

# КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ, МИНИМАЛЬНЫЕ ДИАГРАММЫ КОТОРЫХ НЕ ЛЕЖАТ В КОЛЬЦЕ И ИМЕЮТ ПЯТЬ ПЕРЕКРЁСТКОВ<sup>1</sup>

А.А. Акимова<sup>2</sup>

Построена таблица узлов в утолщенном торе  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков.

*Ключевые слова:* узел, утолщенный тор, таблица узлов.

## Введение

Усиление интереса к узлам в многообразиях типа  $F \times I$ , где  $F$  – замкнутая ориентируемая поверхность, привело к задаче табулирования узлов в этих многообразиях. Естественным образом возникло продолжение теории узлов в  $S^3$  на узлы в утолщенном торе  $T \times I$ , где  $T = S^1 \times S^1$  – самая простая замкнутая ориентируемая поверхность после сферы. Узлы в  $T \times I$  можно задавать диаграммами, аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. При этом роль преобразований Рейдемейстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Из немногих работ по табулированию узлов в других многообразиях упомянем работы [1, 2] по узлам в проективном пространстве и [3] по узлам в полном торе. Эффективный метод табулирования тэнглов описан в [4]. Настоящая статья продолжает исследование, начатое в работе [5], руководствуясь её основными идеями. Автор выражает благодарность профессору С.В. Матвееву за постановку задачи и помощь в её решении.

## Основной результат

Будем рассматривать узлы (т.е. простые замкнутые кривые) в утолщенном торе с точностью до эквивалентности в смысле гомеоморфизма. Проекция узла  $K \subset T \times I$  представляет собой регулярный граф  $G \subset T$  степени 4, для которого прохождение вершин по правилу «прямо вперед» определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма узла  $K$  получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой – ниже другого в смысле величины координаты  $t \subset I$ . Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом тора на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно изменять типы всех перекрестков.

**Определение 1.** Диаграмма узла  $K$  называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу  $K$ . Проекция  $G \subset T$  называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Мы будем рассматривать только примарные узлы, т.е. узлы, отличные от локальных и составных. Локальный узел отвечает узлу в сфере, а составной является либо нетривиальной связной суммой узлов в сфере с уже табулированными узлами в  $T \times I$ , либо круговой связной суммой табулированных узлов [6]. Кроме того, мы не включаем в таблицу узлы, минимальные диаграммы которых можно расположить в некотором кольце на  $T$ . Дело в том, что такие узлы близки к узлам в полном торе, табулированным в [3]. Аналогичным образом определяются понятия примарных, локальных, составных проекций и диаграмм на торе.

Следующая теорема является основным результатом статьи.

**Теорема 1.** Существуют ровно 69 различных примарных узла в  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков. Эти диаграммы изображены на рис. 1.

Доказательство теоремы 1 состоит из четырех частей и аналогично доказательству соответствующей теоремы, подробно описанному в [5]. Сначала мы перебираем все абстрактные регулярные графы с 5 вершинами, потом – все минимальные проекции с 5 перекрестками на торе, не лежащие в кольце, затем – отвечающие им минимальные диаграммы. При этом дубликаты от-

<sup>1</sup> Исследования были поддержаны грантом РФФИ 12-01-00748, грантом ИШ-1414 2012 1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также грантом 12-Г-1-1003/2 ОМН РАН

<sup>2</sup> Акимова Алена Андреевна – студент, Южно-Уральский государственный университет. E-mail: akimova\_susu@mail.ru

брасываются. На последнем этапе мы доказываем, что отвечающие этим диаграммам узлы в  $T \times I$  различны. Для этого мы используем обобщенные полиномы Кауфмана [7, 8].

