

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ИЗБЫТОЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ПОГЛОЩЕНИИ НАНОСЕКУНДНОГО ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА В ПРОВОДЯЩЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е.В. Голубев

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация
e-mail: golubev@susu.ru

Аннотация. Рассматривается задача нагрева однородного изотропного проводящего полупространства одиночным оптическим импульсом с временным и пространственным профилем в виде гауссовой функции. Аналитическое решение задачи теплопроводности для полупространства получено в квадратурах с помощью преобразований Фурье и Фурье–Бесселя в линейном приближении независимости теплофизических параметров среды от температуры и экспоненциальном законе поглощения излучения по глубине. Дано приближенное решение уравнения теплопроводности в задаче нагрева полупространства с помощью представления выражений для распределения интенсивности и температурного поля в виде произведения функций, которое справедливо для широких пучков и в случае пренебрежения распространения тепла в радиальном направлении на начальной фазе поглощения излучения. Получены формулы для максимальной избыточной температуры в полупространстве для прямоугольной и гауссовой временной формы оптического импульса.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности; гауссов пучок; оптико-акустические источники; безразмерный анализ; разделение масштабов; распределение температуры; преобразование Фурье–Бесселя; приближённое аналитическое решение; оценка максимальной температуры; экспоненциальное поглощение.

Введение

Эффекты, наблюдающиеся при поглощении оптического импульса, весьма разнообразны и используются в современных технологиях (лазерная обработка материалов, сварка и закалка) [1–4], фундаментальных (изучение динамики теплопередачи, фазовых переходов и поведения плазмы, физике нелинейных оптических явлений) [2, 5] и прикладных исследованиях (опто-акустические ультразвуковые методы дефектоскопии и неразрушающего контроля, метрология и томография, медицинская диагностика) [6, 7].

Для описания процессов возникновения механических напряжений и деформаций, структурных преобразований и фазовых переходов, связанных с поглощением импульсного лазерного излучения, необходимо знать и пространственно-временное распределение температуры в поглощающей среде. Традиционный подход основан на классическом законе теплопроводности Фурье и заключается в выборе приближения поверхностного поглощения, который хорошо оправдывает себя для хороших проводников и импульсного излучения из видимого и ближнего инфракрасного диапазона микро- и наносекундной длительности [8, 9]. Для металлов с большим удельным сопротивлением, полупроводников и диэлектриков необходим учет и объемного экспоненциального поглощения падающего излучения, что существенно усложняет аналитическое описание процесса. Поглощение пикосекундных импульсов обычно описывается в рамках модели Каттанео–Вернотте, которая учитывает поправки высшего порядка к выражению для теплового потока [10–14]. Решение задачи для более коротких фемто- и аттосекундных импульсов реализуют в рамках двухтемпературной модели [15] и ее модификации, учитывающей конечную скорость распространения тепла и электронной, и в ионной подсистемах – двухтемпературной гиперболической модели [16, 17].

Одним из наиболее эффективных математических приемов решения уравнения теплопроводности с осесимметричным распределением объемных источников тепла в полупространстве является преобразование Фурье–Бесселя, сводящее уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами к обыкновенному дифференциальному уравнению. При этом открывается возможность провести аналитическую оценку максимальной температуры, что имеет большую практическую ценность, поскольку именно это определяет пороговое значение энергии оптического импульса для фазовых переходов (например, плавления и испарения, точек Кюри, Нейля и др.), а также механизмов оптоакустической генерации звука (тепловой, гидродинамический, испарительный и др.). Несмотря на огромный прогресс в области аналитических, полуаналитических и численных методов и огромную востребованность для быстрой верификации моделей, анализа чувствительности к параметрам импульса и понимания физики импульсного нагрева, аналитических оценок параметров процесса нагрева сделано крайне мало, что обусловлено естественной сложностью анализа и решения линейных и нелинейных трехмерных задач теплопроводности.

Работа посвящена аналитическому решению линейной задачи теплопроводности методом преобразования Фурье–Бесселя, получению приближенных формул с помощью преобразования Фурье и эмпирической формулы для максимальной избыточной температуры в полупространстве, а также анализу влияния коэффициента поглощения на этот параметр температурного поля. Текст содержит таблицы, демонстрирующие соответствие аналитических оценок предельному случаю классического решения для полупространства и поверхностному поглощению.

1. Постановка задачи. Выбор модели

В нашей работе мы будем рассматривать импульсы наносекундной длительности и решать задачу теплопроводности, как часть задачи оптико-акустического преобразования, в которой нагретые части среды являются источниками термических напряжений. Применение лазерных импульсов большей длительности уменьшает эффективность преобразования энергии импульса в энергию упругих колебаний из-за небольших температурных напряжений, а при использовании более коротких импульсов возникает сильный нагрев в области поглощения, что хотя и приводит к образованию сильного акустического отклика, но связано с повреждением поверхности, что, например, недопустимо для целей неразрушающего контроля.

Поставим задачу записать выражение для температурного поля в аналитическом виде, что упростит в дальнейшем решение задачи оптико-акустического преобразования. Другой целью работы будет нахождение связи параметров оптического импульса и теплофизических параметров среды с максимальной избыточной температурой на поверхности металла.

Рассмотрим осесимметричную задачу поглощения оптического импульса в проводнике (металле). Для математической постановки задачи выберем цилиндрическую систему координат: ось z направим вдоль оси лазерного пучка, r задает расстояние от оси. Металл будем моделировать сплошной проводящей средой, в которой выполняются закон Ома и Джоуля–Ленца, занимающей полупространство (область $z \geq 0$). Пре решении задачи нагрева полупространства мы будем полагать деформации среды вследствие теплового расширения пренебрежимо малыми.

Полагая, что распределение интенсивности в падающем на границу лазерном пучке описывается основной модой свободного пространства, зададим временную и пространственную форму одиночного лазерного импульса в виде функции Гаусса:

$$I(r, t) = \frac{W}{\pi \sqrt{\pi} R_0^2 t_0} \exp\left(-r^2 / R_0^2 - t^2 / t_0^2\right), \quad (1)$$

где W – энергия импульса; t – время; t_0 – половина длительности лазерного импульса и R_0 – радиус лазерного пятна на поверхности, определяемые по критерию $1/e$. Длительность импульса полагается от одного до нескольких десятков наносекунд, радиус лазерного пятна – от десятой доли до нескольких миллиметров. Здесь пренебрегается угловой расходимостью пучка, значение которой обычно не превышает нескольких миллирадиан (несфокусированное излучение), и также не будем принимать во внимание, что вместе с основной модой из резонатора выходят и моды высших порядков, доля которых обычно не превышает одного процента.

При решении задачи будем полагать, что интенсивность излучения мала (порядка нескольких мегаватт на квадратный метр), а частота электромагнитной волны соответствует видимому

диапазону или ближней инфракрасной области. На границе среды свет испытывает частичное отражение. Коэффициент поглощения по энергии обозначим A , и хотя в общем случае его значение зависит от температуры и многих факторов, в нашей работе (кроме п. 8) мы будем полагать его константой, а также будем пренебрегать изменениями на поверхности и в объеме среды, вызванными излучением и давлением, производимым светом на поверхность металла.

