

# ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО КОСИНУСА И МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ НЕКОТОРОГО КЛАССА

**М.С. Токмачев**

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород,  
Российская Федерация  
E-mail: mtokm@yandex.ru

**Аннотация.** В результате функциональных преобразований случайных величин получены новые распределения, найдены и исследованы функции плотности. В качестве базового рассматривается трехпараметрическое семейство распределений типа гиперболического косинуса, которое является обобщением известного двухпараметрического распределения Майкснера. Исходя из моментов распределения, вычислен ряд нетривиальных несобственных интегралов определенного класса от комбинации степенных, экспоненциальных, гиперболических и других функций при трех параметрах.

**Ключевые слова:** распределение типа гиперболического косинуса; функции случайных величин; плотность вероятностей; моменты; несобственный интеграл.

## Введение

Для абсолютно непрерывных вероятностных распределений имеют место стандартные соотношения с интегралами: условие нормировки, начальные и центральные моменты. Сложность вычисления таких интегралов определяется структурой функции плотности. Например, для показательного распределения случайной величины  $X \sim E(\lambda)$  интегрирование проводится общеизвестными методами и не представляет проблемы. Для нормальной случайной величины  $X \sim N(m; \sigma)$  вычисления моментов  $M(X^n)$  более трудоемки, но также общеизвестны, например [1, 2].

Рассматривая функции случайных величин, получаем новые, как правило, более громоздкие распределения со сложной функцией плотности. Вычисление моментов в этом случае также усложняется. Стандартные методы преобразования интегралов и интегрирования для комбинаций различных функций не достаточны. Зададимся целью нахождения интегралов с заданными нетривиальными подынтегральными функциями. В основу формирования таких функций для интегрирования положим трехпараметрическое семейство распределений типа гиперболического косинуса  $Ch(m, \beta, \mu)$  [3, 4], которое является обобщением известного двухпараметрического распределения Майкснера [5, 6]. Плотность вероятностей  $p_m(x)$  этого распределения имеет вид [7]

$$p_m(x) \equiv p_m(x; m, \beta, \mu) = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} A^{\frac{mx}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{imx}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{imx}{2\beta}\right), \quad (1)$$

где  $m, \beta, \mu \in R; m > 0; \beta > 0; B(p; q)$  – бета-функция,  $i = \sqrt{-1}$ ,

$$A \equiv \left(\frac{\beta - i\mu}{\beta + i\mu}\right)^i = \begin{cases} e^{\arctg \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2}}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 > 0, \\ e^{\arctg \frac{2\beta\mu}{\beta^2 - \mu^2} + \pi \operatorname{sign} \mu}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 < 0, \\ e^{\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \mu}, & \text{при } \beta^2 - \mu^2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

При  $m \in N$  бета-функция в (1), а следовательно, и функция плотности  $p_m(x)$  выражается через элементарные функции в зависимости от параметров. В [8, 9] представлены рекуррентные формулы связи начальных моментов распределения с параметрами. Для случайной величины  $X$

с функцией плотности вида (1) начальные моменты  $M(X^n)$  выражаются через параметры  $m, \beta, \mu$  по формуле

$$M(X^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где множество целочисленных коэффициентов  $U(n; k, j)$  определяется из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} U(0; 0, 0) &= 1; \quad U(0; k, j) = 0 \text{ при } k \neq 0 \text{ или } j \neq 0; \\ U(n; k, j) &= 0 \text{ при } k \leq 0, \text{ кроме } U(0; 0, 0); \\ U(n+1; k, j) &= U(n; k-1, j-1) + (j-1)U(n; k, j-1) + (j+1)U(n; k, j+1) \end{aligned} \quad (4)$$

при  $n = 0, 1, 2, \dots, k \geq 1$ . Значения коэффициентов  $\{U(n; k, j)\}$  для начальных  $n$  приведены в [9] в виде числовых треугольников.

Из условия нормировки и найденных соотношений для моментов и параметров распределения в [10] сформирован класс интегралов, подынтегральными функциями в которых оказываются комбинации степенных, экспоненциальных, гиперболических и других функций.

В представленной работе задача усложнена. Из распределений типа гиперболического косинуса  $\text{Ch}(m, \beta, \mu)$  с помощью некоторых функций случайных величин получены новые распределения и для них рассмотрены соответствующие интегральные равенства. А затем интегралы от новых комбинаций функций вновь выражены через параметры  $m, \beta, \mu$ .

