

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПОРИСТЫЙ СЛОЙ

А.В. Рязских, В.И. Рязских

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж,

Российская Федерация

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Аннотация. На основе нестационарного упругого режима фильтрации вязкой несжимаемой жидкости при ее изотермической прокачке через изотропный пористый слой сформулированы начально-краевые задачи для одномерного поля давления в предположении, что режим фильтрации подчиняется закону Дарси. Задачи описывают режимы включения и выключения прокачки, а также стационарный режим движения ньютоновской среды, подаваемой с верхней поверхности пористой среды и выходящей через нижнюю ее ограничивающую поверхность с бесконечно большой проницаемостью границы. Уравнения сформулированных начально-краевых задач относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных с граничными условиями типа Дирихле и (или) фон Неймана. В случае импульсного ввода граничное условие представлено структурой, состоящей из разности функций Хэвисайда, одна из которых имеет сдвиг, равный величине длительности импульса. В силу их линейности получены аналитические решения с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа в виде явных соотношений для безразмерных профилей давления и скорости по высоте пористого слоя. Поскольку решения представлены быстросходящимися рядами Фурье с мультипликативной экспонентой, то использовано понятие «регулярного» режима (в разложении учитывается только первое слагаемое), найдены приближенные соотношения для определения длительности режимов установления при пуске и останове прокачки жидкой среды через пористый слой. Полученные решения обобщены с помощью импульсного краевого условия. Вычислительные эксперименты показали, что безразмерное время приближения к линейному профилю давления в режиме включения прокачки и ее выключения составляет приблизительно 0,537 с относительной точностью 0,01, определяемой по скорости жидкой среды на выходе из пористого слоя. Приведен пример, показывающий, что время установления может достигать значительной величины, которую необходимо учитывать при функционировании различных технических устройств, составным элементом которых являются пористые слои.

Ключевые слова: пористый слой; ньютоновская жидкость; прокачка; напорное течение; время установления; закон Дарси.

Введение. Напорная прокачка жидкостных сред через пористые слои наиболее часто применяется при их очистке от примесей, находящихся в различном агрегатном состоянии, с использованием таких механизмов, как осаждение, сорбция, адгезия и др. [1]. Для проектирования систем, реализующих этот процесс, необходима информация о нестационарном режиме функционирования, например, при начале или окончании работы таких устройств [2].

Структура пористых сред пока еще не до конца формализована, и поэтому, как правило, ограничиваются ее интегральными характеристиками: пористостью ε и проницаемостью k [3]. Для большинства грубодисперсных пористых сред (эффекты поверхностного натяжения пренебрежимо малы по сравнению с вязкими силами) справедлива линейная функциональная зависимость между перепадом давления в жидкости и ее расходом [4]. В связи с этим в случае ламинарного течения ньютоновской жидкости при отсутствии деформации пористого скелета гидродинамика описывается уравнением Дарси–Бринкмана [5]

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \right] = \rho_f \bar{g} - \nabla p + \mu_f \nabla^2 \bar{u} - \mu_f \frac{\bar{u}}{k}, \quad (1)$$

где τ – время; ρ_f , μ_f – плотность и динамическая вязкость жидкости; $\bar{u}$ – вектор скорости; $\bar{g}$ – вектор ускорения свободного падения; p – давление. К уравнению (1) добавляется уравнение неразрывности

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_f}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho_f \bar{u}) = 0. \quad (2)$$

При неизменной структуре пористой матрицы нестационарные локальные флуктуации скорости отсутствуют, а режим ламинарного течения в поровом пространстве нивелирует инерционность потока. Кроме того, так как преобладает напорное течение, то

$$|\rho_f \bar{g} + \mu_f \nabla^2 \bar{u}| \ll |\nabla p + \mu_f \bar{u}/k|,$$

т. е. в этом случае (1) трансформируется в соотношение

$$\bar{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (3)$$

которое является математической формализацией закона Дарси.

Если считать, что в первом приближении сжимаемость жидкости от давления имеет линейную зависимость [6]

$$\rho_f = \rho_{f_0} [1 + (p - p_0)/k_p],$$

где ρ_{f_0} – плотность жидкости при характерном давлении p_0 ; k_p – модуль объемного сжатия жидкости, тогда

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial \tau} = \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\rho_{f_0}}{k_p} \frac{\partial p}{\partial \tau}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) следует уравнение, описывающее нестационарное поле давлений

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \chi \nabla^2 p, \quad (5)$$

где $\chi = k \cdot k_p / (\varepsilon \mu)$; которое дополняют соответствующим набором начального и граничных условий.