2. Решение задачи с учетом экспоненциального поглощения излучения в объеме среды

При поглощении излучения в объеме среды действуют источники тепла, которые задаются объемной плотностью мощности тепловых источников $F(r, z, t)$. Показатель преломления в металле является комплексной величиной, и мы для простоты будем полагать, что он также не зависит от температуры. Следовательно, интенсивность пучка света в такой поглощающей среде будет определяться законом Бугера–Ламберта–Бера, т. е. $F(r, z, t) = AI(r, t)\mu \exp(-\mu z)$, где μ – коэффициент объемного поглощения, характеризующий глубину проникновения излучения в среду ($1/\mu$ – оптическая глубина). При $1/\mu \ll \sqrt{at_0}$ задачу можно решать в приближении поверхностного, а не объемного поглощения излучения.

Введем обозначения: T_0 – равновесная температура среды, $T(r, t)$ – избыточная температура (превышение над равновесным значением T_0), $a = \lambda_q / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности, λ_q – теплопроводность среды, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность. Для определения поля избыточной температуры запишем дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат для изотропного твердого тела:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_q \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F(r, \varphi, z, t) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Для осесимметричной задачи с учетом приближения, в котором теплофизические параметры не зависят от температуры, получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{F(r, z, t)}{\lambda_q} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Будем пренебрегать потерями энергии на границе, связанными с лучистым переносом и другими механизмами теплообмена с окружающей средой. Поскольку в этом случае граница полупространства тепло не проводит и источники тепла располагаются только в объеме среды, то это уравнение необходимо дополнить граничным условием

$$-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (4)$$

Решение системы, включающей уравнения и граничное условие, получим с помощью интегрального преобразования Фурье–Бесселя, формулы для обратного преобразования которого:

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right], I(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\tilde{I}^*(\lambda, \omega) \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right], \quad (5)$$

где λ – параметр преобразования Бесселя ($\sim$), ω – параметр преобразования Фурье ($*$), $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а образ распределения интенсивности в лазерном пучке:

$$\tilde{I}^*(\lambda, \omega) = \frac{W}{2\pi} \exp\left(-\lambda^2 R_0^2 / 4 - \omega^2 t_0^2 / 4\right). \quad (6)$$

Образ поля температуры определяется обыкновенным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}^*}{\partial z^2} - \beta_q^2 \tilde{T}^* = -A \frac{\mu}{\lambda_q} \tilde{I}^*(\lambda, \omega) \exp(-\mu z)$$

и оно может быть записано следующим образом:

$$\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) = \left[B_1 - \frac{A\mu \tilde{I}^*(\lambda, \omega) e^{-\mu z}}{2\beta_q \lambda_q} \int_0^z e^{-(\mu + \beta_q)\tilde{z}} d\tilde{z} \right] e^{+\beta_q z} + \left[B_2 + \frac{A\mu \tilde{I}^*(\lambda, \omega) e^{-\mu z}}{2\beta_q \lambda_q} \int_0^z e^{-(\mu - \beta_q)\tilde{z}} d\tilde{z} \right] e^{-\beta_q z},$$

где $B_1(\lambda, \omega)$ и $B_2(\lambda, \omega)$ – функции, определяемые дополнительными требованиями, которые в нашем случае заключаются в ограниченности образа при $z \rightarrow \infty$ и граничном условии, требующем равенства нулю плотности теплового потока на границе полупространства.

В результате образ функции распределения температуры может быть записан в виде

$$\tilde{T}^*(\lambda, z, \omega) = \frac{A\tilde{I}^*(\lambda, \omega)}{\lambda_q(1 - \beta_q^2/\mu^2)} \left[\frac{1}{\beta_q} e^{-\beta_q z} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right], \beta_q(\lambda, \omega) = \sqrt{\lambda^2 + \frac{i\omega}{a}}, \quad (7)$$

а распределение температуры определяется обратным преобразованием

$$T(r, z, t) = \frac{AW}{4\pi^2 \lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\lambda \left[\frac{\exp(-\lambda^2 R_0^2/4 - \omega^2 t_0^2/4)}{(1 - \beta_q^2/\mu^2)} \left[\frac{1}{\beta_q} e^{-\beta_q z} - \frac{1}{\mu} e^{-\mu z} \right] \lambda J_0(\lambda r) e^{i\omega t} \right]. \quad (8)$$

В рамках избранной модели полученное выражение дает точное решение задачи импульсного нагрева проводящего полупространства импульсным лазерным излучением. Расчет не вызывает чрезмерных сложностей и может быть реализован с помощью классических численных методов. К недостаткам можно отнести лишь трудности получения аналитических оценок характеристик процесса нагрева, например, скорости нагрева и максимальной температуры в зоне поглощения, а также и вычислительную трудоемкость получения значений температуры с заданной погрешностью из-за особенностей поведения подынтегральной функции, в частности при значениях параметров преобразования $\lambda = 0$ и $\omega = 0$.

При численном моделировании замечено, что при поглощении широких пучков ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) радиальный профиль распределения избыточной температуры долгое время (на порядок и больше, чем t_0) остается пропорциональным соответствующему профилю распределения интенсивности. Это означает, что проекция градиента температурного поля вдоль оси z много больше его проекции на ось r , даже если вычислять ее в точке с $z = 0, r = R_0/\sqrt{2}$, в которой она достигает максимального значения при малых t , например, в момент времени, при котором температура на поверхности достигает максимального значения (для временного профиля в виде гауссовой функции его грубо можно оценить как $t_{\max} \sim t_0/\sqrt{2}$).

В этом случае для уменьшения объема вычислений можно использовать решение одномерного уравнения теплопроводности, записанного для оси z , и умножить его на профиль распределения интенсивности вдоль оси r с соответствующей нормировкой. Для уточнения формулы с сохранением вычислительной трудоемкости построим приближенное решение, используя только преобразование Фурье.

3. Построение приближенной формулы при поглощении в объеме

Распределение интенсивности в лазерном пучке представим в виде произведения двух функций:

$$I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t), I_r(r) = \exp(-r^2/R_0^2), I_t(t) = \frac{W}{\pi\sqrt{\pi}R_0^2 t_0} \exp(-t^2/t_0^2). \quad (9)$$

Распределение температуры в полупространстве также будем искать в виде произведения $T(r, z, t) = T_r(r, t)T_z(z, t)$, тогда уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$T_z \left[\frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_r}{\partial t} \right] + T_r \left[\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + \frac{F(r, z, t)}{T_r(r, t)\lambda_q} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t} \right] = 0. \quad (10)$$

Найдем решение, приравняв последовательно первую и вторую скобку нулю. В общем случае это сделать невозможно, но, полагая, что пучок широкий ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) и за время поглощения большей части энергии отношение $F(r, z, t)/T_r(r, t)$ зависит только от z и t , это позволит построить приближенное решение.

