

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Ю.С. Найштут, В.А. Грачев

Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: neustadt99@mail.ru

Аннотация. Оценивается время работы вязко-упругопластической конструкции до момента возможного разрушения в процессе длительной эксплуатации под заданной изменяющейся квазистатической нагрузкой. Прогнозирование разрушения производится после значительного срока безаварийной службы конструкции, когда в материале имеются сравнительно высокие напряжения и деформации. Материал подчиняется условию текучести Надаи–Шлейхера, в котором постоянные тензоры структуры заменены тензорами накопления повреждений, являющимися гладкими функциями от неупругих деформаций (пластичности и ползучести). Формулируется механическая модель прочностного расчета в рамках механики сплошной среды при следующих предположениях: режим вязкой работы (ползучести) считается установившимся, пластическая часть тензора деформации нормальна к поверхности нагружения, а упругая часть деформаций следует закону Гука. Математическая проблема первоначально формулируется в пространстве ограниченных деформаций, изученном школой Лионса. Это пространство естественным образом погружается в пространство обобщенных функций Соболева. Здесь методы вариационных неравенств позволяют доказать существование обобщенных решений поставленной задачи. В ходе доказательства удается установить время, когда вязко-упругопластическая конструкция разрушается. В этот момент коэффициент запаса против пластического разрушения (неограниченного течения) становится меньше единицы. Существенно, что предлагаемый алгоритм расчета может быть численно реализован.

Ключевые слова: вязко-упругопластичный материал; прогнозирование разрушения; условие текучести Надаи–Шлейхера; тензор накопления повреждений; вариационные неравенства; пространство Соболева.

Введение

После продолжительной работы несущих элементов из вязкого упругопластического материала часто возникает следующая задача: требуется определить возможное время безаварийной службы существующей конструкции, если известна история будущего нагружения.

В настоящее время при анализе разрушения вязких упругопластических систем (упругопластических конструкций, подверженных ползучести) выделяют два типа исчерпания несущей способности [1]. Первый тип – вязкое разрушение при невысоких напряжениях и значительной деформации. Для описания явления используется несколько определяющих соотношений, связывающих тензор напряжения σ_{ij} и тензор скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$. Рассмотрим теорию течения, где имеет место равенство

$$H = 2\psi T, \quad T = \sqrt{\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}, \quad H = \sqrt{2\dot{\epsilon}'_{ij}\dot{\epsilon}'_{ij}}. \quad (1)$$

В формулах (1) точка над тензором означает дифференцирование по времени, а штрих в верхнем индексе – использование девиатора. Функция ψ зависит от тензора напряжений σ_{ij} . Равенство (1) можно разрешить относительно T :

$$T = g(H)H. \quad (2)$$

На основе экспериментов обычно принимают степенную зависимость

$$g(H) = BH^{\mu-1}. \quad (3)$$

Число $m = 1/\mu$ для металлов содержится в интервале между 10 и 12. Можно проинтегрировать определяющие уравнения

$$\sigma'_{ij} = 2g(H)\varepsilon'_{ij} \quad (4)$$

в предположении несжимаемости скоростей деформации при ползучести и текучести. Результаты интегрирования (4) многих частных задач показывают, что для некоторых точек существует момент времени t^* , когда перемещения становятся бесконечными. Этот момент называют временем вязкого разрушения. Вязкое разрушение не связано с уровнем внутренних напряжений, оно равносильно тому, что в качестве критерия разрушения принимаются недопустимые перемещения характерных точек.

Кроме вязких разрушений в изучаемых конструкциях наблюдаются внезапные (хрупкие) разрушения, фиксируемые при действии длительных переменных (циклических) нагрузок. Задача, сформулированная в начале статьи, относится к этому типу. Другая часто встречающаяся задача связана с прочностью деталей, испытывающих ползучесть (элементы турбин, двигателей, разрушение которых сопровождается малыми деформациями). Хрупкие разрушения связаны с изменением в процессе эксплуатации механических свойств материала конструкции. Накапливаются дефекты: разрыхления, поры, трещины, которые в основном зависят от характера внутренних напряжений. В настоящей работе задача изучается в квазистатическом приближении (силы инерции не учитываются), режим вязкого деформирования принимается установившимся. В этих условиях уровень накопления дефектов в точке x сплошной среды характеризуют сплошностью $\psi(x)$ [1]. В начальный момент деформирования она принимается равной единице, а в момент разрушения $\psi(x) = 0$. Используется также функция поврежденности Работнова [2] $\omega(x) = 1 - \psi(x)$. Постулируется кинетическое уравнение поврежденности