Полученные группы интегралов с параметрами  $m, \beta, \mu$  структурно близки с интегралами в [10] как рассчитанные по одному и тому же алгоритму и вычисленные для связанных распределений, однако полученный результат является новым и позволяет шире взглянуть на найденную структурную связь интегралов в заданном классе функций с их параметрами.

## 1. Обратная зависимость случайных величин

Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение типа гиперболического косинуса с параметрами  $m, \beta, \mu$ , а именно:  $X \sim \text{Ch}(m, \beta, \mu)$ . Соответственно, функция плотности  $p_m(x)$  имеет вид (1) при обозначениях (2).

Введём новую случайную величину  $Y = 1/X$  с функцией плотности  $g_m(y)$ . Соответствующая функция  $y = 1/x$  имеет монотонную обратную функцию  $x = 1/y$ , причем  $x'_y = -1/y^2$ . Область определения обратной функции:  $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Согласно общеизвестной теории функций случайных величин, например, [11, 12], плотности  $Y$  и  $X$  при  $y \neq 0$  связаны соотношением

$$g_m(y) = p_m\left(\frac{1}{y}\right) \left| -\frac{1}{y^2} \right|. \quad (5)$$

В общем виде, используя функцию плотности (1), из (5) находим

$$g_m(y) = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right). \quad (6)$$

Для функции  $g_m(y)$  вида (6) в соответствии с условием нормировки получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_m(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = 1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}}, \quad (7)$$

где основание  $A$  показательной функции находится согласно (2). Заметим, что несобственный интеграл в (7) имеет подынтегральную функцию, разрывную в точке  $y = 0$ .

Также отметим, что параметр  $m$  может быть и дробным. Например, при  $m = \sqrt{2}$ ,  $\beta = \sqrt{2}$ ,  $\mu = 1$  из (7) следует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} e^{\frac{\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}}{2y}} B\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{2y}; \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{2y}\right) dy = \frac{\pi 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2^{\sqrt{2}-2} \sqrt{2} \sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}} = \frac{\pi 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}^{3\sqrt{2}-4}}.$$

Аналогично для начальных моментов  $M(X^n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получаем

$$M(X^n) = M\left(\frac{1}{Y^n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^n} g_m(y) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n, k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности,

$$M\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \mu;$$

$$M(X^2) = M\left(\frac{1}{Y^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^4} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\beta^2 + (m+1)\mu^2}{m}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^3} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi \mu (\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m \beta^{m-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^4} A^{\frac{m}{2\beta y}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im}{2\beta y}; \frac{m}{2} + \frac{im}{2\beta y}\right) dy = \frac{\pi (\beta^2 + \mu^2)^{m/2}}{2^{m-2} m^2 \beta^{m-1}} (\beta^2 + (m+1)\mu^2).$$

Согласно [4, 7] формулы плотности  $p_m(x)$  при  $m \in N$  имеют вид:

$$p_1(x) = \frac{A^{\frac{x}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{2\beta}}; \quad p_2(x) = \frac{2xA^{\frac{x}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \frac{\pi x}{\beta}}; \quad (8)$$

$$p_m(x) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! \operatorname{ch} \frac{\pi mx}{2\beta}} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{2\beta} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} [(2s-1)^2 \beta^2 + m^2 x^2], \quad m = 3, 5, 7, \dots; \quad (9)$$

$$p_m(x) = \frac{m^2 x}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! \operatorname{sh} \frac{\pi mx}{2\beta}} \frac{A^{\frac{mx}{2\beta}}}{2\beta} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} [(2s)^2 \beta^2 + m^2 x^2], \quad m = 4, 6, 8, \dots \quad (10)$$

Ввиду безграничной делимости распределения типа гиперболического косинуса [4, 9] при натуральных  $m$  случайную величину  $X$  с плотностью  $p_m(x)$  можно представить в виде суммы  $m$  независимых случайных слагаемых, каждое с плотностью  $p_1(x)$  [13–15]. Соответственно функция  $p_m(x)$  является  $m$ -кратной сверткой [16–18] (композиция распределений):

$$p_m(x) = p_1(x) * p_{m-1}(x) = p_1(x) * p_1(x) * \dots * p_1(x).$$

Для случайной величины  $Y = \frac{1}{X}$  соответствующие функции плотности  $g_m(y)$  оказываются такими:

$$g_1(y) = \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y} \right) y^2}; \quad g_2(y) = \frac{2A^{\frac{1}{\beta y}}}{(\beta^2 + \mu^2) \left( \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y} \right) y^3};$$

$$g_m(y) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right]$$

при  $m = 3, 5, 7, \dots$ ;

$$g_m(y) = \frac{m^2}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right]$$

при  $m = 4, 6, 8, \dots$ .

