

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.В. Келлер^{1,2}, И.М. Манаков²

¹ Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация

² Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: alevtinak@inbox.ru, immanakov@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена исследованию задачи смешанного управления для одной полулинейной системы леонтьевского типа с начальным условием Шоултера – Сидорова. Постановка задачи позволила применить методы исследования разрешимости задачи оптимального управления для полулинейного уравнения соболевского типа к задаче смешанного управления для полулинейной системы леонтьевского типа. Доказана теорема существования решения этой задачи. Актуальность исследования разрешимости поставленной задачи обусловлена наличием прикладных задач, в основе которых лежит полулинейная система леонтьевского типа, а методы их исследования позволяют продолжить численные исследования задачи оптимального управления.

Ключевые слова: задача смешанного управления; полулинейная система леонтьевского типа; задача Шоултера–Сидорова.

Введение

Рассмотрим полулинейную систему леонтьевского типа

$$L\dot{x}(t) + Mx(t) + N(x(t)) = u(t), \quad \det L = 0 \quad (1)$$

с начальным условием Шоултера–Сидорова

$$L(x(0) - u_0) = 0. \quad (2)$$

Здесь L, M – квадратные матрицы порядка n , N – нелинейный оператор, заданный формулой

$$\langle N(x), x \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} x_1^{2j} + \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} x_2^{2j} + \dots + \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} x_m^{2j}, \quad \alpha_{ij} \geq 0, m \geq 1, \quad (3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ и $\dot{x}(t) = \text{col}(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t))$ – вектор-функции состояния и скорости изменения состояния системы (1) соответственно; $u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$, $u_0 = \text{col}(u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0n})$. Вырожденную систему дифференциальных уравнений (1), являющуюся конечномерным аналогом полулинейного уравнения соболевского типа [1], будем называть полулинейной системой леонтьевского типа. Исследование задачи Шоултера–Сидорова (2) для линейных ($N \equiv \mathbf{O}$) и полулинейных систем леонтьевского типа (1) обусловлено наличием прикладных задач, изучение каждой из которых представляет самостоятельный интерес, например, вырожденная балансовая динамическая модель производственного предприятия, вырожденная балансовая модель клеточного цикла, математическая модель сложного измерительного устройства.

Целью работы является исследование задачи смешанного управления

$$J(u, u_0) = J(x(u, u_0), u, u_0) = \alpha \|C(x(t, u(t), u_0) - x_0(t))\|_X^{2m} + \beta \|u(t)\|_U^{\frac{2m}{2m-1}} + \gamma \|u_0\|_V^{2m} \rightarrow \min, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (4)$$

решениями задачи (1), (2). Здесь $X = L_{2m}((0, T), \mathbf{R}^n)$, $X = \{x \in X : \dot{x} \in \text{coim} L\}$ – пространство состояний, $U \times V$ – пространство управления, где $U = L_{\frac{2m}{2m-1}}((0, T), \mathbf{R}^n)$, $V = L_{2m}(\mathbf{R}^n)$, C – матрица

размера $r \times n, r \leq n$. Определим множества:

1) $\text{coim} L = \{x \in X : [x, \varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}$, где $[\cdot, \cdot]$ – скалярное произведение в $L_2((0, T), \mathbf{R}^n)$;

2) допустимых управлений как замкнутое выпуклое подмножество $U_\partial \times V_\partial \subset U \times V$ в пространстве управления $U \times V$.

Постановка задачи оптимального управления для уравнения соболевского типа и исследование ее разрешимости берут начало с работы [2]. Задачи оптимального управления стали активно исследоваться как аналитически [3], так и численно в прикладных исследованиях [4], кроме того, изучались и другие виды задач управления [5].

1. Исследование задачи управления

Исследование задачи управления проведем в два этапа: построение множества допустимых решений, а затем получение условий его существования. Сначала покажем существование решения задачи Шоултера–Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \quad (5)$$

для уравнения (1) с заданными функцией $u = u(t)$ и начальным состоянием x_0 в (5) на основе метода фазового пространства [6]. Классическим решением уравнения (1) будем называть вектор-функцию $x \in C^k((0, T); X)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, если при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ она удовлетворяет (1). Классическое решение уравнения (1) является решением задачи Шоултера – Сидорова (1), (5), если оно удовлетворяет (5).