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, \lambda_1 \dots \lambda_n). \quad (5)$$

Функция F зависит от сплошности $\psi(x)$ и параметров $\lambda_1 \dots \lambda_n$, характерных для конкретной задачи и определяемых экспериментально. В число параметров входят тензор напряжений, температура, время, непрерывные функции, зависящие от ε'_{ij} . Накопление повреждений в отдельных точках приводит к появлению фронтов разрушения – поверхностей Σ , отделяющих разрушенные зоны с $\psi(x) = 0$ от неразрушенных. Изучается движение фронта разрушения по координате u , нормальной к фронту Σ по кинетическому уравнению

$$\frac{d\psi_\Sigma}{dt} + \frac{\partial \psi_\Sigma}{\partial u} \frac{du}{dt} = 0. \quad (6)$$

Здесь функция $\psi(t)$ принимается по уравнению (5) в точках фронта Σ . Движение фронта приводит к полному разрушению конструкции, которая преобразуется в момент t^* из односвязного тела в несколько разделенных фронтом Σ частей. Число t^* называют временем хрупкого разрушения конструкции.

Уравнения (5), (6) решены для большого числа технически важных задач, функции $F(\psi, \lambda_1 \dots \lambda_n)$ получили серьезную экспериментально-теоретическую поддержку [3, 4].

Следует сказать, что в задаче прогноза разрушения длительно эксплуатируемой конструкции приведенные выше результаты трудно практически использовать, так как время t^* определяется всей историей нагружения, начиная с отсутствия поврежденности (которая часто неизвестна). Отсутствуют на момент прогноза сведения о коэффициенте запаса несущей способности от пластического разрушения, так как расчетные формулы не содержат свойств поверхности текучести (нагружения). Поэтому представляется целесообразным переформулировать рассматриваемую задачу в традиционных для теории пластичности терминах, поскольку при такой постановке найдены эффективные способы для реализации численных расчетов.

Механическая формулировка задачи о длительной прочности идеального вязко-упругопластического тела под действием нагрузок, вызывающих накопление повреждений

Рассмотрим трехмерное тело D , ограниченное поверхностью $S = S_u + S_p$. На части поверхности S_u отсутствуют перемещения, а на S_p действуют силы X_i . Вектор перемещений в любой точке $x \in D$ обозначим u_i , а действующую объемную силу – f_i . Время действия нагрузки $[0, T]$. Напряжения σ_{ij} в теле D удовлетворяют соотношениям (7) (критерий Надаи–Шлейхера)

$$\Phi(\sigma_{ij}) = c_{ijkl}(\lambda)\sigma_{ij}^{\prime}\sigma_{ij}^{\prime} - 2k^2 \leq 0. \quad (7)$$

Тензор c_{ijkl} – непрерывная функция, зависящая от параметра деформирования λ , которая назначается на основе экспериментального изучения материала тела D . Здесь, как и во введении, штрих в верхнем индексе обозначает девиатор тензора.

В любой момент времени t существует тензор напряжений σ_{ij}^* , уравнивающий силы X_i , f_i и лежащий внутри поверхности (7), то есть выполнено равенство

$$\int_{S_p} X_i u_i dS_p + \int_D f_i u_i dx = \int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dx \quad (8)$$

с произвольным кинематически допустимым (равным нулю на поверхности S_u) вектором u_i . Здесь dx – дифференциал объема тела D , dS_p – дифференциал поверхности, $\varepsilon_{ij} = (u_{ij} + u_{ji})/2$ – тензор деформации, отвечающий u_i . Запятая означает ковариантное дифференцирование.

Для обозначения частной производной по времени над тензором ставится точка, так что скорость точек $v_i = \dot{u}_i$. Скорость деформаций, как обычно, представим в виде суммы трех тензоров (упругости, пластичности, ползучести)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime cr} \quad (9)$$

Связь введенных девиаторов с девиаторами напряжений такова [1, 5]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime e} = E_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime p} = \lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{\prime cr} = M_{ij}(\sigma_{kl}) \quad (10)$$

В (10) E_{ijkl} – тензор модулей упругости, $\lambda_0 > 0$, если точка $x \in D$ лежит на поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$; если точка $x \in D$ не лежит на поверхности, то $\lambda_0 = 0$. Оператор M_{ij} монотонного типа [6], то есть

$$\int_D (M_{ij}(\sigma_{kl}) - M_{ij}(\tau_{ij}))(\sigma_{ij} - \tau_{ij}) dx > 0. \quad (11)$$

В частности, все операторы установившейся теории ползучести, включая полиномиальный оператор (3), являются монотонными. В шаровую часть тензора ε_{ij} входит только упругая составляющая $\dot{\varepsilon}_{ii} = k_0 \dot{\sigma}_{ii}$ с постоянной k_0 .