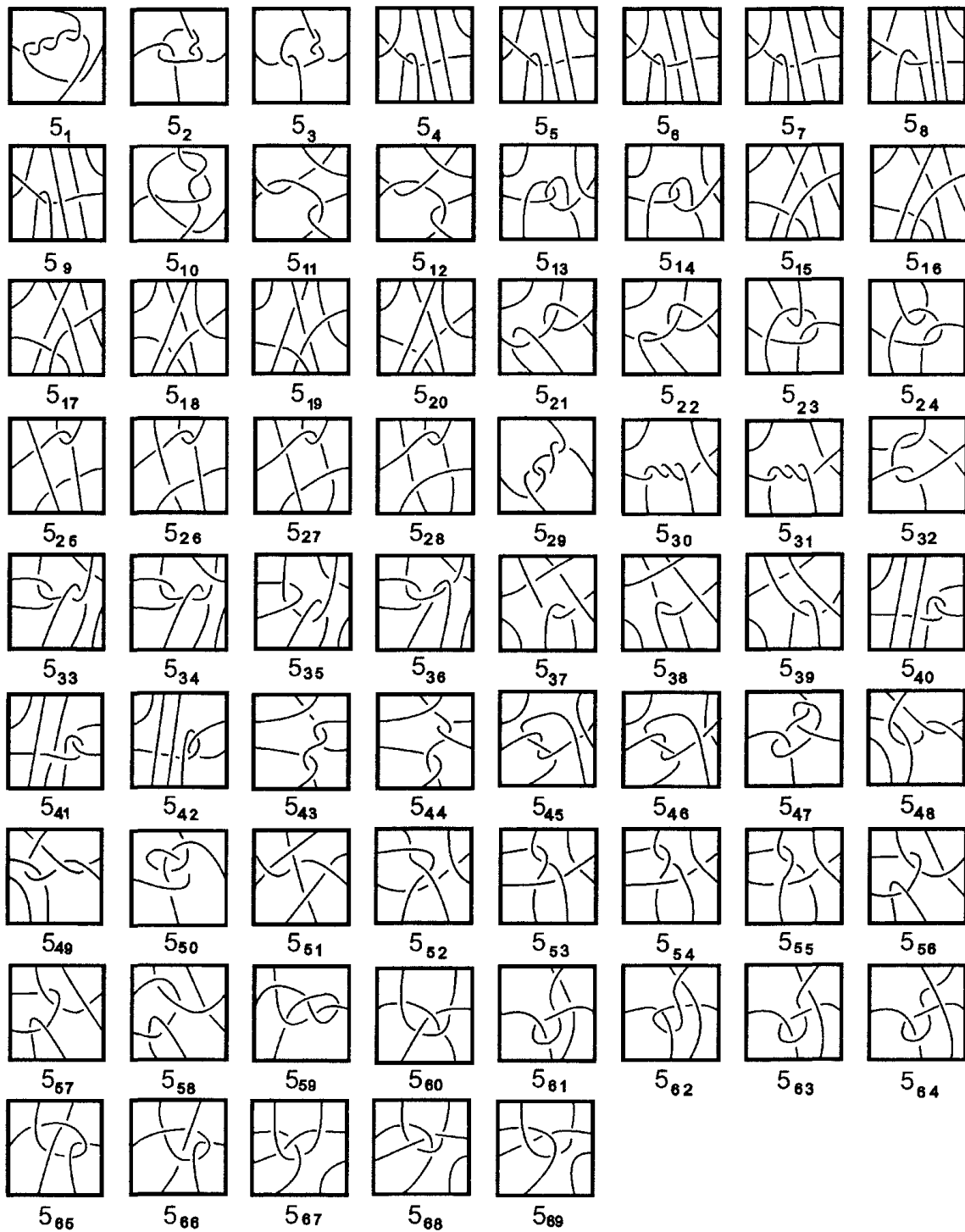


Рис. 1. Диаграммы с 5 перекрестками узлов на торе  $T$ , не лежащие в кольце. Тор  $T$  представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

**Перечисление графов и проекций**

Отметим, что минимальная проекция узла в  $T \times I$ , не лежащая в кольце, не может иметь петель.

**Лемма 1.** Существуют ровно 6 регулярных графов без петель, имеющих пять вершин (рис. 2).

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2 работы [5], в которой был рассмотрен случай графов с  $n \leq 4$  вершинами.

**Теорема 2.** Существуют ровно 34 различные примарные проекции узлов в  $T \times I$ , которые имеют 5 перекрестков, не имеют тривиальных петель и не лежат в кольце (рис. 3).

