

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФфуЗИИ ОТ КОЛЬЦЕВОГО ИСТОЧНИКА С УЧЁТОМ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ КОЛМОГОВОРА–АРНОЛЬДА

В.А. Никитенко¹, А.В. Попов², А.И. Ситников¹

¹ Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация

² Московский институт электронной техники, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача рассеивания примеси от кольцевого источника в атмосфере с учётом метеорологических параметров (скорость и направление ветра, класс устойчивости атмосферы). Предлагается новый подход на основе физически информированных сетей Колмогорова–Арнольда для решения стационарного уравнения конвекции-диффузии. Проведено сравнение с традиционной полносвязной нейронной сетью в аналогичной постановке. Показано, что KAN-архитектура обеспечивает более высокую точность при значительно меньшем количестве параметров и лучшую интерпретируемость. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующих зависимость формы факела от метеорологических условий, и выполнен анализ сходимости.

Ключевые слова: сети Колмогорова–Арнольда; физически информированные нейронные сети; уравнение конвекции-диффузии; кольцевой источник; атмосферная диффузия; метеорологические параметры.

Введение

В настоящее время актуальной задачей является моделирование загрязнённости атмосферы при проектировании промышленных объектов, а также при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного и природного характера.

При решении данной задачи используются, как правило, следующие подходы: гауссовы модели факела [1], методы конечных разностей и конечных объёмов, методы Монте-Карло и физические информированные нейронные сети (PINN). Основная идея PINN заключается в том, что в функцию потерь включают физические законы, таким образом можно получать решения дифференциальных уравнений, не используя размеченные данные [2, 3]. Следует отметить, что основным недостатком PINN при решении задач с малыми диффузионными членами является низкая скорость сходимости и малая точность.

Данную проблему позволяет решить внедрение сетей Колмогорова–Арнольда [4] (KAN). Основным отличием KAN от многослойных перцептронов (MLP) является то, что MLP размещает функции активации в узлах (нейронах), а KAN размещает функции активации на ребрах (весах). Вследствие этого KAN не имеют линейных весовых матриц, а каждый весовой параметр, параметризованной как сплайн, заменяется обучаемой одномерной функцией. Узлы KAN выступают в роли сумматоров входных сигналов.

В настоящей работе предлагается применить физически информированные KAN (PI-KAN) к задаче стационарной диффузии от кольцевого источника, явно учитывающей метеорологические условия (скорость ветра, анизотропию турбулентной диффузии). Проводится сравнение с MLP-PINN, обсуждаются преимущества и ограничения метода.

Постановка задачи

Рассматривается стационарное распространение пассивной примеси в приземном слое атмосферы. В двумерной постановке (горизонтальная плоскость) процесс описывается уравнением конвекции-диффузии

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + S(x, y), \quad (1)$$

где $C(x, y)$ – концентрация примеси (г/м^3); u, v – компоненты вектора скорости ветра (м/с); D_x, D_y – коэффициенты турбулентной диффузии в направлениях x и y ($\text{м}^2/\text{с}$), зависящие от класса устойчивости атмосферы по Пасквиллу; $S(x, y)$ – функция источника.

Источник полагается кольцевым с центром (x_0, y_0) , радиусом R и радиальной шириной σ_r :

$$S(x, y) = \frac{Q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2}} e^{-\frac{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} - R)^2}{2\sigma_r^2}}, \quad (2)$$

где Q – интегральная мощность выброса (г/с). При $\sigma_r \rightarrow 0$ выражение (2) переходит в дельта-функцию, сосредоточенную на окружности радиуса R .

Область расчёта – прямоугольник $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$. Граничные условия:

$$C(0, y) = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_{\partial\Omega \setminus \{x=0\}} = 0. \quad (4)$$

Условия (3) и (4) соответствуют неограниченному распространению примеси в правой полуплоскости от левой границы.

Метеорологические параметры определяются следующим образом: $u = U \cos \theta$, $v = U \sin \theta$, где U – модуль скорости ветра на высоте источника, θ – угол направления ветра. Коэффициенты диффузии для заданного класса устойчивости P аппроксимируются эмпирическими зависимостями

$$D_x = \alpha_x(P)U, \quad D_y = \alpha_y(P)U, \quad (5)$$

где α_x, α_y – табулированные коэффициенты, возрастающие с усилением турбулентности (неустойчивая стратификация).

