{\varphi}(x)$ – гармоническая в S функция такая, что $u_{\varphi}(x)|_{\partial S} = \varphi$. Нетрудно видеть, что

$$u_{\varphi}^{(0)}|_{\partial S} = \varphi \text{ и } \frac{\partial u_{\varphi}^{(0)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda u_{\varphi}^{(0)}|_{\partial S} = 0$$

и аналогично (17)

$$\begin{aligned} \Delta u_{\varphi}^{(0)}(x) &= (2|x|^2 \Lambda (\Lambda + n/2) - 2|x|^2 (|x|^2 - 1) \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2) \\ &+ (-2\Lambda + 2(|x|^2 - 1) \Lambda (\Lambda + n/2) - (|x|^2 - 1)^2 \Lambda (\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2))(\Lambda + n/2)) u_{\varphi}(x). \end{aligned}$$

Отсюда, после некоторых простых преобразований, получим

$$\Delta u_{\varphi}^{(0)}(x) = -(|x|^2 - 1)^2 \Lambda (\Lambda + n/2)(\Lambda + n/2 + 1)(\Lambda + n/2 + 2) u_{\varphi}(x).$$

Поэтому $\Delta u_{\varphi}^{(0)}(x)|_{\partial S} = 0$ и $\frac{\partial \Delta u_{\varphi}^{(0)}}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Lambda \Delta u_{\varphi}^{(0)}(x)|_{\partial S} = 0$. Таким образом, функция $u_{\varphi}^{(0)}(x)$ является решением соответствующей ей задачи Дирихле-2. Для существования пределов производных функции $u_{\varphi}^{(0)}(x)$ в граничных условиях соответствующей задачи Дирихле-2 в соответствии с [19, лемма 2.2] достаточно чтобы $\varphi \in C^{3+\varepsilon}(\partial S)$. Теорема доказана.

Замечание 1. При нахождении функций $u^{(k)}(x)$, $k = 0, \dots, 3$ никаких условий на размерность пространства n не возникло, поэтому, вероятно, что в теореме 5 условие $n \in \mathbb{N}_3$ можно снять.

Литература

1. Karachik, V.V. Green's Function of One Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball / V.V. Karachik // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2026. – Vol. 71. – P. 662–685.
2. An, Q. A decoupled Finite Element Method for the Triharmonic Equation / Q. An, X. Huang, C. Zhang // Appl. Math. Lett. – 2024. – Vol. 147. – P. 108843.

3. Dang, Q.A. Iterative Method for Solving a Boundary Value Problem for Triharmonic Equation / Q.A. Dang // Vietnam. J. Math. – 2002. – Vol. 30. – P. 71–78.
4. Wang, Y. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector / Y. Wang, L. Ye // Complex Variables Elliptic Equ. – 2013. – Vol. 58, no. 1. – P. 7–22.
5. Wang, Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector / Y. Wang // Complex Variables Elliptic Equ. – 2014. – Vol. 59, no. 5. – P. 732–749.
6. Карачик, В.В. Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 1. – С. 87–105.
7. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball / V.V. Karachik // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, no. 16. – Article no. 1907.
8. Karachik, V.V. On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball / V.V. Karachik // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2014. – Vol. 8, no. 1. – P. 63–75.
9. Akel, M. Neumann Function for a Hyperbolic Strip and a Class of Related Plane Domains / M. Akel, H. Begehr // Mathematische Nachrichten. – 2017. – Vol. 290, Iss. 4. – P. 490–506.
10. Lin, H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs / H. Lin // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2020. – Vol. 67. – P. 79–95.
11. Harkonen, V.J. Exact Factorization of the Many-Body Green's Function Theory of Electrons and Nuclei / V.J. Harkonen // Phys. Rev. B. – 2022. – Vol. 106. 205137.
12. Dong, H. Optimal Estimates for the Conductivity Problem by Green's Function Method / H. Dong, H. Li // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2019. – Vol. 231, no. 3. – P. 1427–1453.
13. Grebenkov, D.S. Semi-Analytical Computation of Laplacian Green Functions in Three-Dimensional Domains with Disconnected Spherical Boundaries / D.S. Grebenkov, S.D. Traytak // Journal of Computational Physics. – 2019. – Vol. 379. – P. 91–117.
14. Hsu, C.-W. Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions / C.-W. Hsu, C. Hwu // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2020. – Vol. 476, no. 2233. – P. 20190437.
15. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
16. Karachik, V.V. On Green Function of the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equation in the Ball / V.V. Karachik // Axioms. – 2023. – Vol. 12, no. 6. – P. 543.
17. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.
18. Карачик, В.В. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре / В.В. Карачик, Н.А. Антропова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. 15. № 2 (50). – С. 86–98.
19. Алимов, Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной / Ш.А. Алимов // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 10. – С. 1738–1751.
20. Карачик, В.В. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения в шаре: монография / В.В. Карачик. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. – 476 с.

Поступила в редакцию 18 января 2026 г.