Предположим, что оптический импульс настолько короткий, что профиль распределения температуры пропорционален радиальному профилю импульса $I_r(r)$ в момент времени $t = 0$. Для первого уравнения, получаемого приравниванием первой скобки нулю, решим задачу Коши

$T_r(r, t = 0) = I_r(r)$ (прим.: сейчас функции-множители $I_r(r)$ и $T_r(r, t)$ безразмерные). Воспользуемся формулой Пуассона [18], записанной в полярной системе координат:

$$T_r(r, t) = \frac{1}{2at} \int_0^\infty dr' \left\{ r' T_r(r', t = 0) \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{4at}\right) I_0\left(\frac{rr'}{2at}\right) \right\},$$

где $I_0(r) = J_0(ir)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Интеграл берется, и в соответствии с [19, 20] получаем

$$T_r(r, t) = \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2}. \quad (11)$$

Разложение этой функции в ряд по степеням t в окрестности $t = 0$ дает

$$T_r(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) \left[1 - 4\left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \left(\frac{at}{R_0^2}\right) + \dots \right] \approx \exp\left(-\frac{r^2}{R_0^2}\right) = I_r(r),$$

т. е. для моментов времени, для которых $R_0 \gg \sqrt{at}$, получаем выполнение требуемого условия

$$\frac{F(r, z, t)}{T_r(r, t)\lambda_q} \approx A \frac{\mu}{\lambda_q} I_t(t) \exp(-\mu z).$$

Следовательно, профиль температуры по глубине можно найти независимо от радиального профиля. Также следует заметить, что функция $I_t(t)$ заметно отличается от нуля только в небольшом интервале времени с длиной порядка десятка t_0 (в зависимости от требуемой погрешности).

В рассматриваемом случае распределение температуры по глубине $T_z(z, t)$ удовлетворяет одномерному неоднородному уравнению теплопроводности и граничному условию:

$$\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} + A \frac{\mu}{\lambda_q} I_t(t) \exp(-\mu z) = \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t}, \quad -\lambda_q \frac{\partial T_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Решение уравнения ищем с помощью интегрального преобразования Фурье:

$$T_z(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_z^*(z, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad I_t(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I_t^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad I_t^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} I_t(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{W}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{\omega^2 t_0^2}{4}\right).$$

Для образа распределения получаем

$$T_z^*(z, \omega) = \frac{A I_t^*(\omega)}{\lambda_q (1 - i\omega/(a\mu^2))} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right]. \quad (12)$$

Перейдем от образа к оригиналу с помощью обратного преобразования

$$T_z(z, t) = \frac{A}{2\pi\lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_t^*(\omega)}{1 - i\omega/(a\mu^2)} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (13)$$

Для приближенной функции получаем выражение

$$T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t) = \frac{AW}{2\pi^2 \lambda_q R_0^2} \cdot \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\omega^2 t_0^2/4)}{1 - i\omega/(a\mu^2)} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{i\omega/a})}{\sqrt{i\omega/a}} - \frac{\exp(-\mu z)}{\mu} \right] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (14)$$

4. Построение приближенной формулы при поверхностном поглощении

Аналогично п. 3 распределение интенсивности в лазерном пучке представим в виде произведения двух функций $I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t)$ и температурное поле будем искать в виде произведения $T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t)$. В случае поглощения лазерного импульса проводящей средой выделение теплоты происходит в малом приповерхностном слое, в пределе – на поверхности полупространства. Для построения приближенной формулы будем решать уравнение теплопроводности, в котором объемная плотность мощности тепловых источников $F(r, z, t) = 0$:

$$T_z \left[\frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_r}{\partial t} \right] + T_r \left[\frac{\partial^2 T_z}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_z}{\partial t} \right] = 0 \quad (15)$$

с учетом граничного условия:

$$-\lambda_q \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = AI(r, t) \Rightarrow -\lambda_q \frac{\partial T_z(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{AI(r, t)}{T_r(r, t)} \approx AI_t(t).$$

Здесь учтен вывод из п. 3, где $T_r(r, t) \approx I_r(r)$. С помощью интегрального преобразования Фурье мы получим уравнение и граничное условие для образа $T_z^*(z, \omega)$

$$\frac{\partial^2 T_z^*(z, \omega)}{\partial z^2} - \frac{i\omega}{a} T_z^*(z, \omega) = 0, \quad -\lambda_q \frac{\partial T_z^*(z, \omega)}{\partial z} \Big|_{z=0} = AI_t^*(\omega).$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$T_z^*(z, \omega) = B(\omega) \exp(-\sqrt{i\omega/a} z), \quad B(\omega) = \frac{AI_t^*(\omega)}{\lambda_q \sqrt{i\omega/a}}.$$

Обратное преобразование дает выражение, совпадающее с результатом п. 3 при $\mu \rightarrow +\infty$:

$$T_z(z, t) = \frac{A}{2\pi\lambda_q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_t^*(\omega)}{\sqrt{i\omega/a}} \exp(-z\sqrt{i\omega/a}) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (16)$$

Выражение для приближенной функции в случае поверхностного поглощения:

$$T(r, z, t) = T_r(r, t) T_z(z, t) = \frac{AW}{2\pi^2 \lambda_q R_0^2} \cdot \frac{\exp(-r^2/(R_0^2 + 4at))}{1 + 4at/R_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\omega^2 t_0^2/4 - z\sqrt{i\omega/a} + i\omega t)}{\sqrt{i\omega/a}} d\omega. \quad (17)$$

5. Безразмерные переменные

Решение задачи описывается размерными функциями и их размерными аргументами. Введение безразмерных переменных, что возможно реализовать многими способами [8], упростит рассмотрение и позволит уменьшить количество параметров, от которых зависит решение задачи, а также позволит обобщить решение, поскольку функция в безразмерных переменных отвечает целому семейству размерных функций. Кроме того, это позволит при численном моделировании оперировать значениями, по порядку величины близкими к единице, и упростить вычисление интегралов.

Для записи решения задачи в универсальном виде и облегчения процедуры численного моделирования перейдем к безразмерному параметру η_r и переменным η , χ , τ :

$$R_0 = \eta_r \sqrt{at_0}, \quad \gamma = \mu \sqrt{at_0}, \quad r = \eta \sqrt{at_0}, \quad z = \chi \sqrt{at_0}, \quad t = \tau t_0, \quad (18)$$

а также к безразмерным параметрам преобразований Фурье–Бесселя:

$$\kappa = \lambda \sqrt{at_0}, \quad \xi = \omega t_0. \quad (19)$$

Запишем результаты решения задачи в новых обозначениях. Распределение интенсивности:

$$I(\eta, \tau) = I_\eta(\eta) I_\tau(\tau), \quad I_\eta(\eta) = \exp\left(-\frac{\eta^2}{\eta_r^2}\right), \quad I_\tau(\tau) = \frac{W}{\pi \sqrt{\pi} R_0^2 t_0} \exp(-\tau^2) \quad (20)$$

и образы распределения интенсивности:

$$\tilde{I}^*(\kappa, \xi) = \frac{W}{2\pi} \exp\left(-\frac{\kappa^2 \eta_r^2}{4} - \frac{\xi^2}{4}\right), \quad I_\tau^*(\xi) = \frac{W}{\pi R_0^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right). \quad (21)$$

1) общее решение при поглощении в объеме определяется следующим образом

$$\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi) = \frac{A \sqrt{at_0} \tilde{I}^*(\kappa, \xi)}{\lambda_q (1 - \beta_q^2/\gamma^2)} \left(\frac{e^{-\beta_q \chi}}{\beta_q} - \frac{e^{-\gamma \chi}}{\gamma} \right),$$