Сети Колмогорова–Арнольда

В основе архитектуры KAN лежит теорема Колмогорова–Арнольда.

Теорема 1. [Теорема Колмогорова–Арнольда] Если f – это многомерная непрерывная функция, то f можно записать в виде конечной композиции непрерывных функций одной переменной и бинарной операции сложения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \Phi_q \left(\sum_{p=1}^n \phi_{q,p}(x_p) \right),$$

где $\Phi_q, \phi_{q,p}$ – непрерывные одномерные функции.

Формально KAN с L слоями описывается следующим выражением

$$\text{KAN}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\Phi^{(L)} \circ \Phi^{(L-1)} \circ \dots \circ \Phi^{(1)})(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $\Phi^{(l)}, l = \overline{1, L}$ – оператор слоя. Каждый слой представляет собой матрицу одномерных функций $\phi_{i,j}^{(l)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и выход слоя вычисляется

$$x_j^{(l+1)} = \sum_{q=1}^{n_l} \phi_{i,j}^{(l)}(x_j^{(l)}),$$

где $\phi_{i,j}^{(l)}$ – B -сплайны с параметризуемыми коэффициентами.

Метод PI-KAN для задачи диффузии

Физически информированная KAN (PI-KAN) используется для аппроксимации решения $C(x, y; \Theta)$, где Θ – совокупность параметров сплайнов всех слоёв. Входной вектор сети $z = (x, y) \in \Omega$, выход – одно число $\tilde{C}$.

Функция потерь составляется из трёх компонент:

$$\mathcal{L}(\Theta) = \lambda_p \mathcal{L}_p + \lambda_b \mathcal{L}_b + \lambda_d \mathcal{L}_d,$$

где $\mathcal{L}_p$ – невязка уравнения (1), $\mathcal{L}_b$ – невязка граничных условий (3) и (4), $\mathcal{L}_d$ – ошибка на опорных данных (если они доступны), а $\lambda_p, \lambda_b, \lambda_d$ – весовые коэффициенты.

Невязка уравнения вычисляется на множестве коллокационных точек $\{z_p^{(i)}\}_{i=1}^{N_p}$, равномерно распределённых внутри Ω :

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \left[u \tilde{C}_x^{(i)} + v \tilde{C}_y^{(i)} - D_x \tilde{C}_{xx}^{(i)} - D_y \tilde{C}_{yy}^{(i)} - S^{(i)} \right],$$

где частные производные $\tilde{C}_x, \tilde{C}_y, \tilde{C}_{xx}, \tilde{C}_{yy}$ получаются автоматическим дифференцированием сети KAN по входам.

Граничная невязка формируется из двух слагаемых:

$$\mathcal{L}_b = \frac{1}{N_b^{in}} \sum_{i=1}^{N_b^{in}} (\tilde{C}(0, y_i) - 0)^2 + \frac{1}{N_b^{out}} \sum_{j=1}^{N_b^{out}} (\nabla \tilde{C}(x_j, y_j) \cdot \mathbf{n}_j)^2,$$

где $\mathbf{n}_j$ – внешняя нормаль к границе.

В настоящей работе эталонные данные $\mathcal{L}_d$ не использовались (λ_d), чтобы подчеркнуть способность сети обучаться исключительно на физических законах. Для сравнения с аналитическим решением (суперпозиция точечных источников вдоль кольца) ошибка оценивалась на регулярной сетке.

Обучение производится оптимизатором L-BFGS, известным своей эффективностью в PINN-задачах. Архитектура KAN: 2 входных нейрона, две скрытые размерности по 10 нейронов и 1 выходной; степень сплайна $k = 3$, количество узлов сетки сплайна. Для сравнения используется MLP с архитектурой 2–50–50–1 и функцией активацией гиперболический тангенс.