В данной работе анализируется задача об оценке длительности переходных режимов прокачки вязкой несжимаемой среды через плоскую изотропную пористую среду для изотермических условий без учета миграции примесей к поверхности пористого скелета.

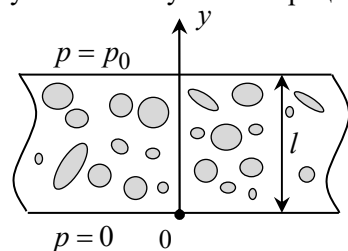


Рис. 1. Расчетная схема

Постановка и решение задачи. Однонаправленное течение вязкой несжимаемой жидкости осуществляется под действием избыточного давления p_0 с верхней поверхности пористого слоя (рис.1). В этом случае уравнение (5) в выбранной системе координат принимает вид

$$\frac{\partial p(y, \tau)}{\partial \tau} = \chi \frac{\partial^2 p(y, \tau)}{\partial y^2} \quad (6)$$

с соответствующим начальным

$$p(y, 0) = 0 \quad (7)$$

и граничными условиями

$$p(0, \tau) = 0, \quad (8)$$

$$p(l, \tau) = p_0. \quad (9)$$

Система (6)–(9) в безразмерной форме записи такова:

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (10)$$

$$P(Y, 0) = 0; \quad (11)$$

$$P(0, \theta) = 0; \quad (12)$$

$$P(1, \theta) = 1, \quad (13)$$

где $\theta = \tau \chi / l^2$; $Y = y/l$; $P = p/p_0$.

Линейный характер начально-краевой задачи для параболического уравнения (6) с краевыми условиями (7)–(9) позволяет получить ее аналитическое решение, применяя, например, одностороннее интегральное преобразование Лапласа [7]

$$P(Y, \theta) = Y + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(Y \mu_n)}{\mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta), \quad (14)$$

где $\mu_n = \pi n$, $n = \overline{1, \infty}$.

Если ввести характерную скорость течения среды

$$w = kp_0 / (\mu l),$$

то с учетом (3) безразмерная локальная скорость течения жидкости в поровом пространстве пористого слоя есть

$$U = u/w = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n Y)}{\cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta). \quad (15)$$

В стационарном режиме, когда $\theta \rightarrow \infty$, из (14) и (15) следует, что $P(Y) = Y$, $U = 1$. Характерные профили безразмерных давления и скорости приведены на рис. 2.

