УДК 519.633

ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.В. Геренштейн[1], *М.З. Хайрисламов*[2]

Предлагается численный метод решения третьей смешанной задачи для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности параболического типа, основанный на использовании явной разностной схемы. Зависимость коэффициентов уравнения от температуры преодолевается введением новой искомой функции – первообразной теплопроводности.

Ключевые слова: теплопроводность, квазилинейное уравнение теплопроводности, явные разностные схемы, аппроксимация.

В настоящей работе используются идеи, изложенные в работах [1, 2], в которых была предложена и обоснована явная устойчивая схема для линейного уравнения теплопроводности.

Постановка задачи

Рассмотрим следующую постановку третьей смешанной задачи для одномерного однородного квазилинейного уравнения [3]:

$$\begin{cases} c(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), & 0 < t \le T,\ 0 < x < L, \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & \\ -\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = \lambda_l(u(0,\,t))\big(\theta_l - u(0,\,t)\big) + Q_l, & \\ \left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L} = \lambda_r(u(L,\,t))\big(\theta_r - u(L,\,t)\big) + Q_r, & \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x,\,t)$ – искомая функция (температура стержня), $0 \le x \le L$, $0 \le t \le T$; L – длина стержня; T – конечный момент времени; $c(u)$ – заданная объемная теплоемкость материала стержня; $q(u)$ – заданная теплопроводность материала стержня; $\varphi(x)$ – заданная функция начального распределения температуры стержня; $\lambda_l(u)$ – коэффициент теплоотдачи на левом конце стержня; $\lambda_r(u)$ – коэффициент теплоотдачи на правом конце стержня; θ_l – температура внешней среды на левом конце стержня; θ_r – температура внешней среды на правом конце стержня; Q_l – мощность потока тепла на левом конце стержня; Q_r – мощность потока тепла на правом конце стержня. Функции $c = c(u)$, $q = q(u)$, $\lambda_l = \lambda_l(u)$ и $\lambda_r = \lambda_r(u)$ предполагаются непрерывными функциями температуры, заданными для всех значений температуры.

Замена искомой функции

Поскольку в уравнении присутствует член $q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то удобно сделать следующую замену:

$$G(u) = \int_0^u q(\xi)d\xi .$$

Тогда для функции G получим уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2(u)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \tag{2}$$

---

[1] Геренштейн Аркадий Васильевич – доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет

[2] Хайрисламов Михаил Зинатуллаевич – аспирант, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный факультет
E-mail zinatmk@gmail com

где $a(u)=\sqrt{\dfrac{q(u)}{c(u)}}$ – коэффициент температуропроводности.

Функция $G(u)$ является строго монотонной функцией температуры.

Вывод рабочих формул

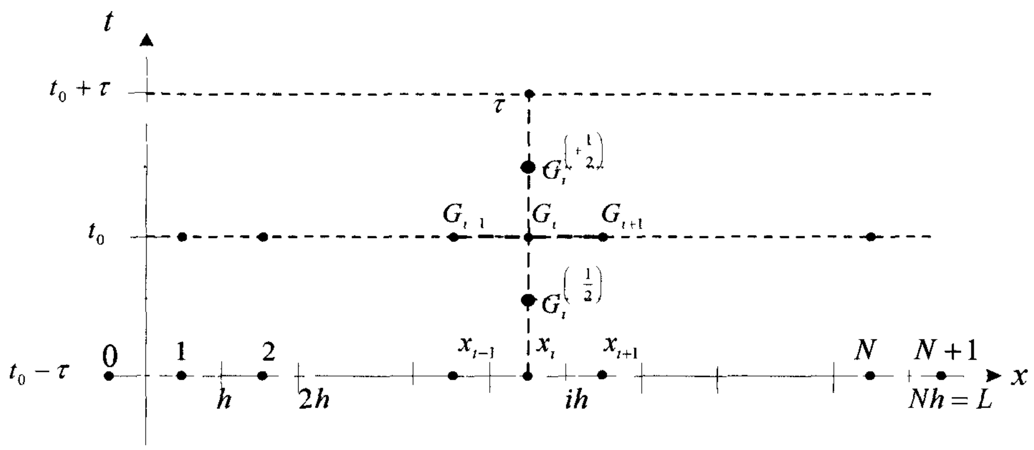
На плоскости (x, t) используется равномерная сетка [2]