обратное преобразование которого дает выражение

$$T(\eta, \chi, \tau) = \frac{1}{2\pi at_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa [\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi)] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau} =$$

$$= \frac{\theta A \eta_r^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa \left[\frac{\exp(-\kappa^2 \eta_r^2 / 4 - \xi^2 / 4)}{(1 - \beta_q^2 / \gamma^2)} \cdot \left(\frac{e^{-\beta_q \chi}}{\beta_q} - \frac{e^{-\gamma \chi}}{\gamma} \right) \right] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau}.$$

где обозначено $\beta_q^2 = \kappa^2 + i\xi$ и

$$\theta = \frac{2W\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2}; \quad (22)$$

2) общее решение для поверхностного поглощения

$$\tilde{T}^*(\kappa, \chi, \xi) = \frac{A\sqrt{at_0}\tilde{I}^*(\kappa, \xi)}{\lambda_q \beta_q} e^{-\beta_q \chi}, \quad (23)$$

$$T(\eta, \chi, \tau) = \frac{\theta A \eta_r^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\kappa \left[\frac{1}{\beta_q} \exp\left(-\frac{\kappa^2 \eta_r^2}{4} - \frac{\xi^2}{4} - \beta_q \chi\right) \right] \kappa J_0(\kappa \eta) e^{i\xi \tau}; \quad (24)$$

3) приближенное решение при поглощении в объеме для записи в безразмерных переменных требует подстановку соответствующего образа $I_i^*(\xi)$ в функцию:

$$T_\chi(\chi, \tau) = \frac{A\sqrt{at_0}}{2\pi\lambda_q t_0} \int_{-\infty}^{\infty} I_i^*(\xi) \frac{1 - i\xi/\gamma^2}{1 + i\xi^2/\gamma^4} \left[\frac{\exp(-\chi\sqrt{i\xi})}{\sqrt{i\xi}} - \frac{\exp(-\gamma\chi)}{\gamma} \right] \exp(i\xi\tau) d\xi. \quad (25)$$

В результате для распределения избыточной температуры имеем:

$$\begin{aligned} T(\eta, \chi, \tau) &= T_\eta(\eta, \tau) \cdot T_\chi(\chi, \tau) = \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A \gamma}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\xi^2/4)}{\sqrt{i\xi}} \cdot \frac{\gamma \exp(-\sqrt{i\xi}\chi) - \sqrt{i\xi} \exp(-\gamma\chi)}{\gamma^2 - i\xi} \exp(i\xi\tau) d\xi \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A \gamma}{2} \int_0^{\infty} d\xi \left[\frac{\gamma\sqrt{\xi} \exp(-\xi^2/4 - \chi\sqrt{\xi/2}) \sin(\chi\sqrt{\xi/2} - \xi\tau + \pi/4)}{\gamma^4 + \xi^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^3 \exp(-\xi^2/4 - \chi\sqrt{\xi/2}) \cos(\chi\sqrt{\xi/2} - \xi\tau + \pi/4)}{\sqrt{\xi}(\gamma^4 + \xi^2)} \right. \\ &\quad \left. + \exp(-\gamma\chi) \frac{\xi \exp(-\xi^2/4) \sin(\xi\tau)}{\gamma^4 + \xi^2} - \gamma^2 \exp(-\gamma\chi) \frac{\xi \exp(-\xi^2/4) \cos(\xi\tau)}{\gamma^4 + \xi^2} \right]; \quad (26) \end{aligned}$$

4) приближенное решение при поглощении на поверхности:

$$\begin{aligned} T(\eta, \chi, \tau) &= T_\eta(\eta, \tau) \cdot T_\chi(\chi, \tau) = \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i\xi}} \exp(-\xi^2/4 - \sqrt{i\xi}\chi + i\xi\tau) d\xi = \\ &= \frac{\exp(-\eta^2/(\eta_r^2 + 4\tau))}{1 + 4\tau/\eta_r^2} \cdot \frac{\theta A}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \sqrt{\frac{\xi}{2}}\chi\right) \cos\left(\xi\tau - \sqrt{\frac{\xi}{2}}\chi - \frac{\pi}{4}\right) d\xi. \quad (27) \end{aligned}$$

Заметим, что (27) носит универсальный характер и зависит только от безразмерных переменных, ее максимальное значение, которое достигается на поверхности полупространства, является константой, умноженной на θA . Это позволяет написать приближенную формулу для максимальной избыточной температуры в полупространстве при поглощении лазерного импульса.

6. Определение максимальной температуры в полупространстве

Проведенное нами численное моделирование с использованием приближенной функции $T_\chi(\chi, \tau)$ в случае объемного поглощения показало, что эта функция достигает максимального значения $\Delta T_{\max}$ в момент времени $t_{\max}$, который зависит от безразмерного коэффициента объемного поглощения (см. таблицу). Значения $\Delta T_{\max}/(\theta A) = \max[T_\chi(\chi=0, \tau)/(\theta A)]$ – отношения

максимальной избыточной температуры в полупространстве к величине θA и моментов времени $\tau_{\max} = \arg \max [T_{\chi}(\chi = 0, \tau)/(\theta A)]$ для различных γ . Согласно расчетам, величина θA (ее размерность совпадает с размерностью температуры) может служить хорошей оценкой для максимальной избыточной температуры в полупространстве при $\gamma > 4$ с погрешностью не более $\pm 8\%$.

Для получения эмпирической зависимости, связывающей точки $(\gamma_i, T_{\max i})$, было использовано преобразование

$$g = 2\gamma / (1 + \gamma),$$

которое позволило получить зависимость $(g_i, T_{\max i})$, близкую к квадратичной. Методом наименьших квадратов для $N = 60$ пар точек $(g_i, T_{\max i})$ (30 из которых приведены в таблице) найдена приближенная формула: $T_{\max}/(\theta A) \approx a_0 + a_1 g + a_2 g^2$, где $a_0 = 0,0058990408$, $a_1 = 0,73794894$, $a_2 = -0,10139614$ ($R^2 = 1$, $SD = 0,00027$). Максимальная относительная погрешность такого приближения не превышает $0,7\%$ при $\gamma \in [0, 1, +\infty)$.

Следовательно, формула для вычисления максимальной температуры в полупространстве с учетом поглощения в объеме, полученная в линейном приближении независимости параметров среды от температуры и пренебрежении распространения тепла в радиальном направлении за время поглощения оптического импульса с гауссовым временным и пространственным профилем, достигаемая на границе в центре обучаемой поверхности, может быть записана в виде

$$T_{\max}^{app} = T_0 + \Delta T_{\max}^{app} = T_0 + \theta A(a_0 + a_1 g + a_2 g^2) = T_0 + \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2} (0,0059 + 0,7380g - 0,1014g^2). \quad (28)$$

В табл. 1 для различных γ приведены значения $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ и $\Delta T_{\max}^{app}/(\theta A) = (T_{\max}^{app} - T_0)/(\theta A)$ и относительная погрешность приближенной формулы

$$\delta = \frac{|\Delta T_{\max} - \Delta T_{\max}^{app}|}{\Delta T_{\max}} \cdot 100\%. \quad (29)$$

Из полученных оценок следует, что погрешность δ для исследуемого диапазона $\gamma \geq 0,1$ не превышает $0,7\%$ и достигает минимального значения $0,001\%$ при $\gamma = 25$.

