

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВЕНТЦЕЛЯ В КРУГЕ И НА ЕГО ГРАНИЦЕ

Н.С. Гончаров, О.Г. Китаева, Г.А. Свиридюк

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация

E-mail: goncharovns@susu.ru

Аннотация. Рассматривается задача численного исследования процессов стабилизации решений детерминированной и стохастической системы уравнений Вентцеля. Особенностью исследуемой модели является наличие динамических граничных условий Вентцеля, описывающих взаимосвязанную фильтрацию процессов во внутренней области и на ее границе. Для решения поставленной задачи предлагается использовать численный подход, основанный на экспоненциальной устойчивости и неустойчивости решений детерминированной системы уравнений Вентцеля при различных знаках параметров, описывающих среду и свойства жидкости. В случае неустойчивости решений решается задача стабилизации на основе контура обратной связи. Затем полученные результаты распространяются на стохастическую систему уравнений Вентцеля. В частности, в работе представлены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенного метода при моделировании процессов стабилизации в ограниченной области.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система уравнений Вентцеля; уравнение Баренблатта–Желтова–Кочинной; производная Нельсона–Гликлиха; неустойчивое решение, стабилизация решения.

Введение

Пусть $\Omega = \{(r, \theta) : r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi)\}$ – круг в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \{(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$. На компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процесс фильтрации влаги [1],

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta,\varphi})u_t = \alpha \Delta_{r,\theta,\varphi} u + \beta u, \quad u = (t, r, \theta), \quad (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (1)$$

$$(\lambda - \Delta_{\theta,\varphi})v_t = \gamma \Delta_{\theta,\varphi} v + \partial_R u + \delta v, \quad v = (t, \theta), \quad (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (2)$$

где

$$\Delta_{r,\theta} = (r - R) \frac{\partial}{\partial r} \left((R - r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \Delta_{\theta} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \partial_R = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (3)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$tr u = v \quad \text{на } \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (4)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$u(0, r, \theta) = u_0(r, \theta), \quad v(0, \theta) = v_0(\theta). \quad (5)$$

Назовем решение задачи (1)–(5) *детерминированным решением* динамической системы Вентцеля. Если мы заменим u и v , заданные на Ω и Γ соответственно, на стохастические процессы $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$, определенные на интервале $(0, \tau)$, получим стохастическую динамическую систему Вентцеля, где производная от стохастических процессов $\dot{\xi}(t)$, $\dot{\chi}(t)$, понимается как производная Нельсона–Гликлиха [3] от стохастического процесса $\xi = \xi(t)$ и $\chi = \chi(t)$ соответственно.

Поскольку собственные векторы оператора Лапласа в полярной системе координат содержат специальные функции, здесь символом $\Delta_{r,\theta}$ в (3) обозначен модифицированный оператор Лапласа в Ω , а в (3) символом Δ_{θ} обозначен модифицированный оператор Лапласа – Бельтрами

на Γ . Символом ∂_R обозначена внешняя по отношению к Ω нормаль. Параметры $\alpha, \gamma, \lambda, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ характеризуют среду.

Впервые разрешимость стохастического уравнения (1) рассмотрена в [4]. Затем эти исследования были продолжены. Например, в [5] доказано существование решений стохастического эволюционного уравнения, в [6] изучалась начально-конечная задача для стохастического динамического уравнения соболевского типа, [7] посвящен исследованию стохастического уравнения соболевского типа высокого порядка. Задача стабилизации стохастического уравнения (1) впервые решена в [8], в [9] рассматривается вопрос о разрешимости системы Вентцеля для уравнения (1). Настоящая работа посвящена изучению нового подхода к изучению устойчивости решений стохастической динамической системы уравнений Вентцеля в круге и на его границе, а также решению задачи стабилизации для неустойчивых решений этой системы. В частности, используя модифицированный метод Галеркина, авторы получают решение для задачи стабилизации в детерминированном и стохастическом случаях.