Задача расчета вязко-упругопластического тела состоит в определении вектора перемещений u_i и тензора напряжений σ_{ij} , которые в течение времени T удовлетворяют соотношениям (7)–(10), если в начальный момент $t = 0$ известно распределение напряжений во всем теле, а перемещения u_i считаются отсутствующими. В следующем разделе приводятся математически точные условия, при которых поставленная задача имеет решение.

Существование обобщенных решений квазистатической задачи расчета вязко-упругопластических тел

Поиск возможных перемещений удобно первоначально проводить в пространстве ограниченных деформаций $BD(D)$, подробно изученном в работах [7, 8].

По определению,

$$BD(D) = \{f / f = \{f_i\}, f_i \in L^1(D), \varepsilon_{ij}(f) = \frac{1}{2}(f_{i,j} + f_{j,i}) \in M^1(D), i, j = 1, 2, 3\}, \quad (12)$$

является нереплексивным пространством с нормой $\|f\|_{BD(D)} = \sum_{i=1}^3 [f_i]_1 + \sum_{i,j=1}^3 \|\varepsilon_{ij}(f)\|_{M^1(D)}$, при этом $M^1(D)$ означает меру в области D .

Но нереплексивность $BD(D)$ может порождать бесконечные напряжения, которые механически недопустимы. Нужна расширенная постановка задачи, которая производится путем размещения $BD(D)$ внутри пространства обобщенных функций.

Если обозначить пространство функций (распределений) Соболева с обобщенными производными $W^{1,1}(D)$, то имеет место включение $W^{1,1}(D) \subset BD(D)$. Любая обобщенная функция f , для которой ε_{ij} принадлежит $M^1(D)$, является элементом пространства $[L^{n/(n+1)}(D)]^n$. Вложение $BD(D) \subset [L^p(D)]^n$ непрерывно при $p = n/(n-1)$ и компактно при $1 < p < n/(n-1)$. Таким образом, любая ограниченная в $BD(D)$ последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся в $L^p(D)$. Отмеченное свойство существенно используется в дальнейших доказательствах, которые приведем, следуя [9]. Введем общепринятые определения. Обозначим через $L^p(0T, X)$ пространство измеримых функций из $[0, T]$ в X , таких, что

$$\|f(t)\|_X \in L^p(0T), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (13)$$

Относительно нормы

$$\|f\|_{L^p(0T, X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad (14)$$

$L^p(0T, X)$ является B -пространством для $1 \leq p < \infty$. При $p = \infty$ оно становится B -пространством относительно нормы

$$\|f\|_{L^\infty(0T, X)} = \operatorname{ess\,sup}_{(0,T)} \|f(t)\|_X. \quad (15)$$

Если X – гильбертово пространство, то $L^2(0T, X)$ становится гильбертовым пространством, если его наделить скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{L^2(0T, X)} = \int_0^T (f_1(t), f_2(t))_X dt. \quad (16)$$

Если X – рефлексивное B -пространство, то $L^p(0T, X)$ при $1 < p < \infty$ также рефлексивно, а сопряженное к нему может быть отождествлено с $L^r(0T, X')$, где r – сопряженный показатель с p . Если X – нереплексивно, то сопряженным к нему служит $L^r_w(0T, X')$. Здесь индекс w указывает, что $L^r_w(0T, X')$ состоит из таких слабо измеримых функций f , что

$$\|f\|_{L^r(0T, X')} < \infty.$$

Определим множества

$$\begin{aligned} E_0 &= \{\tau_{ij} / \tau_{ij} \in H = (\tau_{ij}, \tau_{ij}) = \int_D \tau_{ij} \tau_{ij} dx, \tau_{ij,j} \in L^3(D), \tau_{ij} n_j = 0 \text{ on } S_p, i, j = 1, 2, 3\}, \\ U_0 &= \{u / u_i \in [L^2(D)]^3, \varepsilon_{ij}(u_i) \in H, u_i = 0 \text{ on } S_u, i, j = 1, 2, 3\}; \\ P(t) &= \{\tau_{ij} / \tau_{ij} \in H, \tau_{ij}(x) \in K(x, t) \text{ in } D\}. \end{aligned} \quad (17)$$

В последней формуле $K(x, t)$ означает множество напряжений, расположенных внутри замкнутой поверхности $\Phi(\tau_{ij}) = 2k^2$.