Значения $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ для $\gamma \in [4, +\infty)$ ($g > 1,6$) отличаются от единицы не более чем на $7,7\%$. $\Delta T_{\max}/(\theta A)$ равно единице (отличие в шестом знаке после запятой) при $\gamma \approx 8,281$ и достигает максимального значения $1,0761833675$ в предельном случае поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty$) (см. табл. 1). Следовательно, величина θA может служить хорошей оценкой для максимальной избыточной температуры в полупространстве. Полученное выражение (28) позволяет оценить в самом первом приближении пороговое значение плотности теплового потока (интенсивности) излучения, которое должно приводить к необходимому повышению температуры (например, для фазового перехода или нужных температурных напряжений или других эффектов). При использовании формулы (28) нужно иметь в виду, что приближение поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty$) применимо для хороших металлов в видимом и ближнем ИК-диапазоне, но для полупроводников, диэлектриков или более коротких, чем предполагается в этой работе, например, фемтосекундных оптических импульсов уже необходим учет объемного поглощения.

7. Замечание о прямоугольном импульсе

В задачах импульсного нагрева полупространства для моделирования лазерного импульса часто выбирают наиболее простую форму – прямоугольное распределение по временной и радиальной координате (не учитывая распределение в виде дельта-функции). Это обусловлено, во-первых, упрощением математических выкладок при сохранении главных особенностей решения задачи и, во-вторых, возможностью описания более сложных распределений в виде суперпозиции прямоугольных. Запишем выражение для распределения интенсивности:

$$I(r, t) = I_r(r) \cdot I_t(t), \quad I_r(r) = \exp(-r^2/R_0^2), \quad I_t(t) = \frac{W}{\pi\sqrt{\pi}R_0^2 t_0} \begin{cases} 1, & |t| \leq t_0/2, \\ 0, & |t| > t_0/2. \end{cases} \quad (30)$$

Выражение для результата преобразования Фурье:

$$I_t^*(\omega) = \frac{2W}{\pi R_0^2 t_0 \omega} \sin(\omega t_0/2), \quad I_t^*(\xi) = \frac{2W}{\pi R_0^2 \xi} \sin(\xi/2). \quad (31)$$

Таблица 1

Отношения максимальной избыточной температуры и значений $T_{\max}^{app}$ в полупространстве к θA и моменты времени $t_{\max}$, когда эта величина $\Delta T_{\max}$ достигает максимума для различных γ

γ	$t_{\max}$	$\frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_{\max}^{app}} / (\theta A)$	$\delta, \%$	γ	$t_{\max}$	$\frac{\Delta T_{\max}}{\Delta T_{\max}^{app}} / (\theta A)$	$\delta, \%$
0,1	1,6242335	0,13579 0,13673	0,692	7	0,62785665	0,98689 0,98686	0,003
0,2	1,4155332	0,24102 0,24063	0,160	8	0,6178087	0,99747 0,99743	0,004
0,3	1,2913381	0,32553 0,32492	0,189	8,281	0,61538977	1,0000018 0,99996	0,004
0,4	1,2039855	0,39499 0,39450	0,124	9	0,6098413	1,00581 1,00576	0,004
0,5	1,1375471	0,45310 0,45283	0,060	10	0,60336907	1,01255 1,01251	0,004
0,6	1,0846135	0,50242 0,50236	0,011	25	0,56683456	1,05012 1,05013	0,001
0,7	1,0411044	0,54477 0,54490	0,023	50	0,55403233	1,06305 1,06311	0,005
0,8	1,0045246	0,58152 0,58178	0,045	75	0,54969245	1,06741 1,06748	0,007
0,9	0,97323542	0,61368 0,61405	0,060	100	0,54750874	1,06959 1,06968	0,008
1	0,94610263	0,64206 0,64250	0,068	500	0,54223004	1,07486 1,07497	0,010
2	0,79167588	0,80921 0,80963	0,053	10 ³	0,54156638	1,07552 1,07564	0,011
3	0,72298144	0,88453 0,88475	0,025	10 ⁴	0,54096844	1,07612 1,07623	0,011
4	0,68387839	0,92702 0,92712	0,010	10 ⁵	0,54090861	1,07618 1,07629	0,011
5	0,65860489	0,95421 0,95423	0,003	10 ⁶	0,54090259	1,07618 1,07630	0,011
6	0,64092230	0,97306 0,97305	0,001	+\infty	0,540902	1,07618 1,0763	0,011

Приближенное решение при поглощении на поверхности прямоугольного импульса:

$$T_\chi(\chi, \tau) = \theta \int_0^\infty \frac{\sin(\xi/2)}{\xi \sqrt{\xi}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\xi}{2}} \chi\right) \cos\left(\xi \tau - \sqrt{\frac{\xi}{2}} \chi - \frac{\pi}{4}\right) d\xi. \quad (32)$$

Функция $T_\chi(\chi, \tau)/(\theta A)$ достигает максимального значения на поверхности полупространства при $\tau = 1/2$ (в нашем случае это окончание действия излучения) и значение в максимуме больше в 1,65 раза и составляет 1,77(44). Последнее значение можно получить аналитически.

Действительно, в монографии [3, см. табл. 2.1] и работах [21, 22] дано выражение для максимальной избыточной температуры на границе полупространства при окончании действия прямоугольного импульса ($t \in [0, t_0]$) для случая поверхностного поглощения:

$$T(t_0) - T_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{F_D \sqrt{at_0}}{\lambda_q} = \frac{F_D 2\sqrt{t_0}}{\sqrt{\pi \lambda_q \rho c}}, \quad (33)$$

где $F_D = IA = WA/\pi R_0^2$ – плотность теплового потока, поглощенная в среде. В наших обозначениях это выражение можно записать как

$$T_{\max} = T_0 + \Delta T_{\max}^{\text{lin}} = T_0 + \sqrt{\pi} \theta A = T_0 + \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi\sqrt{\pi t_0} \lambda_q R_0^2}, \quad (34)$$

где $\Delta T_{\max}^{\text{lin}}$ – обозначение для максимальной избыточной температуры в линейном случае независимости теплофизических параметров среды от температуры в приближении поверхностного поглощения. В (34) множитель $\sqrt{\pi}$ (точнее, $\sqrt{\pi}/1,0761833675$) дает искомое значение, во сколько раз максимальная избыточная температура при поглощении прямоугольного импульса больше, чем при поглощении импульса с гауссовым распределением.