Работа помимо введения и списка литературы состоит из двух частей. Первая часть содержит стабилизацию полученного решения для детерминированной и стохастической динамической системы Вентцеля. Вторая часть содержит алгоритм численного решения для указанных моделей, представленных в предыдущем разделе, и результаты вычислительного эксперимента в задачах стабилизации для неоклассической задачи Вентцеля.

Аналитическое решение для задач стабилизации в условиях динамической системы Вентцеля

В данном разделе мы приводим аналитическое исследование для задачи стабилизации в детерминированном и стохастическом случаях, следуя результатам, приведенным в [2].

В частности, ставится следующая задача стабилизации: требуется найти такое управление в области f_u и на границе области f_v , что решения системы

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta})u_t = \alpha \Delta_{r,\theta} u + \beta u + f_u, u = u(t, r, \theta), (t, r, \theta) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad (6)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta)v_t = \gamma \Delta_\theta v + \partial_R u + \delta v + f_v, v = v(t, \theta), (t, \theta) \in \mathbb{R} \times \Gamma, \quad (7)$$

$$tru = v \text{ на } \mathbb{R} \times \Gamma \quad (8)$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление f_u и f_v будем искать с помощью контура обратной связи

$$f_u = Bu, f_v = Bv, \quad (9)$$

где B – линейный оператор. Обозначим через n номер максимално значения

$$\left\{ \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}, \lambda < -k^2 \right\}.$$

Оператор B можно представить в виде

$$B = \begin{cases} \mathbb{O}, \lambda > -k^2; \\ \varepsilon - \beta + \alpha n \mathbb{I}, \lambda < -k^2. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда решение системы (1)–(5), замкнутой контуром обратной связи (17), имеет вид

$$u(t) = u_1(t) + \sum_{k=2}^m t \exp\left(\frac{\varepsilon + \alpha n - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right) \frac{(R-r)^k}{2R^k} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} t \exp\left(\frac{\varepsilon + \alpha n - \alpha k^2}{\lambda + k^2}\right) (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta) \quad (11)$$

и экспоненциально устойчиво. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$, тогда при любых $u_0 \in A(\Omega)$, $v_0 \in A(\Gamma)$ решение системы (6)–(8), замкнутое обратной связью (9), где оператор B имеет вид (10), экспоненциально устойчиво.

Пусть $U = \{u \in W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Gamma) : \partial_R u = 0\}$, $F = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$. Следуя [2] построим пространства случайных K -величин. Случайные K -величины $\xi, \chi \in U_K L_2$ имеют вид

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \phi_k, \quad \chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \psi_k, \quad (12)$$

где $\{\phi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа – Бельтрами $\Delta_{r,\theta} \in \mathcal{L}(U; F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$; $\{\psi_k\}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_\theta \in \mathcal{L}(U; F)$ ортонормированных в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Gamma)$.

Рассмотрим стохастическую систему Вентцеля

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (13)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta) \overset{\circ}{\chi}(t) = \gamma \Delta_\theta \chi(t) + \partial_R \xi(t) + \delta \chi(t), \quad t \in (0, \tau), \quad \chi \in \Gamma. \quad (14)$$

К данной системе присовокупим условие согласования, что гарантирует единственность полученного решения

$$tr \xi(t) = \chi(t), \quad (15)$$

и снабдим ее начальными условиями

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \chi(0) = \chi_0. \quad (16)$$

Пусть коэффициенты $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > \beta$, $\lambda < -1$. Поставим следующую задачу стабилизации для системы (13)–(16). Требуется найти такое управление в области η_ξ и на границе области η_χ , что решения системы

$$(\lambda - \Delta_{r,\theta}) \overset{\circ}{\xi}(t) = \alpha \Delta_{r,\theta} \xi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\xi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (17)$$

$$(\lambda - \Delta_\theta) \overset{\circ}{\chi}(t) = \alpha \Delta_\theta \chi(t) + \beta \xi(t) + \eta_\chi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \quad (18)$$

$$tr \xi(t) = \chi(t) \quad (19)$$

будут экспоненциально устойчивы. Управление η_ξ и η_χ будем искать с помощью контура обратной связи

$$\eta_\xi = B\xi, \quad \eta_\chi = B\chi, \quad (20)$$

где B – линейный оператор.