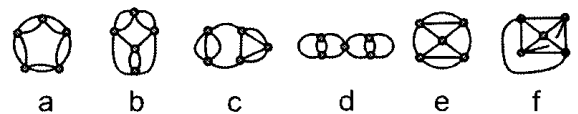


Рис. 2. Регулярные графы степени 4 с пятью вершинами, не имеющие петель

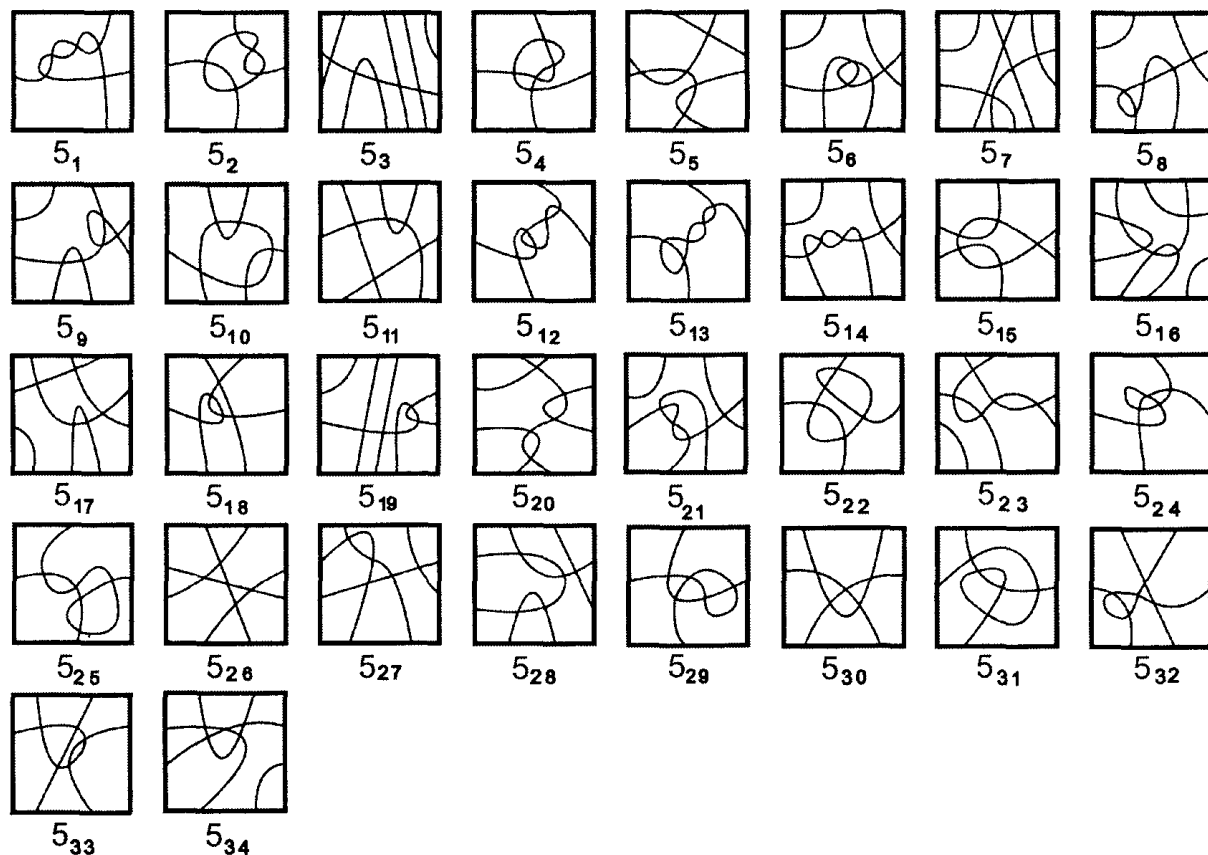


Рис. 3. Проекция с 5 перекрестками узлов на торе  $T$ , не лежащие в кольце.  
Тор  $T$  представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 2 работы [5], в которой был рассмотрен случай проекций с  $n \leq 4$  перекрестками.

### Доказательство теоремы 1

Восстановим по проекциям, описанным в теореме 2 (см. рис. 3), диаграммы узлов на  $T$ , указав тип каждого перекрестка. Для проекции с  $n$  вершинами это можно сделать  $2^n$ , то есть в нашем случае 32 способами. Однако перебор можно существенно сократить за счет соображений, описанных в [5]. Например, тип одной вершины можно зафиксировать. Только две, а не четыре, разметки вершин двуугольной грани могут дать минимальную диаграмму. Кроме того, только две разметки вершин треугольной грани, имеющей общее ребро с двуугольной гранью, могут дать минимальную диаграмму.

Различность всех приведенных в таблице узлов доказывается с помощью вычисления их обобщенных полиномов Кауфмана [7, 8]. Точная формула такова:

$$X(K) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  – числа маркеров А и В в состоянии  $s$ , а  $\gamma(s)$  и  $\delta(s)$  – числа тривиальных и нетривиальных окружностей в торе, полученных в результате разрешения всех перекрестков, которое соответствует состоянию  $s$ . Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а  $\omega(K)$  обозначает число скручивания диаграммы.

Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы, приведенные на рис. 1, различны. Попутно мы получаем доказательство минимальности каждой из 34 проекций, указанных в теореме 2.