Таблица 2

Значения параметров некоторых металлов, безразмерных параметров
и максимальной избыточной температуры для типичных значений температуры и лазерного импульса

Параметры оптического импульса: $\lambda = 1064$ нм, $W = 1$ мДж, $R_0 = 1$ мм, $t_0 = 15$ нс. Равновесная температура: $T_0 = 300$ К.		
Алюминий	$A \approx 0,08$ $\lambda_q = 237$ Вт/(м·К) [23, с. 108], $\rho = 2697$ кг/м ³ [23, с. 108], $c_p = 903,7$ Дж/(кг·К) [23, с. 108], $\mu \approx 8,1 \cdot 10^7$, $T_m = 933,61$ К [23, с. 106].	$\sqrt{at_0} = 1,21 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 1,23 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 97,83$, $\theta A \approx 5,51$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 5,89$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 107,6$ мДж.
Медь	$A \approx 0,03$, $\lambda_q = 401,9$ Вт/(м·К) [23, с. 70], $\rho = 8933$ кг/м ³ [23, с. 70], $c_p = 385$ Дж/(кг·К) [23, с. 70], $\mu \approx 3,8 \cdot 10^7$, $T_m = 1357,6$ К [23, с. 69]	$\sqrt{at_0} = 1,32 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 2,63 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 50,31$, $\theta A \approx 1,34$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 1,42$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 745$ мДж.
Железо	$A \approx 0,35$, $\lambda_q = 79,9$ Вт/(м·К) [23, с. 312], $\rho = 7870$ кг/м ³ [23, с. 312], $c_p = 450$ Дж/(кг·К) [23, с. 312], $\mu \approx 4,0 \cdot 10^7$, $T_m = 1811$ К [23, с. 311]	$\sqrt{at_0} = 0,581 \cdot 10^{-6}$ м, $1/\mu \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$ м, $\gamma = \mu\sqrt{at_0} \approx 23,27$, $\theta A \approx 34,43$ К, $\Delta T_{\max}^{\text{lin}} = 36,08$ К, $W_{\max}^{\text{lin}} = 41,88$ мДж.

В табл. 2 представлены значения теплофизических параметров типичных металлов при температуре $T_0 = 300$ К и вычислены основные безразмерные характеристики исследуемого процесса теплопроводности для случая поглощения оптического импульса промышленного Nd:YAG лазера ЛТИ-403 с фундаментальной гармоникой $\lambda = 1064$ нм, соответствующей инфракрасному участку спектра, и длительностью импульса $2t_0 \approx 30$ нс. Из табл. 2 видно, что оптическая глубина проникновения $1/\mu$ для исследуемых сред почти на два порядка меньше $\sqrt{at_0}$ – характерной глубины проникновения тепла за время поглощения импульса. Можно сделать вывод о том, что в нелинейном случае влияние температурной зависимости $\mu(T)$ на результат вычислений будет пренебрежимо мало, в сравнении с вкладом зависимости $A(T)$. И второй вывод заключается в том, что моделировать процесс поглощения импульса в рассмотренных случаях можно в приближении поверхностного поглощения, считая, что $\mu \rightarrow +\infty$.

8. Ограничение метода и нелинейный случай

В табл. 2, в самом первом приближении, не учитывающем изменения параметров сред с температурой, вычислены также $W_{\max}^{\text{lin}}$ – оценки максимальных или пороговых значений энергии импульсов, которые приводят к значениям температуры на поверхности, равным температурам плавления сред T_m . Очевидно, что в широком температурном интервале, а тем более при при-

ближении к фазовому переходу, значения теплофизических параметров среды испытывают значительные изменения и погрешность формулы для максимальной избыточной температуры будет возрастать. Для более точного определения пороговых значений необходим учет зависимости параметров среды от температуры в уравнении теплопроводности и решение нелинейной задачи с помощью специальных аналитических и полуаналитических методов (например, последовательных приближений, теплового баланса, двойного интегрирования и др.) или численных методов (сеточные методы, МКЭ и др.). Зависимость температуры от времени в нелинейном случае значительно искажена в сравнении с линейным приближением, и момент времени, в который достигается максимум температуры, также смещен. Поэтому формулу для максимальной избыточной температуры для широкого интервала плотности теплового потока использовать нельзя, поскольку она является результатом решения линейного уравнения теплопроводности, но оценку значений получить можно, подставляя «эффективные» значения параметров среды в необходимом интервале температур, и не исключено, что при этом понадобится несколько итераций для нахождения такой оценки.

Получим оценку в качестве первого приближения (например, итерационной схемы) для максимальной избыточной температуры в нелинейном случае $\Delta T_{\max}^{nl}$. Запишем (29) для случая поверхностного поглощения ($\gamma \rightarrow +\infty, g = 2$) гауссова пучка (в случае прямоугольного импульса правую часть необходимо умножить на $\sqrt{\pi}$):

$$\Delta T_{\max}^{app} = \frac{2WA\sqrt{at_0}}{\pi^2 t_0 \lambda_q R_0^2} \cdot 1,076 \Rightarrow dT_{\max}^{nl} \approx \frac{2}{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2} \cdot \frac{A}{\sqrt{\lambda_q c_p \rho}} dW.$$

Разделяя переменные (температуру и энергию) и интегрируя до конечной энергии импульса $W_{\max}^{nl}$, получаем связь с приращением температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ в виде уравнения:

$$\int_0^{\Delta T_{\max}^{nl}} \frac{\sqrt{\lambda_q(T_0 + T') c_p(T_0 + T') \rho(T_0 + T')}}{A(T_0 + T')} dT' = \frac{2W_{\max}^{nl}}{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2} \quad (35)$$

или

$$W_{\max}^{nl} = \frac{\sqrt{t_0} \pi^2 R_0^2}{2} \int_{T_0}^{T_0 + \Delta T_{\max}^{nl}} \frac{\sqrt{\lambda_q(T) c_p(T) \rho(T)}}{A(T)} dT. \quad (36)$$

Полученное уравнение связывает оценку максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ в полупространстве в случае поверхностного поглощения и учета зависимости теплофизических параметров среды от температуры с энергией оптического импульса $W_{\max}^{nl}$.

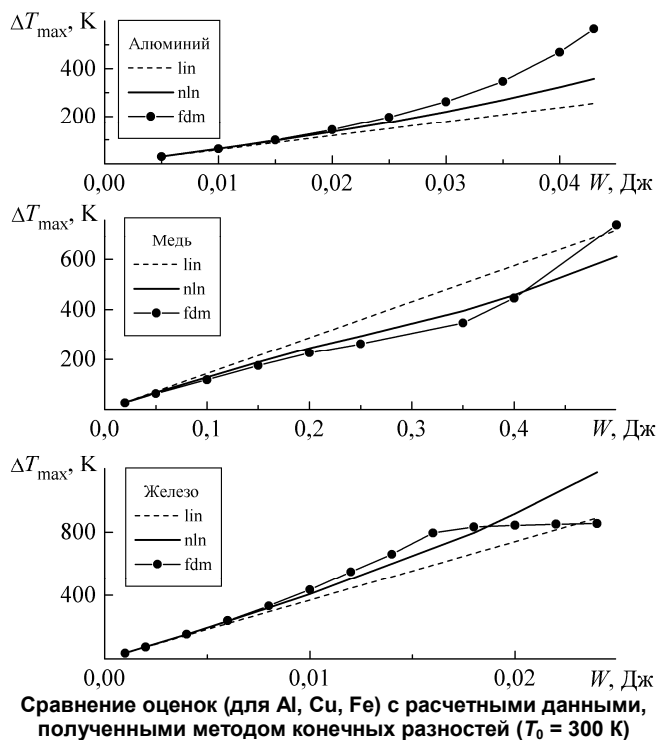
Сравним результаты расчета по формулам (34) и (36) с результатами численного моделирования нелинейной задачи методом конечных разностей с учетом температурных зависимостей $\lambda_q(T)$, $c_p(T)$, $\rho(T)$ [23] для алюминия, меди и железа. Используемые в расчетах зависимости коэффициента поглощения от температуры приведены в табл. 3.