Поскольку все рассуждения и оценки аналогичны детерминированному случаю, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $-\lambda \neq k^2$, $\frac{\beta}{\alpha} \neq k^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha k^2 > \beta$, $\lambda < -1$, тогда при любых $\xi_0 \in U_K L_2(\Omega)$ и $\chi_0 \in U_K L_2(\Gamma)$ решение системы (17)–(19), замкнутое обратной связью (20), где оператор B имеет вид (10), экспоненциально устойчиво.

Алгоритм численного решения задачи стабилизации динамической системы Вентцеля

В данном разделе описывается алгоритм численного решения и стабилизации стохастической динамической системы Вентцеля (1)–(5), моделирующей фильтрацию жидкости в круге и на его границе. Выбор численного метода обусловлен возможной неустойчивостью решений при определенных значениях параметров системы.

Рассмотрим модифицированный метод Галеркина, позволяющий построить приближенное решение системы. Пусть $\{\phi_k(r, \theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство собственных функций модифицированного оператора Лапласа–Бельтрами $\Delta_{r,\theta}$ в круге Ω , а $\{\psi_k(\theta)\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство собственных функций

оператора Лапласа–Бельтрами Δ_θ на границе Γ . Эти функции ортонормированы в смысле скалярных произведений пространств $A(\Omega)$ и $A(\Gamma)$ соответственно. Собственные значения оператора Лапласа имеют вид $\lambda_k = -k^2$.

Приближенное решение задачи (1)–(5) ищется в виде конечных разложений по базисным функциям

$$u(t, r, \theta) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(r, \theta), \quad v(t, \theta) = \sum_{k=1}^N b_k(t) \psi_k(\theta). \quad (21)$$

Подставляя (21) в уравнения (1)–(5) и проектируя на соответствующие базисные функции, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_k(t)$ и $b_k(t)$

$$(\lambda + k^2) a'_k(t) = (\beta - \alpha k^2) a_k(t), \quad k = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Решение системы (22) имеет вид

$$a_k(t) = a_k(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2} t\right), \quad k = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Начальные значения коэффициентов определяются из условий (5) путем проектирования

$$a_k(0) = u_0, \varphi_{kA(\Omega)}, \quad b_k(0) = v_0, \psi_{kA(\Gamma)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Для анализа устойчивости решения вычисляется относительный спектр

$$\mu_k = \frac{\beta - \alpha k^2}{\lambda + k^2}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (25)$$

Знак величины μ_k определяет характер поведения соответствующей моды: при $\mu_k < 0$ мода экспоненциально затухает (устойчивая), при $\mu_k > 0$ мода экспоненциально возрастает (неустойчивая).

В случае обнаружения неустойчивых мод применяется процедура стабилизации, для этого к исходному уравнению добавляется стабилизирующее слагаемое, соответствующее обратной связи вида (9). Пусть

$$n_m = \arg \max_k \mu_k$$

– номер максимальной неустойчивой моды. Тогда стабилизирующее воздействие имеет вид $u_{stab} = (\varepsilon + \beta - \alpha n_m^2 (\lambda + n_m^2)) u$ и гарантирует экспоненциальное затухание всех мод решения.

После применения стабилизации коэффициенты разложения принимают вид

$$a_k(t) = a_k(0) \exp\left(\frac{\beta - \alpha k^2 + \varepsilon + \beta - \alpha n_m^2 (\lambda + n_m^2)}{\lambda + k^2} t\right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (26)$$

где выбор параметра ε гарантирует отрицательность показателей экспонент для всех k . Ниже (см. рис. 1) приведена блок-схема численного решения и стабилизации для рассматриваемой системы.

