

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Т.С. Камалтдинова<sup>1</sup>

Решена обратная граничная задача в предположении, что искомое решение является кусочно-гладкой функцией и найдены оценки сверху приближенного решения. Данные оценки значительно превосходят по точности известные оценки.

*Ключевые слова:* операторное уравнение, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

## Введение

В работе [1] аналогичная задача решена, в предположении, что искомое граничное условие  $h(t)$  принадлежит пространству  $C^2[0, \infty)$ , линейным методом проекционной регуляризации. При этом были получены точные по порядку оценки погрешности приближенного решения.

В статье [2] предполагалось, что решение  $h(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty, \infty)$  и использован нелинейный метод проекционной регуляризации к решению более простой задачи.

В настоящей работе, используя методику работы [2], решена обратная граничная задача при условии кусочной гладкости решения и найдена оценка погрешности приближенного решения.

## Постановка прямой задачи и исследование применимости преобразований Фурье для нахождения решения

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = h(t); \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где  $h(t)$  – кусочно-гладкая на полупрямой функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода производной  $h'(t)$ ,

$$h(0) = 0 \quad (4)$$

и существует число  $t_0 > 0$  такое, что для любого  $t \geq t_0$

$$h(t) = 0; \quad (5)$$

$$u(1, t) = 0; \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Рассмотрим классическое решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(3), (6), т.е. такое, что  $u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}((0, 1) \times (0, \infty))$ .

Из теоремы, сформулированной в [3, с. 424] следует единственность классического решения  $u(x, t)$ . Перейдем к исследованию его существования и применимости к его определению преобразования Фурье по переменной  $t$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi(t) \in C[0, \infty)$  и ограничена на этой полупрямой. Тогда справедливы соотношения:

<sup>1</sup> Камалтдинова Татьяна Сергеевна – старший преподаватель, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет  
E-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru

$$\int_0^{\infty} u'_x(x,t) \Phi(t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{\infty} u(x,t) \Phi(t) dt \right]$$

и

$$\int_0^{\infty} u''_{xx}(x,t) \Phi(t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \int_0^{\infty} u(x,t) \Phi(t) dt \right].$$

**Теорема 2.** Пусть  $u(x,t)$  – решение задачи (1)–(3), (6). Тогда справедливы соотношения

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} |u(x,t) - h(t)| dt = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^{\infty} |u(x,t)| dt = 0.$$

### Постановка обратной граничной задачи

Обратная граничная задача заключается в том, что в постановке прямой задачи (1)–(6) граничное условие (3), определяемое функцией  $h(t)$ , не известно и подлежит определению, а вместо него в точке  $x_1 \in (0,1)$ , измеряется температура  $f(t)$  стержня, соответствующая данному процессу

$$u(x_1, t) = f(t); \quad t \geq 0. \quad (7)$$

### Сведение обратной задачи (1)–(2), (6)–(7) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть  $Z \in L_2[0, \infty)$ . Элемент  $h(t) \in Z$  тогда и только тогда, когда

$$h(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) + \psi(t),$$

где

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{a_j}{2} \left[ (t - c_j)^2 - b_j^2 \right]; & c_j - b_j \leq t \leq c_j + b_j, \\ 0; & t < c_j - b_j, t > c_j + b_j \end{cases}$$

$a_j, b_j, c_j > 0$ ,  $c_j \geq b_j$  и  $c_j \neq c_k$  при  $j \neq k$ , а  $\psi(t) \in W_2^{3/2}[0, \infty)$ .

Тогда предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$ , участвующем в условии (7), существует функция  $h_0(t)$ , принадлежащая множеству  $Z$ , но функция  $f_0(t)$  нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция  $f_\delta(t) \in L_2[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$  и число  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta. \quad (8)$$

Требуется, используя  $f_\delta, \delta$  и  $Z$ , определить приближенное решение  $h_\delta(t)$  задачи (1)–(2), (6)–(8) и оценить уклонение  $\|h_\delta - h_0\|_{L_2}$  приближенного решения  $h_\delta(t)$  от точного  $h_0(t)$ .