Сведения об авторе

Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник, кафедры «Математический анализ и методика преподавания математики», Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: karachikvv@susu.ru.

GREEN'S FUNCTION OF THE DIRICHLET-2 PROBLEM FOR THE 4-HARMONIC EQUATION IN A BALL**V.V. Karachik***South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation**E-mail: karachik@susu.ru*

Abstract. This paper discusses the construction of the Green's function for the Dirichlet-2 boundary value problem for the 4-harmonic equation in a single ball. The boundary conditions of this problem are a combination of those for the Navier and Navier–Neumann problems. An integral representation of the solution to this problem is provided, both through the found Green's function and its representation that does not explicitly include the Green's function.

Keywords: 4-harmonic equation; Green's function; Dirichlet-2 problem; integral representation.

References

1. Karachik V.V. Green's Function of One Problem for the 3-Harmonic Equation in a Ball. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2026, Vol. 71, no. 3, pp. 662–685. DOI: 10.1080/17476933.2025.2463481
2. An Q., Huang X., Zhang C. A Decoupled Finite Element Method for the Triharmonic Equation. *Appl. Math. Lett.*, 2024, Vol. 147, 108843. DOI 10.1016/j.aml.2023.108843.
3. Dang, Q.A. Iterative Method for Solving a Boundary Value Problem for Triharmonic Equation. *Vietnam. J. Math.*, 2002, Vol. 30, pp. 71–78.
4. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green Function and Biharmonic Neumann Function in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2013, Vol. 58, no. 1, pp. 7–22. DOI: 10.1080/17476933.2010.551199
5. Wang Y. Tri-Harmonic Boundary Value Problems in a Sector. *Complex Variables Elliptic Equ.*, 2014, Vol. 59, no. 5, pp. 732–749. DOI: 10.1080/17476933.2012.759566
6. Karachik V.V. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. *Mathematical Notes*, 2020, Vol. 107, no. 1, pp. 105–120. DOI: 10.1134/S0001434620010101
7. Karachik, V.V. Dirichlet and Neumann Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Mathematics*, 2021, Vol. 9, no. 16, Article no. 1907. DOI: 10.3390/math9161907
8. Karachik V.V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, Vol. 8, no. 1, pp. 63–75. DOI: 10.1134/S1990478914010074
9. Akel M., Begehr H. Neumann Function for a Hyperbolic Strip and a Class of Related Plane Domains. *Mathematische Nachrichten*, 2017, Vol. 290, Iss. 4, pp. 490–506. DOI: 10.1002/mana.201500501
10. Lin H. Harmonic Green and Neumann Functions for Domains Bounded by Two Intersecting Circular Arcs. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, Vol. 67, pp. 79–95. DOI: 10.1080/17476933.2020.1816984
11. Harkonen V.J. Exact Factorization of the Many-Body Green's Function Theory of Electrons and Nuclei. *Phys. Rev. B.*, 2022, Vol. 106, 205137. DOI: 10.1103/PhysRevB.106.205137
12. Dong H., Li H. Optimal Estimates for the Conductivity Problem by Green's Function Method. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2019, Vol. 231, no. 3, pp. 1427–1453. DOI: 10.1007/s00205-018-1301-x
13. Grebenkov D.S., Traytak S.D. Semi-Analytical Computation of Laplacian Green Functions in Three-Dimensional Domains with Disconnected Spherical Boundaries. *Journal of Computational Physics*, 2019, Vol. 379, pp. 91–117. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.033

14. Hsu C.-W., Hwu C. Green's Functions for Unsymmetric Composite Laminates with Inclusions. *Proc. Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2020, Vol. 476, 20190437. DOI: 10.1098/rspa.2019.0437
15. Bitsadze A.V. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics). Moscow: Nauka Publ., 1982, 336 p. (in Russ.).
16. Karachik V.V. On Green Function of the Dirichlet Problem for Polyharmonic Equation in the Ball. *Axioms*, 2023, Vol. 12, no. 6, p. 543. DOI: 10.3390/axioms12060543
17. Sobolev S.L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction* (Introduction to the Theory of Cubature Formulas). Moscow: Nauka; 1974, 808 p.
18. Karachik V.V., Antropova N.A. On Polynomial Solutions of the Dirichlet Problem for the Bi-harmonic Equation in a Ball. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, Vol. 15, no. 2, pp. 86–98. (in Russ.).
19. Alimov Sh. A. On a Problem with an Oblique Derivative. *Differ. Uravn.*, 1981, Vol. 17, Iss.10, pp. 1738–1751. (in Russ.).
20. Karachik V.V. *Nekotorye kraevye zadachi dlya poligarmonicheskogo uravneniya v share: monografiya* (Some Boundary Value Problems for the Polyharmonic Equation in a Ball: Monograph). Chelyabinsk, Publishing center of SUSU, 2024, 476 p. (in Russ.).

Received January 18, 2026

Information about the author

Karachik Valeriy Valentinovich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Senior Staff Scientist, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: karachikvv@susu.ru.