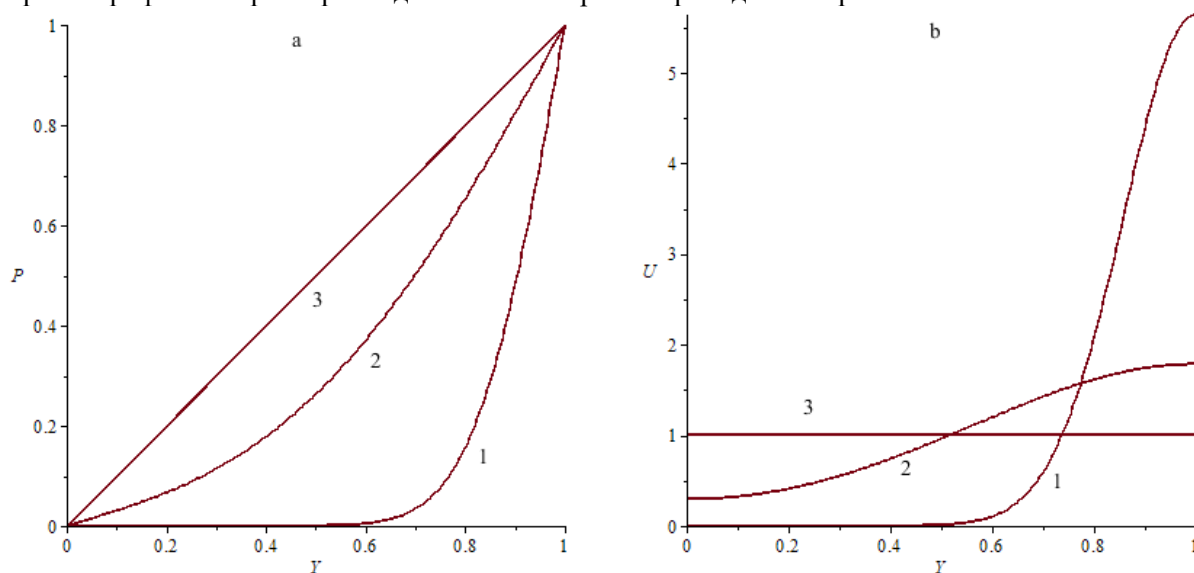


Рис. 2. Профили безразмерных давлений (а) и скорости (б) среды при различных значениях θ :
1 – 0,01; 2 – 0,1; 3 – 1,0

Задача (6)–(9), по существу, описывает формирование профилей давления и скорости по толщине пористого слоя в период начала прокачки и перехода ее в стационарный режим. Если в (15) положить $Y = 0$, то можно определить безразмерное время θ^* установления стационарного режима, например, с относительной погрешностью в 0,01 из уравнения

$$U(0, \theta^*) = 0,99. \quad (16)$$

Для этого будем считать, что при достаточно больших временах θ соотношение (15) можно записать в виде

$$U(0, \theta^*) \approx 1 + 2 \exp(-\mu_1^2 \theta^*) / \cos \mu_1, \quad (17)$$

тогда из (16) и (17) следует

$$\theta^* = -\frac{1}{\pi^2} \ln 0,005 = 0,537. \quad (18)$$

Если прокачку жидкости сквозь пористый слой остановить, то динамика изменения полей безразмерных давления и скорости определяется из решения задачи:

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (19)$$

$$P(Y, 0) = Y; \quad (20)$$

$$P(0, \theta) = P(1, \theta) = 0. \quad (21)$$

Решение (18)–(21):

$$P(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n Y)}{\mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta); \quad (22)$$

$$U(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_n Y)}{\cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \theta). \quad (23)$$

Очевидно, что, повторяя ту же процедуру по определению продолжительности периода отключения прокачки, получим результат, аналогичный (18).

При импульсном законе изменения давления задача формулируется в виде

$$\frac{\partial P(Y, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 P(Y, \theta)}{\partial Y^2}; \quad (24)$$

$$P(Y, 0) = P(0, \theta) = 0; \quad (25)$$

$$P(1, \theta) = 1(\theta) - 1(\theta - \theta_0), \quad (26)$$

где θ_0 – безразмерное время импульса; $1(\dots)$ – функция Хэвисайда.

Решение (24)–(26) таково:

$$P(Y, \theta) = \begin{cases} P_1(Y, \theta), & \text{при } \theta \leq \theta_0, \\ P_2(Y, \theta), & \text{при } \theta > \theta_0, \end{cases} \quad (27)$$

где $P_1(Y, \theta)$ определяется соотношением (14), а

$$P_2(Y, \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n Y)}{\mu_n \cos \mu_n} \left\{ \exp(-\mu_n^2 \theta) \left[1 - \exp(-\mu_n^2 \theta_0) \right] \right\}.$$

Следует отметить, что решение задачи (24)–(26) обобщает решения задач (10)–(13) и (19)–(21).

Пример. Оценим времена пребывания и установления потока жидкости с $\mu = 10^{-3}$ Па·с через пористый слой толщиной $l = 0,1$ м, пористостью $\varepsilon = 0,4$ и проницаемостью $k_p \sim 10^9$ Па (для большинства капельных жидкостей [6]). Пусть избыточное давление составляет $p_0 = 10^5$ Па, тогда время пребывания жидкости в слое составляет порядка 100 с, а время установления ≈ 21 с. Для более высоких давлений p_0 время пребывания уменьшается, при этом время установления увеличивается.

Заключение. Анализ показал, что времена установления при прокачке жидкой среды сквозь изотропный пористый слой и при останове прокачки совпадают. Получено обобщение задач начала прокачки, ее стационарного режима и ее останова, показано на примере, что основную роль в величине времени играет давление подачи жидкой среды в пористый слой, чем оно больше, тем больше время установления.