Пусть  $\bar{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$  – пространство над полем комплексных чисел, а  $F$  – оператор, отображающий  $L_2[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$  в  $\bar{H}$  и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} h(t) e^{-\tau t} dt; \quad \tau \geq 0. \quad (9)$$

**Лемма 1.** Оператор  $F$ , определяемый формулой (9), изометричен.

Доказательство см. [1].

Из теорем 1 и 2 следует применимость преобразований Фурье к решению обратной граничной задачи (1)–(2), (6)–(8).

Таким образом, сведем эту задачу к следующей:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(x, \tau)}{\partial x^2} = i\tau \hat{u}(x, \tau); \quad x \in (0,1), \tau \geq 0, \quad (10)$$

где  $\hat{u}(x, \tau) = F[u(x, t)]$ .

Из (6)–(7) следует, что

$$\hat{u}(1, \tau) = 0; \quad \tau \geq 0 \quad (11)$$

и

$$\hat{u}(x_1, \tau) = \hat{f}(\tau); \quad \tau \geq 0, \quad (12)$$

где  $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$ .

Из теоремы 2 следует, что решение  $\hat{u}(x, \tau)$  задачи (10)–(12) непрерывно в полосе  $[0, 1] \times [0, \infty)$ . При этом решение уравнения (10) имеет вид

$$\hat{u}(x, \tau) = A(\tau)e^{\mu_0 x \sqrt{\tau}} + B(\tau)e^{-\mu_0 x \sqrt{\tau}}, \quad (13)$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , а  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  – произвольные функции.

Из (11)–(13) следует, что

$$\hat{h}(\tau) = \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (14)$$

Предположим, что  $x_1 \leq \frac{1}{2}$ , а  $\tau \in [0, 2]$ .

Так как

$$\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right|^2 = \frac{\text{ch } \sqrt{2\tau} - \cos \sqrt{2\tau}}{\text{ch}(1-x_1)\sqrt{2\tau} - \cos(1-x_1)\sqrt{2\tau}}, \quad (15)$$

то из (15) следует, что

$$\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right|^2 = \frac{\text{ch } \lambda - \cos \lambda}{\text{ch}(1-x_1)\lambda - \cos(1-x_1)\lambda}, \quad (16)$$

где  $\lambda = \sqrt{2\tau}$ .

Таким образом, из (16) следует, что

$$\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right| \leq \sqrt{\frac{2(e^2+1)}{e-2}} \quad 0 \leq \tau \leq 2. \quad (17)$$

Теперь оценим функцию  $\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right|$  при  $\tau \geq 2$ .

$$\text{Так как } \left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right| = \frac{\sqrt{\text{ch } \sqrt{2\tau} - \cos \sqrt{2\tau}}}{\sqrt{\text{ch}(1-x_1)\sqrt{2\tau} - \cos(1-x_1)\sqrt{2\tau}}} \leq \frac{\text{ch } \sqrt{\frac{\tau}{2}}}{\text{sh}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}} \leq \frac{2e\sqrt{\frac{\tau}{2}}}{e^{(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}} - e^{-(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}},$$

то, учитывая, что  $x_1 \leq \frac{1}{2}$ ,  $\tau \geq 2$ , а  $2 \leq e \leq e^{2(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}$ , получаем

$$\left| \frac{\text{sh } \mu_0 \sqrt{\tau}}{\text{sh } \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right| \leq 4e^{x_1\sqrt{\frac{\tau}{2}}} \quad \tau \geq 2. \quad (18)$$

Так как

$$\sqrt{\frac{2(e^2+1)}{e-2}} > 4,$$

то из (17) и (18) получим соотношение на всей полупрямой

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\operatorname{sh} \mu_0 (1-x_1) \sqrt{\tau}} \right| \leq a e^{x_1 \sqrt{\tau}}, \quad \tau \geq 0, \quad (19)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2(e^2 + 1)}{e - 2}}. \quad (20)$$

#### Решение задачи вычисления значений неограниченного оператора (14) нелинейным методом проекционной регуляризации

Из предыдущего пункта следует, что обратную граничную задачу (1)–(2), (6)–(7) можно свести к задаче вычисления значений неограниченного оператора  $T$ , действующего из пространства  $L_2[0, \infty)$  в  $L_2[0, \infty)$  и определяемого формулой

$$T\hat{f}(\tau) = \frac{\operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\operatorname{sh}(1-x_1) \mu_0 \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (21)$$

где  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $\hat{f}, T\hat{f} \in \bar{H}$ .