Типичные графики функции плотности  $g_m(y)$  при конкретных параметрах представлены на рис. 1 и 2.

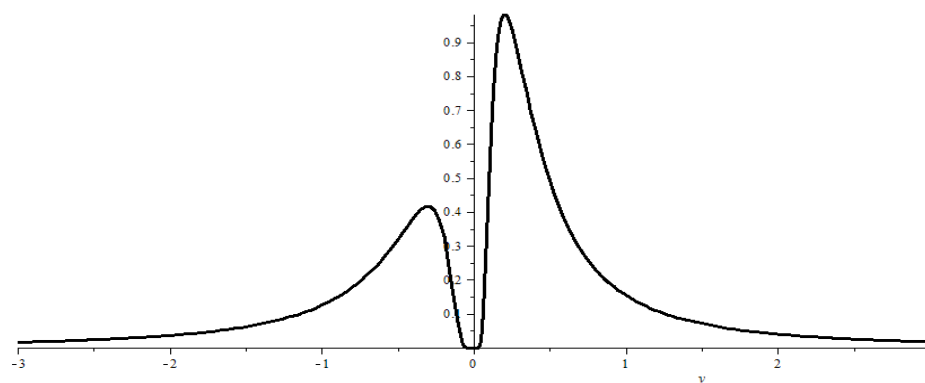


Рис. 1. График функции плотности  $g_1(y)$  при  $m=1, \beta=3, \mu=1$

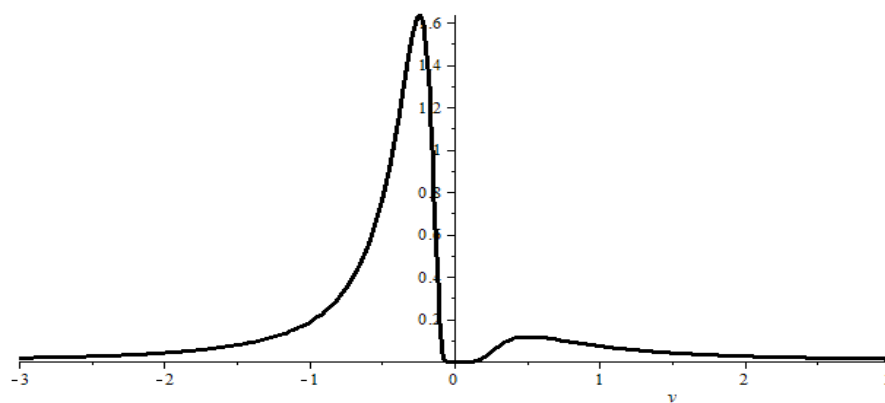


Рис. 2. График функции плотности  $g_4(y)$  при  $m=4, \beta=4, \mu=-2$

Как видно из рис. 1 и 2, графики асимметричны и функции плотности  $g_m(y)$  имеют устранимый разрыв при  $y=0$ . График плотности состоит из двух составляющих (при отрицательном и положительном аргументах), но при разных соотношениях параметров форма кривой плотности данного семейства распределений принципиально не меняется.

Отметим, что для распределений с плотностью  $g_m(y)$  параметр  $\mu$  уже не является математическим ожиданием:

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y g_m(y) dy \neq \mu.$$

Интегралы, полученные из соотношения для  $M\left(\frac{1}{Y^n}\right)$ , обозначим соответственно  $J_n(m, \beta, \mu)$ . Тогда из условия нормировки следует:

$$J_0(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad J_0(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{\beta^2 + \mu^2}{2};$$

$$J_0(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^2 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m}$$

при  $m = 3, 5, 7, \dots$ ;

$$J_0(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2}$$

при  $m = 4, 6, 8, \dots$

Исходя из первых моментов  $M(X) = M\left(\frac{1}{Y}\right)$ , получим значения интегралов:

$$J_1(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\mu\sqrt{\beta^2 + \mu^2}; \quad J_1(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^4 \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{\mu(\beta^2 + \mu^2)}{2};$$

$$J_1(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^3 \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2\mu(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m}$$

при  $m = 3, 5, 7, \dots$ ;

$$J_1(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^4 \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy = \frac{2\mu(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2}$$