Вычислительные эксперименты

Параметры модели приведены в табл. 1. Класс устойчивости D (нейтральная стратификация) выбран в качестве базового; дополнительно исследованы классы A (сильная неустойчивость) и F (устойчивая стратификация) путём масштабирования D_x, D_y согласно (5).

Эталонное решение получено методом численного интегрирования аналитического решения для точечного источника в безграничной плоскости с постоянным ветром:

$$C^*(x, y) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{D_x D_y}} e^{\frac{ux}{2D_x}} K_0 \left(\frac{ux}{2\sqrt{D_x}} \sqrt{\frac{x^2}{D_x} + \frac{y^2}{D_y}} \right),$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода. Для кольцевого источника выражение интегрируется по углу $\phi \in [0, 2\pi)$ в окрестности радиуса R с гауссовым весом (2).

Результат вычислительного эксперимента показал, что KAN достигает уровня $\mathcal{L} \approx 10^{-7}$ за 800 итераций, MLP достигает уровня $\mathcal{L} \approx 10^{-4}$ за 2000 итераций, таким образом KAN демонстрирует монотонное быстрое убывание функции невязки.

Количественное сравнение точности проведено по относительной L_2 -ошибке на подобласти $[50; 300] \times [100; 300]$, исключаяющей зоны влияния границ:

$$\varepsilon = \|\tilde{C} - C^*\|_2 / \|C^*\|_2.$$

Таблица 1

Параметры задачи	
Параметр	Значение
Скорость ветра	5 м/с
Направление ветра	0° ($u = 5, v = 0$)
Коэффициент диффузии по x	50 м²/с
Коэффициент диффузии по y	20 м²/с
Мощность выброса	100 г/с
Центр кольца	(100 м, 200 м)
Радиус кольца	15 м
Ширина кольца	1,5 м
Размеры области	500 м × 400 м

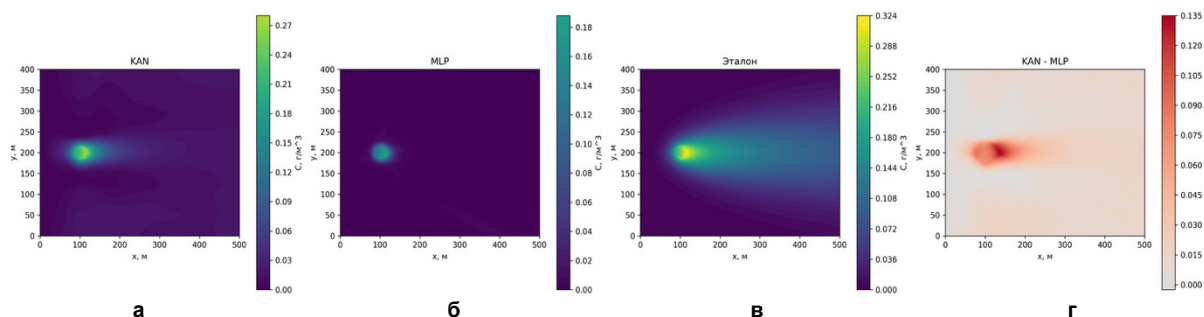


Рис. 1. Сечение концентрации для класса устойчивости А:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

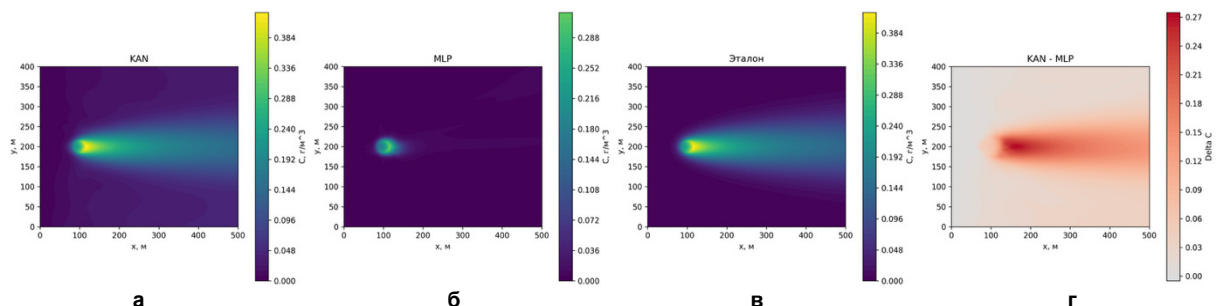


Рис. 2. Сечение концентрации для класса устойчивости D:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