Ниже рассмотрим вычислительный эксперимент. Для простоты пусть $\Omega = \{(r, \theta) : r \in [0, 5], \theta \in [0, 2\pi)\}$ – круг в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \{(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$. На компакте $\Omega \cup \Gamma$ рассмотрим систему из двух уравнений, описывающих процесс фильтрации влаги:

$$\begin{aligned} (-2 - \Delta_{r, \theta, \varphi}) \overset{\circ}{\xi}(t) &= 5\Delta_{r, \theta, \varphi} \xi + 4\xi, \quad t \in (0, \tau), \quad \xi \in \Omega, \\ (-2 - \Delta_{\theta, \varphi}) \overset{\circ}{\chi}(t) &= 5\Delta_{\theta, \varphi} \chi + \partial_R \xi + 4\chi, \quad t \in (0, \tau), \quad \chi \in \Gamma. \end{aligned}$$

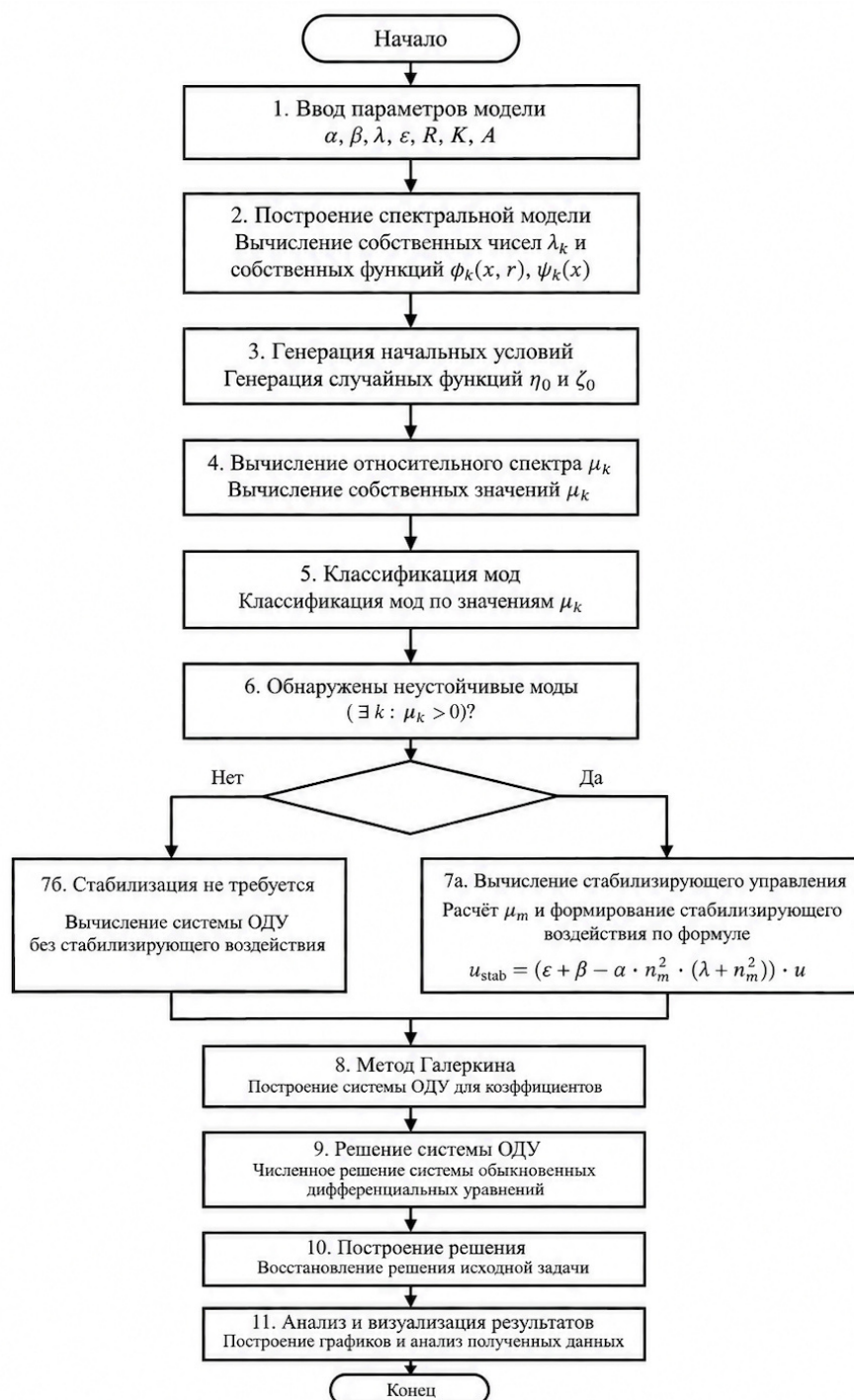


Рис. 1. Блок-схема алгоритма численного решения и стабилизации динамической системы Вентцеля

Выбор данных параметров α, β, λ обусловлен тем, согласно теореме (см. работу [2]) при $\alpha > \beta > 0$ и $\lambda < -1$ решение системы является неустойчивым. Это позволяет наглядно продемонстрировать работу процедуры стабилизации. В частности, на рис. 2 показано поведение коэффициентов $a_k(t)$ для неустойчивого (красные линии) и стабилизированного (зеленые пунктирные линии) решений. Видно, что в неустойчивом случае коэффициенты $a_4(t)$ и $a_5(t)$ экспоненциально возрастают, тогда как после применения стабилизации все коэффициенты стремятся к нулю.

На рис. 3 представлены сечения решений $\xi(t)$ в области и на границе. В частности, левый график демонстрирует неустойчивое поведение – амплитуда неограниченно растет вследствие

наличия мод; правый график показывает стабилизированное решение после применения обратной связи (все моды становятся устойчивыми, а амплитуды экспоненциально затухают с течением времени).