На рисунке точками показаны результаты расчета максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}$ методом конечных разностей при различных энергиях W оптического импульса и равновесной температуре в полупространстве $T_0 = 300$ К, сплошными линиями – оценки максимальной избыточной температуры $\Delta T_{\max}^{nl}$ (36), пунктирными линиями показаны оценки $\Delta T_{\max}^{lin}$ (34), не учитывающие изменения параметров среды с температурой. Если определить погрешность аналогично формуле (29) и ограничиться значениями, меньшими, чем 10 %, то линейная оценка для алюминия оказывается справедлива при $W < 15$ мДж, а нелинейная – при $W < 24$ мДж. Для меди получаем $W < 30$ мДж и $W < 220$ мДж, а для железа $W < 7,3$ мДж и $W < 14,6$ мДж соответственно. Из рисунка видно, что нелинейная оценка (36) лучше предсказывает значения максимальной избыточной температуры, чем линейная оценка (34), которая справедлива для бесконечно малых W и ΔT . Хотя нелинейная оценка верна для постоянных параметров среды и качественно правильно описывает уменьшение максимальной избыточной температуры при увеличе-

нии температуропроводности, теплоемкости, плотности и уменьшении коэффициента отражения с температурой и на представленном рисунке часто находится между «точным» значением, полученным с помощью численных методов и линейной оценкой, следует иметь в виду, что полученное в ходе нестрогих рассуждений уравнение (36) не является следствием решения нелинейной задачи теплопроводности и требует уточнения, а также экспериментальной и численной проверки на основе более точной модели.

Таблица 3
Коэффициенты поглощения,
использованные в расчетах

T, K	A(T)		
	Al	Cu	Fe
300	0,08	0,030	0,35
400	0,10	0,025	0,36
500	0,13	0,025	0,37
600	0,16	0,018	0,38
700	0,20	0,025	0,39
800	0,24	0,030	0,40
900	0,28	0,035	0,41
1000	0,40	0,040	0,42
1100	—	0,045	0,43
1200	—	0,050	0,44
1300	—	0,060	0,45
1400	—	0,065	0,46
1500	—	—	0,47
1600	—	—	0,48
1700	—	—	0,49
1800	—	—	0,50
1900	—	—	0,52



Выводы

Аналитическими методами теории теплопроводности решена задача нахождения выражения для температурного поля в полупространстве при поглощении оптического импульса произвольного осесимметричного профиля и произвольной временной формы. Решение рассмотрено на примере пучка с гауссовым радиальным распределением и временной формой в виде гауссовой и прямоугольной формы.

Впервые получены приближенные выражения для поля температуры в полупространстве, не учитывающие распространение тепла в радиальных направлениях во время поглощения оптического импульса в приближении поглощения излучения в объеме и на поверхности среды для произвольного коэффициента объемного поглощения. Приближенные формулы требуют меньше вычислительных ресурсов и могут быть использованы для оценки параметров температурного поля, а также как модельные функции для отладки при решении более сложных задач, требующих учета температурного поля или в качестве начального приближения или весовой функции в задаче с нелинейным источником (например, для выбора адаптивного шага сеточных методов или при вычислении квадратурных формул).

Запись приближенных формул через безразмерные переменные и константы позволила впервые получить явную эмпирическую формулу для максимальной избыточной температуры в полупространстве для случая временной формы импульса в виде гауссовой функции и широкого пучка ($R_0 \gg \sqrt{at_0}$) с гауссовым профилем. От классической формулы, полученной для временно-го профиля в виде прямоугольной функции (только для случая поверхностного поглощения и однородной засветки), формула отличается добавочным множителем $1/\sqrt{\pi}$ (точнее $1,0761833675/\sqrt{\pi}$). Полученные точные и приближенные формулы допускают выражения для температурного поля и максимальной избыточной температуры в случае прямоугольного импульса, что может облегчить задачу нахождения распределения температуры в полупространстве

в случае лазерного импульса произвольной формы. Также сделана попытка связать энергию импульса и максимальную избыточную температуру в нелинейном случае зависимости теплофизических параметров среды от температуры. Полученное выражение можно использовать в случае слабой нелинейности или в небольшом температурном интервале, например, для получения оценки пороговых значений энергии импульса так, как это сделано, например, в [21].

Основные результаты работы применимы для численных оценок пороговых значений термических эффектов при плавлении, разрушении, рекристаллизации и растрескивании, возбуждении акустических колебаний для целей неразрушающего контроля и диагностики при поглощении одиночного оптического импульса наносекундной длительности, а также эквивалентному ему электронному или ионному пучку.

Литература

1. Ready, J.F. Effects due to Absorption of Laser Radiation / J.F. Ready // J. Appl. Phys. – 1965. – Vol. 36, Iss. 2. – P. 462–468.
2. Рэди, Дж. Действие мощного лазерного излучения / Дж. Рэди. – М.: Мир, 1974. – 468 с.
3. Вейко, В.П. Лазерная обработка / В.П. Вейко, М.Н. Либенсон. – Л.: Ленинздат, 1973. – 191 с.
4. Григорьянц, А.Г. Основы лазерной обработки материалов / А.Г. Григорьянц. – М.: Машиностроение, 1989. – 300 с.
5. Действие излучения большой мощности на металлы / С.И. Анисимов, Я.И. Имас, Г.С. Романов, Ю.В. Ходыко. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
6. Лямшев, Л.М. Оптико-акустические источники звука / Л.М. Лямшев // Успехи физических наук. – 1981. – Т. 135, Вып. 12. – С. 637–669.
7. Laser-Generated Ultrasound: its Properties, Mechanisms and Multifarious Applications / S.J. Daviest, C. Edward, G.S. Taylor, S.B. Palmer // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1993. – Vol. 26, no. 3. – P. 329–348.
8. Григорьев, Б.А. Импульсный нагрев излучениями / Б.А. Григорьев. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – 319 с.
9. Григорьев, Б.А. Импульсный нагрев излучениями / Б.А. Григорьев. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 726 с.
10. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
11. Joseph, D.D. Heat Waves / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Mod. Phys. – 1989. – Vol. 61, no. 1. – P. 41–73.
12. Joseph, D.D. Addendum to Paper “Heat Waves” / D.D. Joseph, L. Preziosi // Rev. Mod. Phys. – 1990. – Vol. 62, no. 2. – P. 375–391.
13. Tzou, D.Y. Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior / D.Y. Tzou // Int. J. Thermophys. – 2015. – Vol. 36. – P. 1416–1467.
14. Straughan, B. Heat Waves / B. Straughan. – Springer, New York, 2010. – 318 p.
15. Анисимов, С.И. Электронная эмиссия с поверхности металлов под действием ультракоротких лазерных импульсов / С.И. Анисимов, Б.Л. Капелиович, Т.Л. Перельман // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 66, Вып. 2. – С. 776–781.
16. Qiu, T.Q. Short-pulse Laser Heating on Metals / T.Q. Qiu, C.L. Tien // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1992. – Vol. 35, Iss. 3. – P. 719–726.
17. Qiu, T.Q. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals / T.Q. Qiu, C.L. Tien // Journal of Heat Transfer. – 1993. – Vol. 115, no. 4. – P. 835–841.
18. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
19. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
20. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
21. Lin, E.X. Laser Pulse Heating / E.X. Lin // Proc. of the 1999 Particle Accelerator Conference (PAC99), New York, USA, March 19. – 1999. – P. 1429–1431.
22. Nanosecond Laser Pulses for Mimicking Thermal Effects on Nanostructured Tungsten-Based Materials / E. Besozzi, A. Maffini, D. Dellasega *et al.* // Nucl. Fusion. – 2018. – Vol. 58. – 036019.