$$\omega_{h\tau}=\omega_h\times\omega_\tau,\quad \omega_h=\left\{x_i=\left(i-\frac{1}{2}\right)h,\ i=1, 2, ..., N\right\},$$

$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0, 1, ...\},$$

где $h=\dfrac{L}{N}$ – шаг по переменной x, τ – шаг по переменной t. Шаблон предлагаемой схемы представлен на рисунке.

Пусть $G_i(t)=G\left(\left(i-\dfrac{1}{2}\right)h, t\right)$ – значения функции G в сечении $x=\left(i-\dfrac{1}{2}\right)h$. Запишем уравнение (2) для точки $\left(\left(i-\dfrac{1}{2}\right)h, t\right)$, заменив вторую производную по пространственной координате на соответствующее разностное соотношение:



Шаблон разностной схемы

$$\frac{dG_i(t)}{dt}=a^2(u_i)\frac{G_{i-1}(t)-2G_i(t)+G_{i+1}(t)}{h^2},\ t\in[0;\tau],\ i=2, ..., N-1. \tag{3}$$

Аппроксимируем значения $G_{i-1}(t)$ и $G_{i+1}(t)$ с точностью до членов первого порядка малости:

$$G_{i-1}(t)\approx G_{i-1}(0)+\frac{dG_{i-1}}{dt}(0)t,\ G_{i+1}(t)\approx G_{i+1}(0)+\frac{dG_{i+1}}{dt}(0)t.$$

В результате уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{dG_i(t)}{dt}+\frac{2a^2(u_i)}{h^2}G_i(t)=\frac{a^2(u_i)}{h^2}\left(G_{i-1}(0)+G_{i+1}(0)+\left(\frac{dG_{i-1}}{dt}(0)+\frac{dG_{i+1}}{dt}(0)\right)t\right). \tag{4}$$

Погрешность аппроксимации оказывается равной $O\left(\dfrac{\tau^2}{h^2}\right)$, даже если производные $\dfrac{dG_{i-1}}{dt}(0)$ и $\dfrac{dG_{i+1}}{dt}(0)$ вычисляются по формулам первого порядка точности.

Решением уравнения (4) является функция

$$G_i(t)=(G_i(0)-B)e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}t}+At+B,\ t\in[0;\tau],$$

где $A=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dG_{i-1}}{dt}(0)+\dfrac{dG_{i+1}}{dt}(0)\right)$, $B=\dfrac{G_{i-1}(0)+G_{i+1}(0)}{2}-A\cdot\dfrac{h^2}{2a^2(u_i)}$.

Для обозначения значений сеточной аппроксимации функции G на следующем временном слое будем использовать верхний индекс (+1), а на предыдущем – верхний индекс (–1), на следующем полуцелом временном слое – $\left(+\frac{1}{2}\right)$, а на предыдущем полуцелом временном слое – $\left(-\frac{1}{2}\right)$ (см. рисунок). Запишем теперь разностные аппроксимации для производных $\frac{dG_{l-1}}{dt}(0)$ и $\frac{dG_{l+1}}{dt}(0)$:

$$\frac{dG_{l-1}}{dt}(0)=\frac{G_{l-1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)}-G_{l-1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\tau},\quad \frac{dG_{l+1}}{dt}(0)=\frac{G_{l+1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)}-G_{l+1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\tau}.$$

Окончательно расчетная формула приобретает вид

$$G_l^{(+1)}=(G_l-B)e^{-\frac{2a^2(u_l)}{h^2}\tau}+A\tau+B, \tag{5}$$

где $A=\frac{1}{2\tau}\left(G_{l-1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)}-G_{l-1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}+G_{l+1}^{\left(+\frac{1}{2}\right)}-G_{l+1}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right)$, $B=\frac{G_{l-1}+G_{l+1}}{2}-A\cdot\frac{h^2}{2a^2(u_l)}$.