Для доказательства разрешимости задачи Шоултера–Сидорова (1), (5) воспользуемся результатом, изложенным в [7], показывающим существование решения задачи Шоултера – Сидорова для системы вырожденных дифференциальных уравнений:

$$A\dot{x} = F(x), \quad A(x(0) - x_0) = 0. \quad (6)$$

Теорема 1. [7] Пусть A – квадратная матрица порядка n , $\text{rank } A \leq n$; P^A – проектор на левый аннулятор матрицы A вдоль образа, P_A – проектор на правый аннулятор матрицы A вдоль кообраза; $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ – вектор-функция на $\mathbb{R}^n$, $F_i \in C^k$, $k \geq 1$. Задача (6) локально разрешима для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если $\text{rank } P^A F'_{x_0} P_A = n - \text{rank } A$, где F'_{x_0} – матрица Якоби отображения F в точке x_0 .

Доказательство теоремы 1 основано на методе фазового пространства [7]. Первоначально данный результат был получен при исследовании локальной разрешимости задачи Коши [6].

Построим множество $\mathbf{B} = \{x \in X : P^L(Mx + N(x)) = P^L u\}$, в котором лежат решения уравнения (1) при всех $T \in \mathbb{R}_+$. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{B}$ и сужение оператора $P^L(M + N'_{x_0})P_L$ рассмотрим в качестве F'_v , здесь N'_{x_0} – производная Фреше оператора N в точке x_0 .

Теорема 2. Пусть L , M – квадратные неотрицательно определенные матрицы порядка n , кроме того, L – самосопряженная и $\dim \ker L = \dim \text{coker } L$, оператор N задан формулой (3). Тогда для любого $T \in \mathbb{R}_+$, $u \in U$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение задачи (1), (5).

Доказательство. Чтобы показать разрешимость задачи (1), (5), установим невырожденность матрицы Якоби отображения $M + N - uI$, или невырожденность оператора $P^L(M + N'_y)P_L$. В силу построения операторов M , N имеем

$$P^L(M + N'_y)P_L = \langle (M + N'_y)x, x \rangle = \sum_{j=1}^m x_j^2 + \sum_{j=1}^m a_{1j} 2j y_1^{2j-2} x_1^2 + \sum_{j=1}^m a_{2j} 2j y_2^{2j-2} x_2^2 + \dots + \sum_{j=1}^m a_{nj} 2j y_n^{2j-2} x_n^2 > 0.$$

По построению оператор $N \in C^\infty(L_{2m}((0, T), \mathbb{R}^n); L_{\frac{2m}{2m-1}}((0, T), \mathbb{R}^n))$ s -монотонен [7].

Построим норму $|x|^2 = \langle Lx, x \rangle$ в $\text{coim } L$, она эквивалентна норме, индуцированной из надпространства $L_2((0, T), \mathbb{R}^n)$. Умножив скалярно (1) на x и применив неравенство Гильберта, получим

$$\langle Lx(t), x(t) \rangle + 2 \int_0^t \langle Mx, x \rangle d\tau + 2 \int_0^t \langle N(x), x \rangle d\tau = 2 \int_0^t \langle u, x \rangle d\tau + \langle Lx(0), x(0) \rangle, \\ |x(t)|^2 + C_1 \|x\|_{L_2((0,T), \mathbf{R}^n)}^2 + C_2 \|x\|_{L_{2m}((0,T), \mathbf{R}^n)}^{2m} \leq C_3 \|u\|_{L_{\frac{2m}{2m-1}}((0,T), \mathbf{R}^n)}^{\frac{2m}{2m-1}} + |x_0|^2. \quad (7)$$

Из полученной оценки следует, что временной интервал $(0, T_0(x_0))$ является независимым от значения x_0 , поэтому допустимо считать, что $T_0(x_0) = T$.