при  $m = 4, 6, 8, \dots$

В общем случае для моментов  $n$ -го порядка  $M(X^n) = M\left(\frac{1}{Y^n}\right)$  приходим к интегралам:

$$J_n(1, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{2\beta y}}}{y^{n+2} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\beta y}} dy = 2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j;$$

$$J_n(2, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{1}{\beta y}}}{y^{n+3} \operatorname{sh} \frac{\pi}{\beta y}} dy = \frac{(\beta^2 + \mu^2)}{2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}.$$

При  $m = 3, 5, 7, \dots$  следует

$$J_n(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^{n+2} \operatorname{ch} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s-1)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

При  $m = 4, 6, 8, \dots$  следует

$$J_n(m, \beta, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^{\frac{m}{2\beta y}}}{y^{n+3} \operatorname{sh} \frac{\pi m}{2\beta y}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s)^2 \beta^2 + \frac{m^2}{y^2} \right] dy =$$

$$= \frac{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)!}{m^2} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности, при конкретных  $m$  и  $n$  подставляются значения коэффициентов  $\{U(n; k, j)\}$  согласно (4), и выражения для интегралов как функций параметров  $\beta$  и  $\mu$  существенно упрощаются.

## 2. Экспоненциальная зависимость случайных величин

Пусть случайная величина  $X$  имеет распределение типа гиперболического косинуса  $X \sim \operatorname{Ch}(m, \beta, \mu)$  с функцией плотности  $p_m(x)$  вида (1) при условиях (2). Полагая  $Y = e^X$  с функцией плотности  $h_m(y)$ . Функция  $y = e^x$  имеет монотонную обратную функцию  $x = \ln y$ , определенную при  $y > 0$ . Следовательно,  $x'_y = \frac{1}{y}$ . Тогда плотность вероятностей распределения случайной величины  $Y$  получается как

$$h_m(y) = p_m(\ln y) \left| \frac{1}{y} \right|, \quad y > 0.$$

В общем виде (см. (1)) следует

$$h_m(y) = p_m(\ln y; m, \beta, \mu) \left| \frac{1}{y} \right| = \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} y} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im \ln y}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{im \ln y}{2\beta}\right), \quad y > 0.$$

В частности, при  $m \in N$  согласно формулам (8)–(10) на положительной полуоси получаем

$$h_1(y) = \frac{A^{\frac{\ln y}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} y \operatorname{ch} \frac{\pi \ln y}{2\beta}}; \quad h_2(y) = \frac{2 \ln y A^{\frac{\ln y}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) y \operatorname{sh} \frac{\pi \ln y}{\beta}};$$

$$h_m(y) = \frac{m}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! y \operatorname{ch} \frac{\pi m \ln y}{2\beta}} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s-1)^2 \beta^2 + m^2 \ln^2 y \right]$$

при  $m = 3, 5, 7, \dots$ ;

$$h_m(y) = \frac{m^2 \ln y}{2(\beta^2 + \mu^2)^{m/2} (m-1)! y \operatorname{sh} \frac{\pi m \ln y}{2\beta}} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} \prod_{s=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[ (2s)^2 \beta^2 + m^2 \ln^2 y \right]$$

при  $m = 4, 6, 8, \dots$ .

Типичный график функции плотности  $h_m(y)$  при конкретных параметрах представлен на рис. 3.

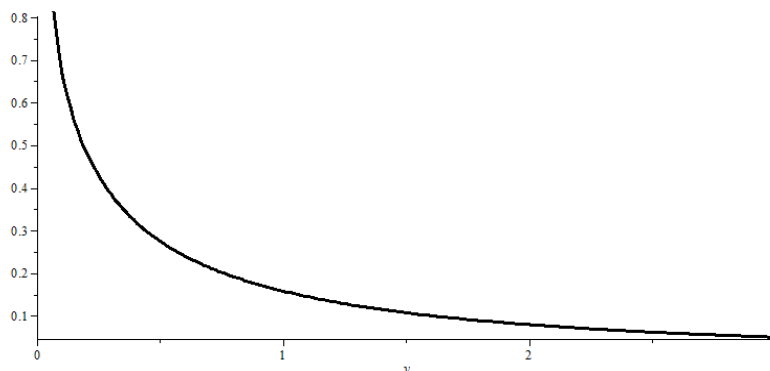


Рис. 3. График функции плотности  $h_m(y)$  при  $m=1$ ,  $\beta=3$ ,  $\mu=1$

Для  $M(X^n)$  следует

$$M(X^n) = M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \ln^n y \cdot h_m(y) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}},$$