Для расчета значений функции G на временном слое $t=\tau$, а также для вычисления значений функции в полуцелых слоях по времени можно воспользоваться формулами:

$$G_l(\tau)=G_le^{-\frac{2a^2(u_l)}{h^2}\tau}+\left(1-e^{-\frac{2a^2(u_l)}{h^2}\tau}\right)\frac{G_{l-1}+G_{l+1}}{2}, \tag{6}$$

$$G_l^{\left(+\frac{1}{2}\right)}=G_le^{-\frac{a^2(u_l)}{h^2}\tau}+\left(1-e^{-\frac{a^2(u_l)}{h^2}\tau}\right)\frac{G_{l-1}+G_{l+1}}{2}. \tag{7}$$

Для применения формул (5)–(7) необходимо по данному значению G_l найти температуру u_l такую, что $G_l=\int_0^{u_l}q(\xi)d\xi$. В силу монотонности функции $G(u)$ эту задачу можно решить методом деления отрезка пополам (дихотомии).

Аппроксимация краевых условий

Для выполнения краевых условий введены фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ (см. рисунок): сначала рассчитываются значения искомой функции во внутренних точках, после чего исходя из краевых условий задаются ее значения в фиктивных узлах.

Перепишем краевое условие на левом конце в задаче (1) с учетом замены искомой функции:

$$-\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=\lambda_l(u(0,t))\big(\theta_l-u(0,t)\big)+Q_l. \tag{8}$$

Обозначим через G^{-1} функцию, обратную к функции G, производную $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}$ аппроксимируем разделенной разностью $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{G_1-G_0}{h}$, а значение $G(0,t)$ – полусуммой $G(0,t)=\frac{G_0+G_1}{2}$. Тогда условие (8) может быть записано в виде

$$-\frac{2G_1}{h}+\frac{2}{h}G\left(G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)=\lambda_l\left(G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)\left(\theta_l-G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)+Q_l. \tag{9}$$

Обозначив $z = G^{-1}\left(\dfrac{G_0 + G_1}{2}\right)$, из (9) получим уравнение относительно z:

$$\frac{2}{h}\cdot G(z) - \lambda_l(z)(\theta_l - z) = \frac{2G_1}{h} + Q_l . \qquad (10)$$

Считаем, что функции $q(u)$, $c(u)$, $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ заданы таблично на некотором конечном множестве точек оси температур. Пусть это множество точек есть множество чисел $\{z_1 = 0, z_2, ..., z_m\}$. Для вычисления функций в остальных точках температуры используется кусочно-линейная аппроксимация. Поэтому уравнение (10) на каждом промежутке $[z_i; z_{i+1}]$, $i = \overline{1, m-1}$ является в общем случае квадратным. Несложные выкладки позволяют записать его в виде

$$Az^2 + Bz + C = 0 , \qquad (11)$$

где

$$A = \frac{q(z_{i+1}) - q(z_i)}{(z_{i+1} - z_i)h} + \frac{\lambda_l(z_{i+1}) - \lambda_l(z_i)}{z_{i+1} - z_i},$$

$$B = \frac{2}{h}\cdot\frac{q(z_i)z_{i+1} - q(z_{i+1})z_i}{z_{i+1} - z_i} - \frac{\lambda_l(z_{i+1}) - \lambda_l(z_i)}{z_{i+1} - z_i}\theta_l + \frac{\lambda_l(z_i)z_{i+1} - \lambda_l(z_{i+1})z_i}{z_{i+1} - z_i},$$

$$C = \frac{2}{h}\cdot\left(\int_0^{z_i} q(\xi)d\xi - q(z_i)z_i + \frac{q(z_{i+1}) - q(z_i)}{z_{i+1} - z_i}\cdot\frac{z_i^2}{2}\right) - \frac{\lambda_l(z_i)z_{i+1} - \lambda_l(z_{i+1})z_i}{z_{i+1} - z_i}\theta_l - \frac{2G_1}{h} - Q_l .$$