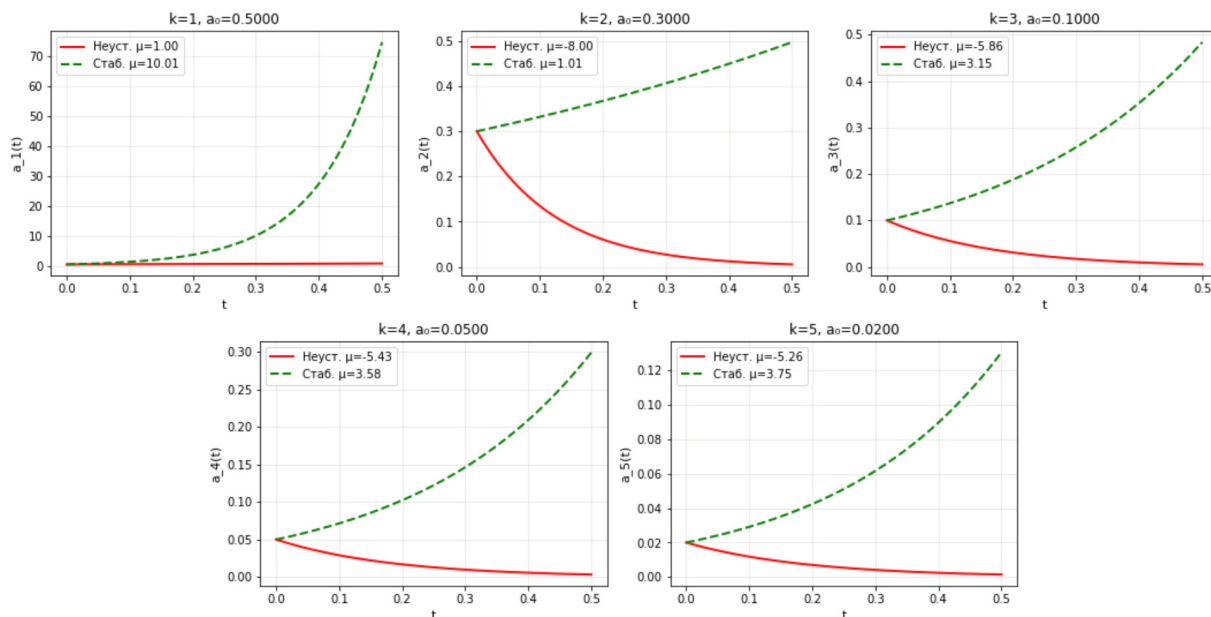


Рис. 2. Динамика коэффициентов разложения

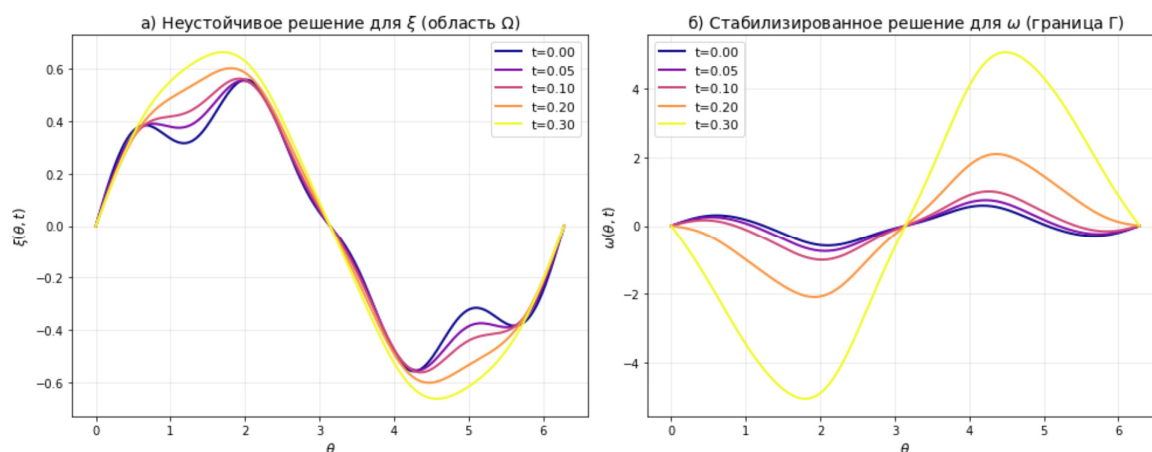


Рис. 3. 2D-сечения решений при различных t

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 25-21-20017, <https://rscf.ru/project/25-21-20017/>.

Литература

1. Barenblatt, G.I. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks / G.I. Barenblatt, Y.P. Zheltov, I.N. Kochina // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1960. – Vol. 24, no. 5. – P. 852–864.
2. Гончаров, Н.С. Стабилизация решения для стохастической динамической системы Вентцеля в круге и на его границе / Н.С. Гончаров О.Г. Китаева, Г.А. Свиридчук // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2025. – Т. 17, № 3. – С. 5–12.
3. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011. – 436 p.
4. Свиридчук, Г.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоултера–Сидорова аддитивными шумами / Г.А. Свиридчук, Н.А. Манакова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 90–103.

5. Favini, A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p -Sectorial Operators in Space of “Noises” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, N.A. Manakova // Abstract and Applied Analysis. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 697410.

6. Favini, A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises / A. Favini, S.A. Zagrebina, G.A. Sviridyuk // Electronic Journal of Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, no. 128. – P. 1–10.

7. Favini, A. One class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise” / A. Favini, G.A. Sviridyuk, A.A. Zamyshlyayeva // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2016. – Vol. 15, no. 1. – C. 185–196.

8. Kitaeva, O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltoy–Kochina Equation / O.G. Kitaeva // Journal of Computational and Engineering Mathematics. – 2023. – Vol. 10, no. 1. – P. 21–29.

9. Goncharov, N.S. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary / N.S. Goncharov, G.A. Sviridyuk // Bulletin of the South Ural State University. Series of “Mathematics. Mechanics. Physics”. – 2023. – Vol. 15, Iss. 3. – P. 15–22.