23. Зиновьев, В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник / В.Е. Зиновьев. – М.: Металлургия, 1989. – 382 с.

Поступила в редакцию 28 июня 2026 г.

Сведения об авторе

Голубев Евгений Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра оптоинформатики, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Российская Федерация, e-mail: golubev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.

*Bulletin of the South Ural State University
Series "Mathematics. Mechanics. Physics"
2026, vol. 18, no. 3, pp. 60–74*

MSC 80A20, 35K05, 78A60

DOI: 10.14529/mmph260307

APPROXIMATE SOLUTION TO THE THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM AND ESTIMATION OF THE MAXIMUM EXCESS TEMPERATURE DURING ABSORPTION OF A NANOSECOND LASER PULSE IN A CONDUCTIVE HALF-SPACE

E.V. Golubev

*South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
e-mail: golubev@susu.ru*

Abstract. The article addresses the issue of heating a homogeneous isotropic conductive half-space using a single optical pulse with a temporal and spatial profile in the form of a Gaussian function. An analytical solution to the heat conduction problem for the half-space is obtained in quadratures using the Fourier and Fourier-Bessel transforms in the linear approximation of the independence of the thermo-physical parameters of the medium from temperature and an exponential law of radiation absorption with depth. An approximate solution to the heat conduction equation for the half-space heating problem is given by representing the expressions for the intensity distribution and temperature field as a product of functions. This solution is applicable for wide beams and if radial heat propagation is neglected during the initial phase of radiation absorption. Formulas for the maximum excess temperature in the half-space were derived for rectangular and Gaussian temporal optical pulses.

Keywords: *Heat Conduction Equation; Gaussian Laser Pulse; Optoacoustic Generation; Optical Pulse; Dimensionless Analysis; Scale Separation; Temperature Field; Fourier–Bessel Transform; Approximate Analytical Solution; Peak Temperature Estimation; Exponential Absorption.*

References

1. Ready J.F. Effects due to Absorption of Laser Radiation. *J. Appl. Phys.*, 1965, Vol. 36, Iss. 2, pp. 462–468. DOI: 10.1063/1.1714012.
2. Ready J.F. *Effects of High Power Laser Radiation*. Academic, New York, 1971, 433 p.
3. Veyko V.P., Libenson M.N. *Lazernaya obrabotka* (Laser Processing). Leningrad, Leninzdat Publ., 1973, 191 p. (in Russ.).
4. Grigor'yants A.G. *Osnovy lazernoy obrabotki materialov* (Fundamentals of Laser Processing of Materials). Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 300 p. (in Russ.).
5. Anisimov S.I., Imas Ya.I., Romanov G.S., Khodyko Yu.V. *Deystvie izlucheniya bol'shoy moshchnosti na metally* (The Effect of High-Power Radiation on Metals). Moscow, Nauka Publ., 1970, 272 p. (in Russ.).
6. Lyamshev L.M. Optoacoustic Sources of Sound. *Sov. Phys. Usp.*, 1981, Vol. 24, Iss. 12, pp. 977–995. DOI: 10.1070/PU1981v024n12ABEH004757
7. Daviest S.J., Edward C., Taylor G.S., Palmer S.B. Laser-Generated Ultrasound: its Properties, Mechanisms and Multifarious Applications. *J. Phys. D Appl. Phys.*, 1993, Vol. 26, no. 3, pp. 329–348. DOI: 10.1088/0022-3727/26/3/001

8. Grigor'ev B.A. *Impul'snyy nagrev izlucheniymi. T. 1.* (Pulse Heating by Radiation. Vol. 1). Moscow, Nauka Publ., 1974, 319 p. (in Russ.).
9. Grigor'ev B.A. *Impul'snyy nagrev izlucheniymi. T. 2.* (Pulse Heating by Radiation. Vol. 2). Moscow, Nauka Publ., 1974, 726 p. (in Russ.).
10. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (Theory of Thermal Conductivity). Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967, 599 p.
11. Joseph D.D., Preziosi L. Heat Waves. *Rev. Mod. Phys.*, 1989, Vol. 61, no. 1, pp. 41–73. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.41
12. Joseph D.D., Preziosi L. Addendum to Paper “Heat Waves”. *Rev. Mod. Phys.*, 1990, Vol. 62, no. 2, pp. 375–391. DOI: 10.1103/RevModPhys.62.375
13. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbassi A. Macro- to Nanoscale Heat and Mass Transfer: The Lagging Behavior. *Int. J. Thermophys.*, 2015, Vol. 36, pp. 1416–1467. DOI: 10.1007/s10765-015-1913-4
14. Straughan B. *Heat Waves*. Springer, New York, 2010, 318 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-0493-4
15. Anisimov S.I., Kapeliovich B.L., Perel'man T.L. Electron-Emission from Surface of Metals Induced by Ultrashort Laser Pulses. *Soviet Physics JETP*, 1974, Vol. 39, no. 2, pp. 375–377.
16. Qiu T.Q., Tien C.L. Short-Pulse Laser Heating on Metals. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1992, Vol. 35, Iss. 3, pp. 719–726. DOI: 10.1016/0017-9310(92)90131-b
17. Qiu T.Q., Tien C.L. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals. *Journal of Heat Transfer*, 1993, Vol. 115, no. 4, pp. 835–841. DOI: 10.1115/1.2911377
18. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Clarendon Press, 1959, 510 p.
19. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1. New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill book company, Inc, 1953, 302 p.
20. Gradshteyn I.S. Ryzhik I.M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Burlington, MA., 2007, 1171 p.
21. Lin X.E. Laser Pulse Heating. *Proc. 1999 Particle Accelerator Conference* (Cat. No.99CH36366), Vol. 2, New York, NY, USA, 1999, pp. 1429–1431. DOI: 10.1109/PAC.1999.795571
22. Besozzi E., Maffini A., Dellasega D., Russo V., Facibeni A., Pazzaglia A., Beghi M.G., Passoni M. Nanosecond Laser Pulses for Mimicking Thermal Effects on Nanostructured Tungsten-Based Materials. *Nucl. Fusion*, 2018, Vol. 58, 036019 (12 pp). DOI: 10.1088/1741-4326/aaa5d5
23. Zinov'ev V.E. *Teplofizicheskie svoystva metallov pri vysokikh temperaturakh. Spravochnik* (Thermophysical Properties of Metals at High Temperatures. Guide), Moscow, Metallurgiya Publ., 1989, 382 p. (in Russ.).

Received June 28, 2026

Information about the author

Golubev Evgeniy Valer'evich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Optoinformatics Department, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, e-mail: golubev-ev@susu.ru, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6641-0702>.