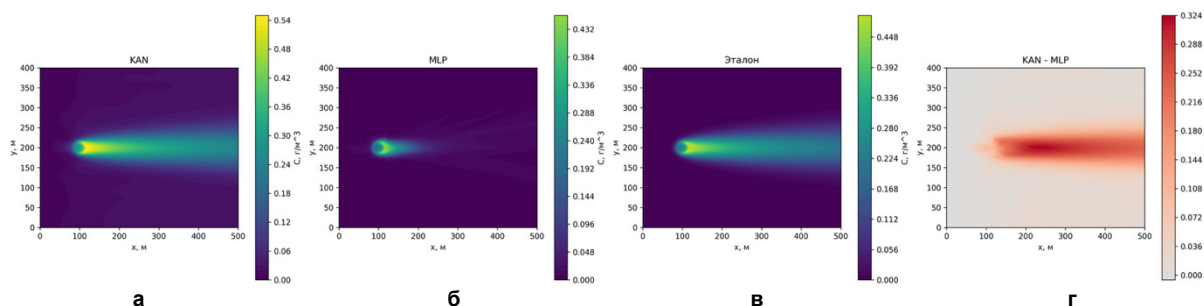


Рис. 3. Сечение концентрации для класса устойчивости F:
а) модель KAN, б) модель MLP, в) эталонное решение, г) разность KAN и MLP

Из рис. 1, в видно интенсивное турбулентное рассеивание примеси, что приводит к формированию расширенного факела после источника. Визуально видно, что KAN лучше описывает направление распространения примеси по сравнению с MLP. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,633, MLP – 0,887;
- 2) IoU факела: KAN – 0,141, MLP – 0,031.

Из рис. 2, в видно устойчивое вытянутое распределение загрязняющего вещества вдоль направления переноса. Модель KAN практически совпадает с эталонным решением, а MLP показывает, что концентрация вещества сосредоточена около источника. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,113, MLP – 0,821;
- 2) IoU факела: KAN – 0,769, MLP – 0,769.

Рис. 3, в показывает, что распределение загрязняющего вещества имеет выраженную осевую структуру с высокой концентрацией вблизи источника и постепенным снижением по направлению переноса. Модель KAN близка к эталонному решению, сохраняя основную форму распределения концентрации. MLP, в свою очередь, сглаживает распределение и показывает, что загрязняющее вещество практически не распространяется по линии переноса. Расчетные метрики дают следующие результаты:

- 1) относительная ошибка составляет: KAN – 0,202, MLP – 0,666;
- 2) IoU факела: KAN – 0,822, MLP – 0,154.

Анализ результатов показывает, что KAN точнее сохраняет физическую структуру концентрированного поля, направление переноса загрязняющего вещества, а также форму факела загрязнения. MLP при большем числе параметров дает сглаженное и локализованное распределение, что, в свою очередь, может негативно сказаться при прогнозировании зоны загрязнения.

В табл. 2 приведены результаты для трёх классов устойчивости. Из табл. 2 видно, что PI-KAN превосходит MLP-PINN для всех трёх классов устойчивости, при этом количество обучаемых параметров PI-KAN в 10 раз меньше.

Таблица 2

Относительная ошибка ε и количество параметров задачи

Класс	ε , PI-KAN	ε , MLP-PINN	Количество параметров KAN / MLP
A	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	4 320 / 50 101
D	$9,5 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	4 320 / 50 101
F	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	4 320 / 50 101

Заключение

В работе был предложен метод решения задачи атмосферной диффузии от кольцевого источника с учётом метеорологических параметров, основанный на PI-KAN. Наглядно продемонстрировано, что данный подход позволяет обеспечить высокую точность аппроксимации решения (относительная ошибка меньше 10^{-3}) при меньшем числе параметров по сравнению с традиционными PINN на основе MLP. Метод позволяет учитывать различные классы устойчивости атмосферы и параметры ветра, демонстрируя устойчивость и быструю сходимость.