то есть

$$\int_0^{+\infty} \frac{2^{m-2} m \beta^{m-1}}{\pi(\beta^2 + \mu^2)^{m/2}} \frac{\ln^n y}{y} A^{\frac{m \ln y}{2\beta}} B\left(\frac{m}{2} - \frac{im \ln y}{2\beta}; \frac{m}{2} + \frac{im \ln y}{2\beta}\right) dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{m^{n-k}}.$$

В частности, при  $m=1$  и  $m=2$  соответственно получаем

$$M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^n y \cdot A^{\frac{\ln y}{2\beta}}}{2\sqrt{\beta^2 + \mu^2} y \operatorname{ch} \frac{\pi \ln y}{2\beta}} dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \beta^{n-j} \mu^j;$$

$$M(\ln^n Y) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln^{n+1} y \cdot A^{\frac{\ln y}{\beta}}}{(\beta^2 + \mu^2) y \operatorname{sh} \frac{\pi \ln y}{\beta}} dy = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n U(n; k, j) \frac{\beta^{n-j} \mu^j}{2^{n-k}}.$$

Аналогично получаются соотношения для интегралов и при других значениях параметров.

## Заключение

Как известно, для многих классов распределений соответствующие случайные величины связаны функционально. Например, для равномерно распределенной на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  случайной величины  $X$  функция  $Y = \mu + \lambda \cdot \operatorname{tg} X$  приводит к распределению Коши с параметрами  $\mu$  и  $\lambda$  [2]. Если случайная величина  $X$  имеет распределение максимального значения с параметрами  $\mu$  и  $\lambda$ , то случайная величина  $Y = \exp\left(-\frac{X - \mu}{\lambda}\right)$  распределена по показательному закону с параметром  $\lambda$  [2].

В данной работе при использовании функций случайных величин найдены и исследованы плотности новых распределений. Причем список таких распределений далеко не исчерпывается вышеприведенными в качестве иллюстрации.

При этом используются авторские результаты для распределения типа гиперболического косинуса, которые позволяют для новых распределений вычислять интегральные характеристики и тем самым формируют новые классы интегралов от комбинаций заданных функций при различных параметрах.

Полученный результат интересен как с теоретической, так и прикладной точек зрения.

### Литература

1. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
2. Вадзинский, Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – СПб: Наука, 2001. – 294 с.
3. Токмачев, М.С. Постоянство регрессии квадратичной статистики на линейную статистику / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 1995. – № 1. – С. 139–141.
4. Токмачев, М.С. Исследование вероятностного распределения типа гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 18–26.
5. Lai, C.D. A Survey of Meixner's Hypergeometric Distribution / C.D. Lai // Math. Chronicle. – 1977. – no. 6. – P. 6–20.
6. Lai, C.D. Meixner Classes and Meixner Hypergeometric Distributions / C.D. Lai // Aust. J. Stat. – 1982. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 221–233.
7. Токмачев, М.С. Прикладной аспект обобщенного распределения гиперболического косинуса / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2005. – № 34. – С. 96–99.
8. Токмачев, М.С. Вычисление кумулянтов и моментов распределения Майкснера / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2013. – № 75-2. – С. 47–51.
9. Токмачев, М.С. Вероятностные распределения: от характеристики к числовым множествам / М.С. Токмачев. – Саарбрюккен: LAP LAMBERT, 2018. – 224 с.
10. Токмачев, М.С. Вычисление интегралов от функций некоторого класса с вероятностной интерпретацией / М.С. Токмачев // Вестник Новгородского государственного университета. – 2014. – № 80. – С. 42–46.
11. Свешников, А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / А.А. Свешников. – СПб: Лань, 2008. – 448 с.
12. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – Москва: Наука, 1979. – 496 с.
13. Лукач, Е. Характеристические функции / Е. Лукач. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
14. Рамачандран, Б. Теория характеристических функций / Б. Рамачандран. – М.: Наука, 1975. – 223 с.
15. Каган, А.М. Характеризационные задачи математической статистики / А.М. Каган, Ю.В. Линник, С.Р. Рао. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
16. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 2004. – 570 с.
17. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1969. – 576 с.
18. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – 751 с.

*Поступила в редакцию 19 февраля 2026 г.*

### Сведения об авторе

Токмачев Михаил Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация, e-mail: mtokm@yandex.ru.