Литература

1. Маскот, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскот. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 628 с.
2. Вотошкин, А.Г. Процессы и аппараты защиты окружающей среды / А.Г. Вотошкин. – М.: Высш. шк., 2008. – 638 с.
3. Delavar, M.A. Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review / M.A. Delavar, M.I. Azemi // J. of Eng. Sci. and Technology Review. – 2013. – Vol. 6, no. 1. – P. 14–16.
4. Беляев А.Ю. Усреднение в задачах теории фильтрации / А.Ю. Беляев. – М.: Наука, 2004. – 198 с.

5. Hsu, C.T. Thermal Dispersion in Porous Medium / C.T. Hsu, P. Cheng // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1990. – Vol. 33, no. 8. – P. 1587–1597.

6. Баренблатт, Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Раник. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

7. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования / Г. Деч. – М.: Наука, 1971. – 288 с.

Поступила в редакцию 13 марта 2026 г.

Сведения об авторах

Ряжских Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskihav@bk.ru.

Ряжских Виктор Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 2, pp. 33–38*

DOI: 10.14529/mmph260204

ESTIMATION OF THE TIME OF SETTING STEADY-STATE CONDITIONS FOR NEWTONIAN FLUID PRESSURE FLOW THROUGH A FLAT POROUS LAYER

A.V. Ryazhskih, V.I. Ryazhskih

Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: ryazhskihav@bk.ru

Abstract. Unsteady elastic filtration conditions for a viscous incompressible fluid isothermally pumped through an isotropic porous layer served as a basis for formulating initial-boundary value problems for a one-dimensional pressure field, assuming that the filtration mode obeys Darcy's law. The problems describe the pumping on/off modes, as well as the steady-state conditions for the flow of a Newtonian fluid supplied from the upper surface of the porous medium and exiting through its lower bounding surface, with infinitely large boundary permeability. The equations of the formulated initial-boundary value problems are partial differential equations with Dirichlet and/or von Neumann boundary conditions. In the case of pulsed input, the boundary condition is represented by a structure consisting of the difference of Heaviside functions, one of which has a shift equal to the pulse duration. Due to their linear nature, analytical solutions can be obtained using a one-sided integral Laplace transform in the form of explicit relationships for dimensionless pressure and velocity profiles along the height of a porous layer. As these solutions are represented by rapidly converging Fourier series with a multiplicative exponent, the concept of a "regular" mode is used (only the first term is considered in the expansion). Approximate relationships are derived to determine the duration of the setting modes during the start and stop of pumping the liquid medium through a porous layer. The obtained solutions are generalized using an impulse boundary condition. Computational experiments have shown that it takes approximately 0,537 dimensionless time for the pressure profile to approach linearity during both the on and off pumping modes, with a relative accuracy of 0,01, depending on the velocity of the fluid at the outlet of the porous layer. An example is given to demonstrate that the setting time can reach a significant value, which should be taken into account in the operation of various technical devices that contain porous layers.

Keywords: porous layer; Newtonian fluid; pumping; pressure flow; settling time; Darcy's law.

References

1. Muskat, M. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*. Michigan: I.W. Edwards, Inc. ann arbor, 1946, 736 p.

2. Votoshkin A.G. *Processy i apparaty zashchity okruzhayushchej sredy* (Processes and Apparatuses for Environmental Protection). Moscow: Vyssh. shk. Publ., 2008, 638 p. (in Russ.).
3. Delavar M.A., Azemi M.I. Using Porous for Heat Transfer Enhancement in Heat Exchangers: Review. *J. of Eng. Sci. and Technology Review*, 2013, Vol. 6, no. 1, pp. 14–16. DOI: 10.25103/jestr.061.03
4. Belyaev A.Yu. *Usrednenie v zadachah teorii fil'tracii* (Averaging in Problems of Filtration Theory). Moscow, Nauka Publ., 2004, 198 p. (in Russ.).
5. Hsu C.T., Cheng P. Thermal Dispersion in Porous Medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1990, Vol. 33, no. 8, pp. 1587–1597. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90015-M.
6. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ranik V.M. *Teoriya nestacionarnoj fil'tracii zhidkosti i gaza* (Theory of Non-Stationary Filtration of Liquid and Gas). Moscow, Nedra Publ., 1972, 288 p. (in Russ.).
7. Doetsch Von Gustav. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-transformation und der Z-transformation*. R. Oldenbourg, 1956, (in German).

Received March 13, 2026

Information about the authors

Ryazhskikh Aleksandr Viktorovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: ryazhskihav@bk.ru.

Ryazhskikh Viktor Ivanovich is Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru.