УДК 517.586

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Карачик[1]

Исследуется среднее значение на единичной сфере произведения гармонической в шаре функции на однородный полином.

Ключевые слова: гармонические функции, теорема о среднем, гармонические полиномы.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований автора, изложенных в [1–3]. В [2], была построена полная система однородных гармонических полиномов от n переменных $\{G_{(\nu)}(x)\}$, которая ортогональна в $L_2(\partial S)$, где ∂S – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Оказывается, что эта система ортогональна и в $\mathcal{P}$ (теорема 3). В качестве приложения этих результатов в теореме 5 получена формула для значения выражения вида $G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}$, где $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция. В теореме 6 получена формула вычисления интеграла вида $\int_{|x|=1} Q_m(x)ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином.

2. Полная система гармонических полиномов

Рассмотрим полиномы вида

$$G_k^s(x_{(n)}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{|x_{(n-1)}|^{2i}\, x_n^{k-2i,!}}{(2,2)_i(n-1+2s,2)_i},$$

где обозначено $x^{k,!} = x^k/k!$, $x_{(n-1)} = (x_1,\dots,x_{(n-1)})$ и $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0 = 1$. Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ и

$$H_k^s(x_{(2)}) = \sum_{i=0}^{[(k-s)/2]} (-1)^i x_1^{2i+s,!} x_2^{k-2i-s,!}, \quad s=0,1.$$

Теорема 1. [2] При $n\ge 2$ и $\nu_1\ge\cdots\ge\nu_n$, $\nu_n=0,1$ полиномы

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = \prod_{i=1}^{n-2} G_{\nu_i-\nu_{i+1}}^{\nu_{i+1}}(x_{(n-i+1)}) H_{\nu_{n-1}}^{\nu_n}(x_{(2)}),$$

где $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$, $\nu\in\mathbb{N}_0^n$ образуют базис в однородных степени ν_1 гармонических полиномах.

Теорема 2. [2] Полиномы $\{G_{(\nu)}\}$ при различных векторах $\nu\in\mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1\ge\nu_2\ge\cdots\ge\nu_n$, $\nu_n=0,1$, ортогональны на единичной сфере.

Рассмотрим полиномы $G_{(\nu)}(x)$ в пространстве полиномов $\mathcal{P}=\{P(x)=\sum_\alpha p_\alpha x^\alpha\}$ со скалярным произведением $\langle P(x),Q(x)\rangle = P(D)Q(x)_{|x=0}$ [1]. Норму полинома $P(x)\in\mathcal{P}$ будем обозначать $|P|_D$. Например, $|x_1^2+\cdots+x_n^2|_D = \Delta|x|^2_{|x=0} = 2n$. Система полиномов $G_{(\nu)}(x)$ обладает еще одним интересным свойством.

Теорема 3. Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ для различных векторов $\nu\in\mathbb{N}_0^n$, удовлетворяющих условию $\nu_1\ge\cdots\ge\nu_n$ $(\nu_n=0,1)$ ортогональны в $\mathcal{P}$.

---

[1] Карачик Валерий Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет

E-mail karachik@susu.ru

Доказательство. Нам необходимо проверить справедливость следующего утверждения: $\nu \neq \mu \Rightarrow \langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)} \rangle = 0$. Применим индукцию по размерности n. Рассмотрим случай $\nu_1 = \mu_1$ поскольку если $\nu_1 \neq \mu_1$, то гармонические полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны, как имеющие различную степень. Это следует из формулы Гаусса–Остроградского [4]

$$0 = \int_{|x|=1} \left(H_p(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_m(x) - H_m(x) \frac{\partial}{\partial \nu} H_p(x) \right) ds_x = (m-p) \int_{|x|=1} H_p(x) H_m(x) ds_x,$$

где $H_p(x)$ и $H_m(x)$ однородные гармонические полиномы степеней $p \neq m$ соответственно.

Пусть $n = 2$. Полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны поскольку они имеют различную четность по x_1: если $\nu_2 = 0$ тогда $G_{(\nu)}(x)$ – четный, а если $\nu_2 = 1$, то нечетный.

Пусть $m > 2$. Рассмотрим случай $\nu_2 < \mu_2$. Определим G-полиномы для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ как $G_k^s \equiv 0$ и обозначим $\tilde{\Delta} = \Delta - \partial^2 / \partial x_n^2$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x_n} G_{(\mu)}(x) = G_{(\mu_-)}(x), \quad \tilde{\Delta} G_{(\mu)}(x) = -G_{(\mu_=)}(x),$$

где $\mu_- = (\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ и $\mu_= = (\mu_-)_-$. Поэтому, будем иметь

$$G_{(\nu)}(D) G_{(\mu)}(x) = G_{(\bar{\nu})}(\tilde{D}) \left(G_{\nu_1 - \nu_2}^{\nu_2}(D) G_{\mu_1 - \mu_2}^{\mu_2}(x) G_{(\bar{\mu})}(\tilde{x}) \right). \tag{1}$$