В силу непрерывности вложения $H^1((0, T); \mathbf{R}^n) \hookrightarrow C^1([0, T]; \mathbf{R}^n)$ классическое решение (1) является также и сильным решением (1) [2]. Под сильным решением будем понимать вектор-функцию $x \in H^1((0, T); \mathbf{R}^n)$, если она п.в. на $(0, T)$ обращает его в тождество.

Перейдем к исследованию задачи управления (1), (2), (4).

Определение 2. Совокупность $(x(v, v_0), v, v_0) \in \mathbf{X} \times U_\partial \times V_\partial$ назовем решением задачи смешанного управления (1), (2), (4), если

$$J(v, v_0) = J(x(v, v_0), v, v_0) = \min_{(u, u_0)} J(x(u, u_0), u, u_0),$$

где $(x, u, u_0) \in \mathbf{X} \times U \times V$ удовлетворяет (1), (2) в смысле сильного решения [1–3, 5]. Допустимым будем называть множество $\mathbf{A} = \{(x, u, u_0) : (x(u, u_0), u, u_0) \in \mathbf{X} \times U_\partial \times V_\partial\}$, где (x, u, u_0) удовлетворяет задаче (1), (2).

Теорема 3. Пусть L, M – квадратные неотрицательно определенные матрицы порядка n , кроме того, L – самосопряженная и $\dim \ker L = \dim \operatorname{coker} L$, оператор N задан формулой (3). Тогда для любого $T \in \mathbf{R}_+$ существует решение задачи (1), (2), (4).

Доказательство. Отметим, что структура доказательства этой теоремы построена в соответствии с классическими методами исследования разрешимости задач оптимального управления [8–10].

1. В силу существования единственного решения задачи (1), (2), определен гомеоморфизм $x = x(u, u_0)$. Таким образом, допустимое множество $\mathbf{A}$ не пусто и найдутся последовательности $\{(u_l, u_{0l})\} \in U_\partial \times V_\partial$ такие, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} J(u_l, u_{0l}) = \min_{(u, u_0)} J(u, u_0).$$

Из оценки, приведенной в (7), получим

$$\|u_l\|_U \leq \text{const}, \|u_{0l}\|_{V_\partial} \leq \text{const}, \quad \forall l. \quad (8)$$

Таким образом, показали, что $\{(u_l, u_{0l})\}$ ограничены.

2. Получив (8), выберем подпоследовательности $\{u_l\} : u_l \rightarrow v$, $\{u_{0l}\} : u_{0l} \rightarrow v_0$, которые являются слабо сходящимися. Заметим, что их пределы $(v, v_0) \in U_\partial \times V_\partial$ на основании теоремы Мазура. Пусть $x_l = x(u_l, u_{0l})$ удовлетворяет задаче

$$L\dot{x}_l + Mx_l + N(x_l) = u_l, \quad (9)$$

$$L(x_l(0) - u_{0l}) = 0. \quad (10)$$

В силу выполнения априорной оценки (7) и свойства $2m$ -коэрцитивности оператора N [7] получим $\|x_l\|_X \leq \text{const} \quad \forall l$.

3. Переходя к слабому пределу в уравнении состояния и используя метод монотонности, получим, что слабый предел последовательности $\{(x_l, u_l, v_l)\}$ удовлетворяет

$$L \frac{dx}{dt} + Mx + N(x) = v, \quad L(x(0) - v_0) = 0.$$

Доказательство того, что $N(x_l) \rightarrow N(x)$ основано на методе монотонности [8, 9].

4. Тогда $x = x(v, v_0)$ и $\liminf J(u_l, u_{0l}) \geq J(v, v_0)$.

Таким образом, показано существование решения задачи смешанного управления решениями для полулинейной системы леонтьевского типа с начальным условием Шоултера–Сидорова.