**FUNCTIONS OF RANDOM VARIABLES WITH A DISTRIBUTION  
OF THE HYPERBOLIC COSINE TYPE AND METHODS FOR EVALUATING  
INTEGRALS OF A CERTAIN CLASS****M.S. Tokmachev**

Yaroslav-the-Wise State University, Veliky Novgorod, Russian Federation

E-mail: mtokm@yandex.ru

**Abstract.** Functional transformations of random variables have led to the creation of new distributions. Relevant probability density functions are determined and analyzed. The work is based on a three-parameter family of distributions of the hyperbolic cosine type, which generalizes the well-known two-parameter Meixner distribution. Several non-trivial improper integrals of a certain class of three-parameter combinations of power, exponential, hyperbolic, and other functions are evaluated based on distribution moments.

**Keywords:** *distribution of the hyperbolic cosine type; functions of random variables; probability density function; moments; improper integral.*

**References**

1. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki* (Mathematical Methods of Statistics). Moscow, Mir Publ., 1975, 648 p. (in Russ.).
2. Vadzinskiy R.N. *Spravochnik po veroyatnostnym raspredeleniyam* (Handbook of Probability Distributions). Sankt-Peterburg, Nauka Publ., 2001, 294 p. (in Russ.).
3. Tokmachev M.S. Postoyanstvo regressii kvadrachnoy statistiki na lineynuyu statistiku (Consistency of Regression of Quadratic Statistics on Linear Statistics). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1995, no. 1, pp. 139–141. (in Russ.).
4. Tokmachev M.S. The Study of Probability Distributions of the Hyperbolic Cosine Type. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2017, Vol. 9, no. 3, pp. 18–26. DOI: 10.14529/mmph170303.
5. Lai C.D. A Survey of Meixner's Hypergeometric Distribution. *Math. Chronicle*, 1977, no. 6, pp. 6–20.
6. Lai C.D. Meixner Classes and Meixner Hypergeometric Distributions. *Aust. J. Stat.*, 1982, Vol. 24, Iss. 2, pp. 221–233. DOI: 10.1111/j.1467-842X.1982.tb00828.x
7. Tokmachev M.S. Prikladnoy aspekt obobshchennogo raspredeleniya giperbolicheskogo kosinusa (An Applied Aspect of the Generalized Hyperbolic Cosine Distribution). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2005, no. 34, pp. 96–99. (in Russ.).
8. Tokmachev M.S. Vychislenie kumulyantov i momentov raspredeleniya Mayksnera (Calculation of the Cumulants and Moments of the Meixner Distribution). *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2013, no. 75-2, pp. 47–51. (in Russ.).
9. Tokmachev M.S. *Veroyatnostnye raspredeleniya: ot kharakterizatsii k chislovyim mnozhestvam* (Probability Distributions: from Characterization to Numerical Sets). Saarbrücken, LAP LAMBERT, 2018, 224 p.
10. Tokmachev M.S. Evaluation of Integrals for some Class of Functions with Probabilistic Interpretation. *Vestnik Novgorodskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2014, no. 80, pp. 42–46. (in Russ.).
11. Sveshnikov A.A. (ed.) *Sbornik zadach po teorii veroyatnostey, matematicheskoy statistike i teorii sluchaynykh funktsiy* (Collection of Tasks on probability theory, mathematical statistics and theory of random functions). Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2008, 448 p. (in Russ.).
12. Pugachev V.S. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* (Probability Theory and Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1979, 496 p. (in Russ.).

13. Lukach E. *Kharakteristicheskie funktsii* (Characteristic Functions). Moscow, Nauka Publ., 1979, 424 p. (in Russ.).
14. Ramachandran B. *Teoriya kharakteristicheskikh funktsiy* (Theory of Characteristic Functions). Moscow, Nauka Publ., 1975, 223 p. (in Russ.).
15. Kagan A.M., Linnik Yu.V., Rao S.R. *Kharakterizatsionnye zadachi matematicheskoy statistiki* (Characterization Problems of Mathematical Statistics). Moscow, Nauka Publ., 1972, 656 p. (in Russ.).
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* (Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis). Moscow: Nauka Publ., 2004, 570 p. (in Russ.).
17. Venttsel' E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability theory). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1969, 576 p. (in Russ.).
18. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya. T. 2* (An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2). Moscow, Mir Publ., 1984, 751 p. (in Russ.).

*Received February 19, 2026*

### Information about the author

Tokmachev Mikhail Stepanovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Yaroslav the Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russian Federation, e-mail: mtokm@yandex.ru.