Дальнейшие направления работы включают распространение подхода на трёхмерные задачи, учёт переменных по высоте метеополей и использование KAN для идентификации неизвестных параметров источника по данным наблюдений.

Литература

1. Аргучинцева, А.В. Тенденции и уровень решения проблемы оценки загрязнения атмосферы / А.В. Аргучинцева, В.К. Аргучинцев, С.Ж. Воложжина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Науки о Земле. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 20–36.
2. Исследование применимости метода PINN для решения задачи теплообмена в квадратном канале для различных чисел Прандтля / А.А. Лукьянов, Г.А. Кухта, А.А. Лукьянов и др. // Прикладная механика и техническая физика. – 2026.
3. Вахтерова, Я.А. Физически информированная нейронная сеть для решения уравнения теплопроводности Грина–Нагди III ТИПА / Я.А. Вахтерова, Л.Н. Рабинский // СТИН. – 2025. – № 9. – С. 28–32.
4. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks / Z. Liu, Y. Wang, S. Vaidya *et al.* // arXiv:2404.19756v5. <https://arxiv.org/pdf/2404.19756>

Поступила в редакцию 6 июля 2026 г.

Сведения об авторах

Никитенко Виталий Алексеевич – кандидат технических наук, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

Попов Алексей Вячеславович – кандидат технических наук, Московский институт электронной техники, г. Москва, Российская Федерация.

Ситников Александр Иванович – кандидат технических наук, доцент, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Российская Федерация.

SOLUTION TO THE PROBLEM OF DIFFUSION FROM A RING SOURCE TAKING INTO ACCOUNT METEOROLOGICAL CONDITIONS, USING KOLMOGOROV–ARNOLD NETWORKS

V.A. Nikitenko¹, A.V. Popov², A.I. Sitnikov¹

¹ Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation

² Moscow Institute of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation

E-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com

Abstract. This article examines the issue of pollutant dispersion from a ring source in the atmosphere, taking into account meteorological parameters (wind speed and direction and atmospheric stability class). It proposes a novel approach based on physically informed Kolmogorov–Arnold networks for solving the stationary convection-diffusion equation and compares it to a traditional fully connected neural network in a similar formulation. The study demonstrates that the KAN architecture provides higher accuracy with significantly fewer parameters and better interpretability. The results of the numerical experiments show the dependence of the plume shape on meteorological conditions and provide a convergence analysis.

Keywords: Kolmogorov–Arnold networks; physically informed neural networks; convection-diffusion equation; ring source; atmospheric diffusion; meteorological parameters.

References

1. Arguchintseva A.V., Arguchintsev V.K., Vologzhina S.Zh. Trends and Level of Problem Decision Atmospheric Pollution Assessment. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo univer-siteta.Seriya: Nauki o Zemle*, 2009, Vol. 2, no. 2, pp. 20–36. (in Russ.).
2. Lukyanov A.I., Kukhta G.A., Lukyanov A.A., Zaripov D.I., Tokarev M.P Studying the Applicability of the Pinn Method for Solving Heat Transfer Problems in a Square Channel for Various Prandtl Numbers. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2026. DOI: 10.15372/PMTF202515761.
3. Vakhterova Ya.A., Rabinskiy L.N. Fizicheski informirovannaya neyronnaya set' dlya resheniya uravneniya teploprovodnosti Grina–Nagdi III TIPA (Physically Informed Neural Network for Solving the Green–Naghdi Heat Equation of Type III). *STIN*, 2025, no. 9, pp. 28–32. (in Russ.).
4. Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljaci M., Hou T.Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks, *arXiv:2404.19756v5*, 30 Apr 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2404.19756.

Received July 6, 2026

Information about the authors

Nikitenko Vitaliy Alekseevich is Cand. Sc. (Engineering), Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation, e-mail: vitalijnikitenko82043@gmail.com.

Popov Aleksey Vyacheslavovich is Cand. Sc. (Engineering), Moscow Institute of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation.

Sitnikov Aleksandr Ivanovich is is Cand. Sc. (Engineering), Associate Professor, Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Voronezh, Russian Federation.