Поступила в редакцию 16 июля 2026 г.

Сведения об авторах

Гончаров Никита Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Китаева Ольга Геннадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Свиридюк Георгий Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор, научно-исследовательская лаборатория неклассических уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: sviridiukga@susu.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2026, vol. 18, no. 3, pp. 15–22

DOI: 10.14529/mmph260302

NUMERICAL METHOD FOR STABILIZING SOLUTIONS OF THE WENTZELL STOCHASTIC DYNAMICAL SYSTEM IN A CIRCLE AND ON ITS BORDER

N.S. Goncharov, O.G. Kitaeva, G.A. Sviridyuk

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

E-mail: goncharovns@susu.ru

Abstract. The paper considers the problem of numerical investigation of the stabilization processes of solutions of the deterministic and stochastic system of Wentzell equations. A feature of the model under study is the presence of dynamic Wentzell boundary conditions, which describe the interconnected filtration of processes in the internal domain and on its boundary. To solve the problem, it is proposed to use a numerical approach based on the exponential stability and instability of solutions of the deterministic system of Wentzell equations under different signs of the parameters describing the medium and the properties of the fluid. In the case of unstable solutions, the stabilization problem is solved based on a feedback loop. Then, the obtained results are extended to the stochastic system of Wentzell equations. In particular, the paper presents computational experiment demonstrating the effectiveness of the proposed method in modeling stabilization processes in a bounded domain.

Keywords: *stochastic dynamic system of Wentzell equations; the Barenblatt–Zheltoy–Kochina equation; the Nelson–Gliklikh derivative; unstable solution; solution stabilization.*

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Fluids in Fissurized Rocks. *J. Applied Mathematics and Mechanics*, 1960, Vol. 24, no. 5, pp. 852–864.
2. Goncharov N.S., Kitaeva O.G., Sviridyuk G.A. Stabilization of Solutions for the Wentzell Stochastic Dynamical System in a Circle and on Its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2025, Vol. 17, Iss. 3, pp. 5–12. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph250301
3. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics*. Springer, London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., 2011, 436 p. DOI: 10.1007/978-0-85729-163-9
4. Sviridyuk G.A., Manakova N.A. The Dynamical Models of Sobolev Type with Showalter–Sidorov Condition and Additive “Noise”. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2014, Vol. 7, no. 1, pp. 90–103. (in Russ.). DOI: 10.14529/mmph140108
5. Favini A., Sviridiuk G.A., Manakova N.A. Linear Sobolev Type Equations with Relatively p-Sectorial Operators in Space of “noises”. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Vol. 2015, Article ID 697410. DOI: 10.1155/2015/697410
6. Favini A., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A. Multipoint Initial-Final Value Problems for Dynamical Sobolev-Type Equations in the Space of Noises. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, Vol. 2018, no. 128, pp. 1–10.
7. Favini A., Sviridyuk G.A., Zamyshlyayeva A.A. One Class of Sobolev Type Equations of Higher Order with Additive “White Noise”. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2016, Vol. 15, no. 1, pp. 185–196. DOI: 10.3934/cpaa.2016.15.185
8. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt–Zheltov–Kochina Equation. *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, 2023, Vol. 10, no. 1, pp. 21–29. DOI: 10.14529/jcem230103
9. Goncharov N.S., Sviridyuk G.A. Analysis of the Stochastic Wentzell System of Fluid Filtration Equations in a Circle and on its Boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series of "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2023, Vol. 15, Iss. 3, pp. 15–22. DOI: 10.14529/mmph230302

Received July 16, 2026

Information about the authors

Goncharov Nikita Sergeevich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: goncharovns@susu.ru.

Kitaeva Olga Gennadevna is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Physics Equations, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: kitaevaog@susu.ru.

Sviridyuk Georgiy Anatol'evich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of Mathematical Physics Non-Classical Equations Research Laboratory, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: sviridiukga@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0795-2277>.