### Заключительные замечания

1. Таблица содержит ровно 5 гомологически тривиальных узлов:  $5_{21}, 5_{22}, 5_{56}-5_{58}$ .
2. Таблица содержит ровно 13 альтернированных диаграмм:  $5_6, 5_{12}, 5_{13}, 5_{17}, 5_{21}, 5_{31}, 5_{44}, 5_{46}, 5_{49}, 5_{51}, 5_{53}, 5_{56}, 5_{68}$ .
3. Максимальное число различных узлов, имеющих одну и ту же проекцию, равно 6. Этим свойством обладают проекции  $5_3$  и  $5_7$ .

## Литература

1. Дроботухина, Ю.В. Аналог полинома Джонса для зацеплений в  $RP^3$  и обобщение теоремы Кауфмана–Мурасуги / Ю.В. Дроботухина // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, № 3. – С. 171–191.
2. Drobotukhina, Yu.V. Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings / Yu.V. Drobotukhina // Advances in Soviet Mathematics. – 1994. – V. 18, № 1. – P. 87–121.
3. Gabrovshek, B. Knots in the solid torus up to 6 crossings / B. Gabrovshek, I.M. Mroczkowski // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – V. 21. – 1250106. [43 c.] DOI: 10.1142/S0218216512501064
4. Enumerating the k-tangle projections / A. Bogdanov, V. Meshkov, A. Omelchenko, M. Petrov // J. Knot Theory Ramifications. – 2012. – V. 21, № 7. – 1250069. [17 c.] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Акимова, А.А. Классификация узлов малой сложности в утолщённом торе / А.А. Акимова, С.В. Матвеев // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. – 2012. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 10–21.
6. Matveev, S.V. Prime decompositions of knots in  $T \times I$  / S.V. Matveev // Topology and its Applications. – 2012. – V. 159, № 7. – С. 1820–1824. DOI: 10.1016/j.topol.2011.04.022
7. Kauffman, L. State models and the Jones polynomial // Topology. – 1987. – V. 26, № 3. – P. 395–407.
8. Прасолов, В.В. Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия / В.В. Прасолов, А.Б. Сосинский. – М.: МЦНМО, 1997. – 352 с.

## CLASSIFICATION OF KNOTS IN THE THICKENED TORUS WITH MINIMAL DIAGRAMS WHICH ARE NOT IN A CIRCLE AND HAVE FIVE CROSSINGS

A.A. Akimova<sup>1</sup>

We compose the table of knots in the thickened torus  $T \times I$  with minimal diagrams which are not in a circle and have five crossing intersections.

*Keywords:* knot, thickened torus, knot table.

### References

1. Drobotukhina Yu.V. Analog polinoma Dzhonsa dlya zaceplenij v  $RP^3$  i obobshhenie teoremy Kaufmana–Murasugi [An analogue of the Jones polynomial for links in  $RP^3$  and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem]. *Leningrad Mathematical Journal*. 1991. Vol. 2, Issue 3. pp. 613–630.
2. Drobotukhina Yu.V. Classification of links in  $RP^3$  with at most six crossings. *Advances in Soviet Mathematics*. 1994. Vol. 18, no. 1. pp. 87–121.
3. Gabrovshek B., Mroczkowski I.M. Knots in the solid torus up to 6 crossings. *J. Knot Theory Ramifications*. 2012. Vol. 21. 1250106. [43 pages] DOI: 10.1142/S0218216512501064.
4. Bogdanov A., Meshkov V., Omelchenko A., Petrov M. Enumerating the k-tangle projections // J. Knot Theory Ramifications. 2012. Vol. 21, no. 7. 1250069. [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691
5. Akimova A.A., Matveev S.V. Klassifikaciya uzlov maloj slozhnosti v utolshhennom tore [Classification of Low Complexity Knots in the Thickened Torus]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta*. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika. 2012. Vol. 12. Issue. 3. pp. 10–21. (in Russ.).
6. Matveev S.V. Prime decompositions of knots in  $T \times I$ . *Topology and its Applications*. 2012. Vol. 159, no. 7. pp. 1820–1824. DOI: 10.1016/j.topol.2011.04.022
7. Kauffman L. State models and the Jones polynomial. *Topology*. 1987. Vol. 26, no. 3. pp. 395–407.
8. Prasolov V.V., Sosinskij A.B. Uzly, zacepleniya, kosy i tryokhmernye mnogoobraziya [Knots, linkage, braids and three-dimensional manifold]. Moscow: MCNMO, 1997. 352 p. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 24 октября 2012 г.*

<sup>1</sup> Akimova Alyona Andreevna is Student, South Ural State University  
E-mail akimova\_susu@mail.ru