Назначим тензор c_{ijkl} , следуя работам [10, 11]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl}(t) &= c_{ijkl}^0 + \Delta_{ijkl}^t, \quad \Delta_{ijkl}^t = b_{ijkl} \int_0^t d\lambda, \quad d\lambda = d\varepsilon^{/ne} = d\varepsilon^{/p} + d\varepsilon^{/cr}, \\ d\varepsilon^{/p} &= \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{/p} d\varepsilon_{ij}^{/p}}, \quad d\varepsilon^{/cr} = \sqrt{d\varepsilon_{ij}^{/cr} d\varepsilon_{ij}^{/cr}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Численные значения компонент тензора b_{ijkl} определяются экспериментально на образцах из материала, подчиняющегося критерию текучести $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ при разных величинах напряжений. Тензор b_{ijkl} естественно назвать тензором накопления повреждений. Подсчитаем коэффициент запаса от пластического разрушения k^* во время $[0, T]$ на основе кинематической теоремы по возможным путям пластической деформации со скоростями $v_i(x)$.

$$k^* = \inf_{v_i} \frac{\int_D \Gamma(\varepsilon_{ij}) dx}{\int_D \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dx}. \quad (19)$$

Диссипативная функция $\Gamma(\varepsilon_{ij})$ является преобразованием Лежандра функции $\Phi(\sigma_{ij})$. Равенство $k^* = 1$ означает разрушение тела D , а t^* – время, предшествующее аварии.

Сформулируем задачу упругопластического расчета на конечном интервале $[0, T]$ в ослабленной вариационной форме. Предположим, что внешняя нагрузка и начальные напряжения таковы:

$$f_i \in W^{1,\infty}(0T, [L^3(D)]^3), \quad \sigma_{ij}(0) \in P(0) \cap E_0.$$

Требуется найти σ_{ij} из $P(t) \cap E_0$ и u_i из $BD(D)$, чтобы выполнялись соотношения

$$\left((E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{kl} + M_{ij}(\sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{ij}), (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \right) + \int_D u_i (\tau_{ij,j} - \sigma_{ij,j}) dx \geq 0, \quad \forall \tau_{ij} \in P(t) \cap E_0, \quad (20)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) \text{ if } t = 0, \quad k^* > 1.$$

Доказательство существования обобщенных решений системы (20) осуществляется аналогично построениям Пеано по обоснованию метода ломаных Эйлера для обыкновенных дифференциальных уравнений [12]. Разобьем интервал интегрирования по времени на n частей:

$$\Delta t = T/n, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Приняв в интервале $[t_0, t_1]$ напряжения неизменными по сравнению с моментом t_0 , вычислим по (20) во всех точках области величины скоростей деформаций и напряжений. Вычисление возможно, так как в работе [13] доказано, что задача (20) равносильна нахождению седловой точки функции Лагранжа

$$L(\sigma_{ij}, v_i) = \frac{1}{2} \int_M (E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\sigma}_{kl} + M_{ij}(\sigma_{kl}) \dot{\sigma}_{ij}) dm + \int_M (\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i) v_i dm, \quad M = D \times [0, t] \quad (21)$$

В книге [6] доказывается существование седловой точки этого оператора, так как (21) является положительно определенным квадратичным функционалом в силу монотонности оператора M_{ij} . В момент t_1 примем

$$\sigma_{ij}(t_1) = \sigma_{ij}(t_0) + \Delta t \cdot \dot{\sigma}_{ij}(t_0), \quad u_i(t_1) = u_i(t_0) + \Delta t \cdot v_i(t_0). \quad (22)$$