Тогда задачу (14) можно переписать следующим образом:

$$\hat{h}(\tau) = T\hat{f}(\tau); \quad \tau \geq 0. \quad (22)$$

Обозначим через  $\hat{Z}$  множество функций из  $L_2[0, \infty)$ , определяемое соотношением

$$\hat{Z} = F[Z], \quad (23)$$

где оператор  $F$  определен формулой (9), и поставим задачу (22) вычисления значений неограниченного оператора  $T$  следующим образом.

Предположим, что при  $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$  существует элемент  $\hat{h}_0(\tau) \in \hat{Z}$ , но точное значение  $\hat{f}_0(\tau)$  нам не известно, а вместо него даны  $\hat{f}_\delta(\tau) \in \bar{H}$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\| \leq \delta. \quad (24)$$

Требуется, используя исходную информацию  $\hat{f}_\delta(\tau)$  и  $\delta$ , определить приближенное значение  $\hat{h}_\delta(\tau)$  и, учитывая принадлежность  $\hat{h}_0(\tau)$  множеству  $\hat{Z}$ , оценить величину отклонения  $\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|$ .

Для решения поставленной задачи введем регуляризующее семейство операторов  $\{T_\alpha : \alpha \geq 0\}$ , определяемое следующим образом:

$$T_\alpha \hat{f}(\tau) = \begin{cases} T\hat{f}(\tau); & \tau \leq \alpha, \\ 0; & \tau > \alpha \end{cases}, \quad \alpha > 0, \quad (25)$$

где оператор  $T$  определен формулой (21).

Таким образом, приближенное значение  $\hat{h}_\delta^\alpha(\tau)$  неограниченного оператора  $T$  определим формулой

$$\hat{h}_\delta^\alpha = T_\alpha \hat{f}_\delta(\tau), \quad (26)$$

в которой оператор  $T_\alpha$  определен (25). Параметр  $\alpha = \alpha(\hat{f}_\delta, \delta)$  в формуле (26) определим из уравнения

$$\|T^{-1} \hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{f}_\delta(\tau)\|^2 = 9\delta^2. \quad (27)$$

Аналогично, как это сделано в лемме 1 из [4], можно показать, что невязка  $\|T^{-1} \hat{h}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{f}_\delta(\tau)\|^2 \in C[0, \infty)$  не убывает по  $\alpha$ , а также стремится к  $\|\hat{f}_\delta\|^2$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  и к нулю

при  $\alpha \rightarrow 0$ . Из того, что  $\|\hat{f}_\delta\|^2 > 9\delta^2$  следует разрешимость уравнения (27). Заметим, что в случае неединственности, решения уравнения (27) совпадают с отрезком  $[\alpha_1, \alpha_2]$  и для любого  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$   $\hat{h}_\delta^\alpha = \hat{h}_\delta^{\alpha_1}$ . Потому среди всех решений выберем минимальное. Из непрерывности спектра оператора  $T$  следует существование минимального из решений уравнения (27).

Таким образом, приближенные значения  $\hat{h}_\delta(\tau)$  задачи (22), (24) определим формулой

$$\hat{h}_\delta(\tau) = pr \left[ \hat{h}_\delta^{\alpha(\hat{h}_\delta, \delta)}(\tau); H_0 \right], \tag{28}$$

где  $H_0 = F[L_2[0, \infty)]$ .

**Оценка погрешности  $\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|$  приближенного решения  $\hat{h}_\delta$  задачи (22), (24)**

Перейдем к оценке уклонения  $\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|$  приближенного значения  $\hat{h}_\delta(\tau)$  от точного  $\hat{h}_0(\tau)$ . Так как  $\hat{h}_0(\tau) \in \hat{Z}$ , то на основании (23) существует число  $c > 0$  такое, что для любого  $\tau \geq 0$  справедливо соотношение

$$|\hat{h}_0(\tau)| \leq \frac{c}{\sqrt{1 + \tau^4}}. \tag{29}$$

Из (29) следует существование числа  $d > 0$  такого, что для любого  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\int_0^\infty \left[1 + \tau^{3(1-\varepsilon)}\right] |\hat{h}_0(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{d}{\varepsilon}. \tag{30}$$