Литература

1. Келлер, А.В. Системы леонтьевского типа и прикладные задачи / А.В. Келлер // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 23–42.
2. Свиридюк, Г.А. Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1912–1919.
3. Zamyshlyayeva, A.A. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models / A.A. Zamyshlyayeva, N.A. Manakova, O.N. Tsyplenkova // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2020. – Т. 13, № 1. – С. 5–27.
4. Manakova, N.A. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with The Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment / N.A. Manakova, O.V. Gavrilova, K.V. Perevozchikova // Differential Equations and Control Processes. – 2020. – № 4. – С. 115–126.
5. Keller, A.V. The Existence of a Unique Solution to A Mixed Control Problem for Sobolev-Type Equations / Keller A.V., Ebel A.A. // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 121–127.
6. Свиридюк, Г.А. Об одной сингулярной системе обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.А. Свиридюк // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 9. – С. 1637–1639.
7. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Известия вузов. Математика. – 1990. – № 2. – С. 55–61.
8. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
9. Lions, J.-L. Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles / J.-L. Lions. – Paris, Dunod, 1968. – 426 p.
10. Фурсиков, А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А.В. Фурсиков. – Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.

Поступила в редакцию 16 марта 2026 г.

Сведения об авторах

Келлер Алевтина Викторовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедры прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация; кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: alevtinak@inbox.ru.

Манаков Игорь Михайлович – аспирант, кафедра математического и компьютерного моделирования, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: immanakov@gmail.com.

A STUDY OF A MIXED CONTROL PROBLEM FOR A LEONTIEV-TYPE SEMILINEAR SYSTEM**A.V. Keller^{1,2}, I.M. Manakov²**¹ Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation² South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: alevtinak@inbox.ru, immanakov@gmail.com

Abstract. This paper investigates a mixed control problem for a Leontief-type semilinear system with a Showalter–Sidorov initial condition. The problem statement allowed applying methods for studying the solvability of an optimal control problem for a Sobolev-type semilinear equation to a mixed control problem for a Leontief-type semilinear system. A theorem on the existence of a solution to this problem is proved. The relevance of studying the solvability of this problem stems from the existence of applied problems based on a Leontief-type semilinear system. The research methods used here allow for further numerical studies of the optimal control problem.

Keywords: mixed control problem; semi-linear Leontief type system; Showalter–Sidorov problem.

References

1. Keller A.V. Leontief-Type Systems and Applied Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2022, Vol. 15, no. 1, pp. 23–42. DOI: 10.14529/mmmp220102
2. Sviridyuk G.A., Efremov A.A. Optimal Control of Sobolev Type Linear Equations with Relativity p-Sectorial Operators. *Differential Equations*, 1995, Vol. 31, no. 11, pp. 1882–1890.
3. Zamyshlyayeva A.A., Manakova N.A., Tsyplenkova O.N. Optimal Control in Linear Sobolev Type Mathematical Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, Vol. 13, no. 1, pp. 5–27. DOI: 10.14529/mmmp200101
4. Manakova N.A., Gavrilova O.V., Perevozchikova K.V. Numerical Investigation of the Optimal Measurement for a Semilinear Descriptor System with the Showalter–Sidorov Condition: Algorithm and Computational Experiment. *Differential Equations and Control Processes*, 2020, no. 4, pp. 115–126.
5. Keller A.V., Ebel A.A. The Existence of a Unique Solution to A Mixed Control Problem for Sobolev-Type Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 3, pp. 121–127. DOI: 10.14529/mmmp140313
6. Sviridyuk G.A. A Singular System of Ordinary Differential Equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1987, Vol. 23, no. 9, pp. 1637–1639.
7. Sviridyuk G.A. A Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1989, Vol. 33, no. 2, pp. 62–73.
8. Lions J.-L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
6. Lions J.-L. *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Paris, Dunod, 1968, 426 p. (in French).
10. Fursikov, A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* (Optimal Management of Distributed Systems. Theory and Application). Novosibirsk, Nauchnaya kniga Publ., 1999, 350 p. (in Russ.).

Received March 16, 2026

Information about the authors

Keller Alevtina Viktorovna is Doctor Physics and Mathematics, professor, Department of Applied Mathematics and Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation; Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: alevtinak@inbox.ru.

Manakov Igor Mikhailovich is graduate student, Department of Mathematical and Computer Modelling, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: immanakovan@gmail.com.