Формулы (18), (19), (22) позволяют найти тензор $c_{ijkl}(t_1)$ и величину $k^*(t_1)$ в момент t_1 . Если $k^*(t_1) > 1$, то можно сделать расчет на отрезке времени $[t_1, t_2]$ по аналогии с предыдущим, найти напряжения и перемещения при $t = t_2$. В случае $k^*(t_2) > 1$ следует продолжать вычисления до момента t_n , когда число $k^*(t_n)$ станет меньше единицы. Затем нужно разбить интервал времени $[0, T]$ на большее число отрезков $N^\wedge > N$ и продолжать предыдущие расчеты до тех пор, пока для чисел $k^*(t_{N^\wedge})$ не выполнится условие

$$|k^*(t_{N^\wedge}) - k^*(t_{N^\wedge-1})| \leq \varepsilon^* \quad (23)$$

Здесь ε^* – заданное малое число. Доказывается на основе теорем вложения Соболева и свойств монотонных операторов [9, 14], что предельные значения искомых функций при бесконечном возрастании $N^\wedge$ существуют и обладают свойством

$$\sigma_{ij} \in L^\infty(0T, H), \quad \dot{\sigma}_{ij} \in L^2(0T, H), \quad u_i \in L_w^2(0T, BD(D)). \quad (24)$$

Индекс w в формуле (24) означает, что перемещения u_i удовлетворяют уравнениям (20) в смысле слабой* сходимости. Справедливо также предельное соотношение (25)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_{N^*} = t^*. \quad (25)$$

Число t^* следует принять за время разрушения вязко-упругопластической конструкции.

Заключение

В работе установлена теоретическая возможность прогноза времени разрушения в задачах установившейся вязко-упругопластичности (ползучести) конструкций, материал которых удовлетворяет условию текучести Надаи–Шлейхера. Решение использует достижения математической теории вариационных неравенств. Существенно, что в настоящее время численный анализ предлагаемой постановки задачи возможен, так как соответствующие алгоритмы найдены [15, 16]. Поэтому представляет интерес проведение экспериментальных работ по определению введенного в настоящей статье тензора накопления повреждений b_{ijkl} для различных материалов.

Литература

1. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 311 с.
2. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 2014. – 752 с.
3. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении: справочник / Д.А. Гохфельд, Л.Б. Гецов, К.М. Кононов и др. – Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 1996. – 408 с.
4. Локощенко, А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов: монография / А.М. Локощенко. – М.: Изд-во МГИУ, 2007. – 263 с.
5. Naumenko, K. Modeling of Creep for Structural Analysis / K. Naumenko, H. Altenbach. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. – 220 p.
6. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. Suquet, P.M. Un Espace Fonctionnel Pour les Equations de la Plasticite / P.M. Suquet // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques. – 1979. – Vol. 1, no. 1. – P. 77–87.
8. Jiusti, E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation / E. Jiusti // Boston, MA.: Birkhäuser, 1984. – 240 p.
9. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. – М.: Мир, 1989. – 492 с.
10. Новожилов, В.В. Микронапряжения в конструкционных материалах / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1990. – 222 с.
11. Neustadt, Y.S. Nonfailure Operating Time of Ideal Elastoplastic Structures under Close-to-Ultimate Loads / Y.S. Neustadt, V.A. Grachev // Z. Angew. Math. Phys. – 2025. – Vol. 76. – Article no. 35.
12. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 295 с.
13. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.
14. Temam, R. Mathematical Problems in Plasticity / R. Temam. – Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2018. – 384 p.
15. Glovinski, R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems / R. Glovinski. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 493 p.
16. Репин, С.В. Математические методы в нелинейных задачах механики сплошных сред / С.В. Репин, М.Е. Фролов. – СПб.: Изд-во политехнического ун-та, 2008. – 71 с.

Поступила в редакцию 20 ноября 2025 г.

Сведения об авторах

Найштут Юрий Семенович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Металлические и деревянные конструкции», Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: neustadt99@mail.ru.

Грачев Владимир Алексеевич – доцент кафедры «Металлические и деревянные конструкции», Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация, e-mail: grach_va@rambler.ru.