Так как

$$\hat{h}_0(\tau) \in H_0, \tag{31}$$

то на основании теоремы, доказанной в [2], и соотношений (28), (31) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} G_\varepsilon[\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)], \tag{32}$$

где функция  $G_\varepsilon(\sigma)$ , следуя (14), (19), (20) и (30) определена параметрически:

$$\sigma = ae^{\sqrt[3]{\frac{\tau}{2}}}, \quad G_\varepsilon(\tau) = \left[1 + \tau^{3(1-\varepsilon)}\right]^{-\frac{1}{2}}; \quad \tau \geq 0, \tag{33}$$

а  $\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)$  определена уравнением

$$\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \frac{G_\varepsilon(\alpha)}{\alpha} = \delta. \tag{34}$$

Так как оценка (32) выполняется при любом  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , то выберем значение  $\bar{\varepsilon}(\delta)$ , минимизирующее эту оценку, то есть

$$6\sqrt{\frac{d}{\bar{\varepsilon}(\delta)}} G_{\bar{\varepsilon}(\delta)}[\bar{\alpha}(\delta, \bar{\varepsilon}(\delta))] = \min_{\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]} 6\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} G_\varepsilon[\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)]. \tag{35}$$

Из (32)–(35) для  $\hat{h}_\delta(\tau)$  будет справедлива оценка

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq 6\sqrt{\frac{d}{\bar{\varepsilon}(\delta)}} G_{\bar{\varepsilon}(\delta)}[\bar{\alpha}(\delta, \bar{\varepsilon}(\delta))]. \tag{36}$$

Упростив оценку (36), выразим ее в элементарных функциях. Для этого заметим, что при  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) = \left[ 1 + \left(\frac{2}{x_1^2}\right)^{3(1-\varepsilon)} \ln^{6(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (37)$$

Из (37) следует, что при  $\sigma > a$  и  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) \leq \left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что при  $\sigma > a$  и  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{G_\varepsilon(\sigma)}{\left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right)} = 1, \quad (39)$$

а из (37) и (39) следует существование  $\sigma_1 > a$  такого, что для любого  $\sigma \geq \sigma_1$  и  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$G_\varepsilon(\sigma) \geq \left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right). \quad (40)$$

Из того, что  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{-1}}{\left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right)} = 0$  следует существование числа  $\sigma_2 > \sigma_1$  такого, что

при  $\sigma > \sigma_2$

$$\sigma < \left[\frac{x_1^2}{2}\right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)}\left(\frac{\sigma}{a}\right),$$

а из последнего соотношения и (40), что для любого  $\sigma > \sigma_2$

$$\frac{1}{\sigma^2} < \frac{1}{\sigma} G_\varepsilon(\sigma). \quad (41)$$

Пусть  $\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)$  определено уравнением (34), а  $\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)$

$$\sqrt{\frac{d}{\varepsilon}} \alpha^{-2} = \delta. \quad (42)$$

Из (42) следует, что

$$\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon) = 4 \sqrt{\frac{d}{\varepsilon \delta^2}}. \quad (43)$$

Из (34), (41) и (42) следует, что

$$\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon) \leq \bar{\alpha}(\delta, \varepsilon). \quad (44)$$

Таким образом, из (32), (38) и (44) следует существование числа  $\delta_0 > 0$  такого, что для любого  $\delta \in (0, \delta_0)$  и  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 \frac{d}{\varepsilon} \left[ \frac{x_1}{2} \right]^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)} \left( \frac{\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)}{a} \right). \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует, что при  $\delta \in (0, \delta_0)$  и  $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 \frac{d}{\varepsilon} x_1^{3(1-\varepsilon)} \ln^{-3(1-\varepsilon)} \left( \frac{1}{a} \sqrt[4]{\frac{d}{\varepsilon \delta^2}} \right). \quad (46)$$

Пусть

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\ln \ln \frac{1}{\delta}},$$