Если z^* – корень уравнения (11), принадлежащий промежутку $[z_i; z_{i+1}]$, то искомое значение G_0 в фиктивном узле с номером 0 будет равно

$$G_0 = 2G(z^*) - G_1 .$$

Рассуждения для правого конца стержня аналогичны.

Результаты численных расчетов

Для проведения расчетов взята следующая третья смешанная задача:

$$\begin{cases} c(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), & 0 < t \le T,\ 0 < x < L, \\ u(x, 0) = \varphi_0, & \\ -\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = \lambda_l(u(0, t))(\theta_l - u(0, t)) + Q_l, & \\ \left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=L} = \lambda_r(u(L, t))(\theta_r - u(L, t)) + Q_r, & \end{cases} \qquad (12)$$

где T = 100 с, L = 1 м, φ_0 = 22 °С, θ_l = 1400 °С, θ_r = 1400 °С, $Q_l = 10^5$ Дж/(м^{2}с), $Q_r = 0$ Дж/(м^{2}с), а функции $c(u)$, $q(u)$, $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ заданы в табл. 1.

Таблица 1

Значения входных параметров задачи, являющихся функциями температуры

Параметр	Температура, °С									
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	1000
$c(u)$, 10^6 Дж/(м$^3\cdot$°С)	3,414	3,568	4,040	4,347	4,812	5,272	5,886	7,286	7,218	7,218
$q(u)$, Дж/(м$^3\cdot$°С)	22,5	23,4	24,8	26,7	27,2	27,7	28,1	28,6	27	27
$\lambda_l(u)$, Дж/(м$^2\cdot$с$\cdot$°С)	100	100	110	120	130	140	150	160	170	170
$\lambda_r(u)$, Дж/(м$^2\cdot$с$\cdot$°С)	100	120	130	140	150	150	150	150	150	150

Результаты численных расчетов по предложенной схеме приведены в табл. 2. В связи с тем, что точное решение задачи (12) неизвестно, проводилось сравнение решения, полученного по предложенной схеме, с решением, полученным по чисто неявной схеме, которая является безусловно сходящейся [3, 5].

Таблица 2

Максимальная относительная погрешность решения в сравнении с решением по чисто неявной схеме

	Величина шага по времени τ, с			
Число узлов N	0,01	0,05	0,1	0,5
40	$4{,}7\cdot 10^{-4}$	$4{,}5\cdot 10^{-4}$	$1{,}52\cdot 10^{-3}$	$1{,}72\cdot 10^{-3}$
60	$1{,}12\cdot 10^{-3}$	$1{,}12\cdot 10^{-3}$	$1{,}19\cdot 10^{-3}$	$2{,}18\cdot 10^{-3}$
80	$9{,}9\cdot 10^{-4}$	$1{,}0\cdot 10^{-3}$	$1{,}06\cdot 10^{-3}$	$2{,}15\cdot 10^{-3}$
100	$7{,}5\cdot 10^{-4}$	$7{,}7\cdot 10^{-4}$	$8{,}7\cdot 10^{-4}$	$2{,}25\cdot 10^{-3}$
150	$4{,}2\cdot 10^{-4}$	$4{,}7\cdot 10^{-4}$	$5{,}9\cdot 10^{-4}$	$2{,}43\cdot 10^{-3}$
200	$2{,}7\cdot 10^{-4}$	$3{,}4\cdot 10^{-4}$	$5{,}0\cdot 10^{-4}$	$2{,}67\cdot 10^{-3}$

Литература

1. Геренштейн, А.В. Нагревание круга движущимся теплоисточником / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2008. – Т. 15, № 5. – С. 870–871.

2. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – Вып. 1. – № 15(115). – С. 9–11.

3. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

4. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин; под. ред. А.А. Самарского. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

6. Шуп, Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 235 с.

7. Геренштейн, А.В. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 4.0» / А.В. Геренштейн, Н. Машрабов, Е.А. Геренштейн // Государственная регистрация в Отраслевом фонде алгоритмов и программ № 9776, 20.02.2008. – М.: ФГНУ ГКЦИТ, 2008.

8. Машрабов, Н. Расчет температурных полей в цилиндре при действии поверхностных тепловых источников «Тепло 5.0» / Н. Машрабов, А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2008612210, 30.04.2008, РОСПАТЕНТ.

EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME FOR THE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL QUASI-LINEAR HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

A.V. Herreinstein[1], M.Z. Khayrislamov[2]

Numerical method for the solution of the third mixed boundary value problem for one-dimensional quasi-linear heat conductivity equation of a parabolic type based on the use of explicit difference scheme is given. Dependence of coefficients on temperature is overcome by the introduction of the new required function that is a primitive integral of conductivity.

Keywords: thermal conductivity, quasi-linear heat conductivity equation, explicit difference schemes, approximation.

References

1. Herreinstein A.V., Mashrabov N. Nagrevanie kruga dvizhushhimsya teploistochnikom [Circle heating by moving heat source]. *Obozrenie prikladnoj i promyshlennoj matematiki.* 2008. Vol. 15, no. 5. pp. 870–871. (in Russ.).

2. Herreinstein A.W., Herreinstein E.A., Mashrabov N. Ustojchivye yavnye skhemy dlya uravneniya teploprovodnosti [Steady Obvious Schemes for Equation of Heat Conductivity]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie».* 2008. Issue 1. no. 15(115). pp. 9–11. (in Russ.).

3. Samarskij A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p. (in Russ.).

4. Godunov S.K., Ryaben'kij B.C. *Raznostnye skhemy* [Difference schemes]. M.: Nauka, 1977. 440 p. (in Russ.).

5. Kalitkin N.N. *Chislennye metody* [Numerical methods]. M.: Nauka, 1978. 512 p. (in Russ.).

6. Shup T. Reshenie inzhenernykh zadach na EVM [The solution of engineering problems with a computer]. Moscow: Mir, 1982. 235 p. (in Russ.).

7. Herreinstein A.V., Mashrabov N., Herreinstein E.A. Raschet temperaturnykh polej v cilindre pri dejstvii poverxnostnykh teplovykh istochnikov «Teplo 4.0» [Calculation of temperature patterns in a cylinder at surface heat sources "Teplo 4.0" effect]. *Gosudarstvennaya registraciya v Otraslevom fonde algoritmov i programm № 9776.* 20.02.2008. Moscow: FGNU GKCIT, 2008. (in Russ.).

8. Mashrabov N., Herreinstein A.V., Herreinstein E.A. Raschet temperaturnykh polej v cilindre pri dejstvii poverkhnostnykh teplovykh istochnikov «Teplo 5.0» [Calculation of temperature patterns in a cylinder at surface heat sources "Teplo 5.0" effect]. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoj registracii programm dlya EVM №2008612210.* 30.04.2008. ROSPATENT [Certificate of state registration of computer program No. 2008612210. 30.04.2008. ROSPATENT]. (in Russ.).

Поступила в редакцию 27 декабря 2012 г.

[1] Herreinstein Arcady Vasilevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.

[2] Khayrislamov Mikhail Zinatullaevich is Post-Graduate student, Applied Mathematics Department, South Ural State University.
E-mail: zinatmk@gmail.com