PREDICTING THE FAILURE OF VISCOELASTIC-PLASTIC STRUCTURES DURING LONG-TERM OPERATION

Yu.S. Nayshtut, V.A. Grachev

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

E-mail: neustadt99@mail.ru

Abstract. This article evaluates the service life of a viscoelastic-plastic structure before potential failure during long-term operation under a given variable quasi-static load. Failures are predicted after a significant period of trouble-free service, when the material experiences relatively high stresses and strains. The material is subject to the Nadai–Schleicher yield condition, where constant structural tensors are replaced by damage accumulation tensors that are smooth functions of inelastic strains (plasticity and creep). A mechanical model for strength analysis is formulated within the framework of continuum mechanics under the following assumptions: viscous performance (creep) conditions are considered steady-state, the plastic part of the strain tensor is normal to the loading surface, and the elastic part of the strain follows Hooke's law. The mathematical problem is initially formulated in the space of bounded deformations studied by the Lions school. This space naturally integrates into the space of generalized Sobolev functions. Using methods of variational inequalities, we can prove the existence of generalized solutions to the problem. During the proof, we can determine the time at which the viscoelastoplastic structure fails. At this point in time, the factor of safety against plastic failure (unbounded flow) becomes less than one. Importantly, the proposed calculation algorithm can be implemented numerically.

Keywords: viscoelastoplastic material; failure prediction; Nadai-Schleicher yield condition; damage accumulation tensor; variational inequalities; Sobolev space.

References

1. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* (Fundamentals of Destruction Mechanics). Moscow, Nauka Publ., 1974, 311 p. (in Russ.).
2. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsiy* (Creep of Structural Elements). Moscow, Nauka Publ. 2014, 752 p. (in Russ.).
3. Gokhfel'd D.A., Getsov L.B., Kononov K.M., Kul'chikhin E.T., Rebyakov Yu.N., Sadakov O.S., Timashev S.A., Chepurskiy V.N. *Mekhanicheskie svoystva staley i splavov pri nestatsionarnom nagruzhenii: spravochnik* (Mechanical properties of steels and alloys under unsteady loading: A reference book) Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1996, 408 p. (in Russ.).
4. Lokoshchenko A.M. *Modelirovanie protsessa polzuchesti i dlitel'noy prochnosti metallov* (Modeling of the Process of Creep and Long-Term Strength of Metals: Monograph), Moscow: MGIU Publ., 2007, 263 p. (in Russ.).
5. Naumenko K., Altenbach H. *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, 220 p. DOI: 10.1007/978-3-540-70839-1
6. Lions J.-L. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Paris, Dunod, 1969, 554 p. (in French).
7. Suquet P.M. Un Espace Fonctionnel Pour les Equations de la Plasticite. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, 1979, Serie 5, Vol. 1, no. 1, pp. 77–87. DOI: 10.5802/afst.531
8. Jiusti E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Boston, MA.: Birkhäuser, 1984, 240 p. DOI: 10.1007/978-1-4684-9486-0
9. Panagiotopoulos P. *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya* (Inequalities in Mechanics and their Applications). Moscow, Mir Publ., 1989, 492 p. (in Russ.).
10. Novozhilov, V.V. *Mikronapryazheniya v konstruktsionnykh materialakh* (Micro Stresses in Structural Materials). Leningrad, Mashinostroenie, Leningradskoe otdelenie, Publ., 1990, 222 c. (in Russ.).

11. Neustadt Y.S., Grachev V.A. Nonfailure Operating Time of Ideal Elastoplastic Structures under Close-to-Ultimate Loads. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2025, Vol. 76, 35. DOI:10.1007/s00033-024-02410-9
12. Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Lectures on the Theory of ordinary Differential Equations). Moscow, MGU Publ., 1984, 295 p. (in Russ.).
13. Eklund I., Temam R. *Vypuklyy analiz i variatsionnye problemy* (Convex Analysis and Variational Problems). Moscow, Mir Publ., 1979, 399 p. (in Russ.).
14. Temam R. *Mathematical Problems in Plasticity*. Mineola, New York: Courier Dover Publications, 2018, 384 p.
15. Glowinski R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, 493 p. DOI: 10.1007/978-3-662-12613-4
16. Repin S.V., Frolov M.E. *Matematicheskie metody v nelineynykh zadachakh mekhaniki sploshnykh sred* (Mathematical Methods in Nonlinear Continuum Mechanics Problems), Saint Petersburg, Izd-vo politekhnicheskogo un-ta Publ., 2008, 71 p. (in Russ.).

Received November 20, 2025

Information about the authors

Nayshtut Yuriy Semenovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Metal and Wooden Structures Department, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation, e-mail: neustadt99@mail.ru.

Grachev Vladimir Alekseevich is Associate Professor, Metal and Wooden Structures Department, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation, e-mail: grach_va@rambler.ru.