тогда из (46) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 d \ln \ln \frac{1}{\delta} \ln^{-3} \left( \sqrt[4]{\frac{d}{a^4 \varepsilon(\delta) \delta^2}} \right) \left[ \ln^{\varepsilon(\delta)} \left( \sqrt[4]{\frac{d \delta^2}{a^4 \varepsilon(\delta) \delta^4}} \right) \right]^3. \quad (47)$$

Предположим, что число  $\delta_1 > \delta_0$  определено соотношением

$$\frac{\delta_1^2 d}{a^4} \ln \ln \frac{1}{\delta_1} < 1.$$

Тогда при  $\delta \in (0, \delta_1)$  из (47)

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 d \ln \ln \frac{1}{\delta} \ln^{-3} \left( \sqrt[4]{\frac{d \ln \ln \frac{1}{\delta}}{a^4 \delta^2}} \right) \left[ \ln^{\varepsilon(\delta)} \frac{1}{\delta} \right]^3. \quad (48)$$

Так как при  $\delta \in (0, \delta_1)$

$$\ln \ln^{\varepsilon(\delta)} \left( \frac{1}{\delta} \right) = \frac{1}{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln \ln \frac{1}{\delta} = 1, \quad (49)$$

то из (49) следует, что

$$\left[ \ln^{\varepsilon(\delta)} \left( \frac{1}{\delta} \right) \right]^3 = e^3, \quad (50)$$

а из (48) и (50), что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 d e^3 \ln \ln \frac{1}{\delta} \ln^{-3} \left( \sqrt[4]{\frac{d \ln \ln \frac{1}{\delta}}{a^4 \delta^2}} \right). \quad (51)$$

Предположим, что  $\delta_2 < \delta_1$  и  $\ln \ln \frac{1}{\delta_2} > \frac{a^4}{d}$ , тогда при  $\delta \in (0, \delta_2)$

$$\frac{d}{a^4} \ln \ln \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\delta^2}. \quad (52)$$

Таким образом, из (51) и (52) следует, что при  $\delta \in (0, \delta_2)$

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\|^2 \leq 36 d e^3 \ln \ln \frac{1}{\delta} \ln^{-3} \left( \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right). \quad (53)$$

Из (53) следует, что при  $\delta \in (0, \delta_2)$  справедливо соотношение

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq 17 \sqrt{d} e^3 \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\delta} \right).$$

## Литература

1. Танана, В.П. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной граничной задачи тепловой диагностики / В.П. Танана, А.И. Сидикова // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 238–252.
2. Танана, В.П. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций / В.П. Танана, А.Б. Бредихина, Т.С. Камалтдинова // Труды ИММ УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 1. – С. 281–288.
3. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
4. Танана, В.П. Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач / В.П. Танана, Н.М. Япарова // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 353–368.

**APPROXIMATE SOLUTION OF INVERSE BOUNDARY PROBLEM FOR THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION BY NONLINEAR METHOD OF PROJECTION REGULARITY****T.S. Kamaltdinova<sup>1</sup>**

Inverse boundary problem is solved in the hypothesis that the required solution is a piecewise smooth function, estimates of above approximate solution are given. The estimates are considerably superior to the known estimates by the accuracy.

*Keywords: operator equation, regularity, optimal method, error estimation, ill-posed problem.*

**References**

1. Tanana V.P., Sidikova A.I. O garantirovannoj ocenke tochnosti priblizhennogo resheniya odnoj obratnoj granichnoj zadachi teplovoj diagnostiki [On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics]. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN*. 2010. Vol. 16, no. 2. pp. 238–252. (in Russ.).
2. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki URO RAN*. 2012. Vol. 18, no. 1. pp. 281–288. (in Russ.).
3. Mikhlín S.G. Kurs matematicheskoy fiziki [Course of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1968. 576 p. (in Russ.).
4. Tanana V.P., Yaparova N.M. Ob optimal'nom po poryadku metode resheniya uslovno-korrektnykh zadach [The optimum in order method of solving conditionally-correct problems]. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* 2006. Vol. 9, no. 4. pp.353–368. (in Russ.).

*Поступила в редакцию 29 ноября 2012 г.*

<sup>1</sup> Kamaltdinova Tatyana Sergeevna is a Senior Lecturer, Numerical Mathematics Department, South Ural State University.  
E-mail: KamaltdinovaTS@mail.ru