Поскольку при $k \geq m$ и однородном гармоническом полиноме $H_s(x)$

$$\Delta^m \frac{|x|^{2k} H_s(x)}{(2,2)_k (n+2s,2)_k} = \frac{|x|^{2k-2m} H_s(x)}{(2,2)_{k-m} (n+2s,2)_{k-m}},$$

то будем иметь

$$G_{k_1}^{\nu_2}(D) G_{k_2}^{\mu_2}(x) H_{\mu_2}(\tilde{x}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{(-1)^i \tilde{\Delta}^i D_n^{k_1 - 2i}}{(2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1 - 2i)!} \sum_{j=0}^{[k_2/2]} \frac{(-1)^j |\tilde{x}|^{2j} x_n^{k_2 - 2j,!}}{(2,2)_j (n-1+2\mu_2,2)_j} H_{\mu_2}(\tilde{x}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{[k_1/2]} \frac{1}{(2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1 - 2i)!} \sum_{j=i}^{[(k_2-k_1)/2]+i} \frac{(-1)^{j-i} |\tilde{x}|^{2j-2i} x_n^{k_2 - k_1 + 2i - 2j,!}}{(2,2)_{j-i} (n-1+2\mu_2,2)_{j-i}} H_{\mu_2}(\tilde{x}) =$$

$$= C(k_1, \nu_2) \sum_{j=0}^{[(k_2-k_1)/2]} \frac{(-1)^j |\tilde{x}|^{2j} x_n^{k_2 - k_1 - 2j,!}}{(2,2)_j (n-1+2\mu_2,2)_j} H_{\mu_2}(\tilde{x}) = C(k_1, \nu_2) G_{k_2 - k_1}^{\mu_2}(x) H_{\mu_2}(\tilde{x}),$$

где $C(k_1, \nu_2) = \sum_{i=0}^{[k_1/2]} 1/((2,2)_i (n-1+2\nu_2,2)_i (k_1 - 2i)!)$. Значит из (1) при $k_1 = \nu_1 - \nu_2$ и $k_1 = \mu_1 - \mu_2$ выводим

$$G_{(\nu)}(D) G_{(\mu)}(x) = C(\nu_1 - \nu_2, \nu_2) G_{(\bar{\nu})}(\tilde{D}) \left[G_{(\mu_1 - \mu_2) - (\nu_1 - \nu_2)}^{\mu_2}(x) G_{(\bar{\mu})}(\tilde{x}) \right]. \tag{2}$$

Так как $\mu_1 - \mu_2 - \nu_1 + \nu_2 = \nu_2 - \mu_2 < 0$, то мы можем заключить, что $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны. В силу симметричности скалярного произведения это утверждение верно и при $\nu_2 > \mu_2$. Рассмотрим последний случай $\nu_2 = \mu_2$. Используя равенство (2) и учитывая, что $G_0^s = 1$ получим $\langle G_{(\nu)}, G_{(\mu)} \rangle = C(\nu_1 - \nu_2, \nu_2) \langle G_{(\bar{\nu})}, G_{(\bar{\mu})} \rangle$. Так как $\nu_1 = \mu_1$ и $\nu \neq \mu$ имеем $\bar{\nu} \neq \bar{\mu}$. Следовательно, по индукции, полиномы $G_{(\nu)}(x)$ и $G_{(\mu)}(x)$ ортогональны в $\mathcal{P}$. Теорема доказана.

Известно [5], что максимальное число линейно независимых однородных степени k гармонических полиномов равно $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$. Перенумеруем полиномы $G_{(\nu)}(x)$ с $\nu_1 = k$ так, что получится полная система ортогональных сферических гармоник степени k. Обозначим эту систему $\left\{ H_k^{(i)}(x) : i = 1, \ldots, h_k \right\}$ и нормируем так, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(x))^2 ds_x = \omega_n$.

Теорема 4. Если $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\overline{S}$ функция тогда справедливо представление

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}h_k^{(i)}H_k^{(i)}(x), \tag{3}$$

где $h_k^{(i)}=1/\omega_n\int_{\partial S}H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)d\xi$.

Доказательство. Пусть $E(x,\xi)=(n-2)^{-1}|\xi-x|^{2-n}$ ($n>2$), $\Lambda=x_1\partial/\partial x_1+\dots+x_n\partial/\partial x_n$ и при $x\neq\xi\in\partial S$ верно равенство

$$\Lambda_x E(x,\xi)-\Lambda_\xi E(x,\xi)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-\xi_i)-\xi_i(\xi_i-x_i)}{|x-\xi|^n}=\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}.$$

Воспользуемся леммой 11 из [7]. При $|x|<|\xi|$ имеем

$$E(x,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2k+n-2)}}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).$$

Поэтому при $|x|<|\xi|=1$ ядро Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}=\Lambda_x E(x,\xi)-\Lambda_\xi E(x,\xi)=\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-k+(2k+n-2)}{2k+n-2}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(x)H_k^{(i)}(\xi).\end{aligned} \tag{4}$$

Дифференцирование и предельный переход под знаком суммирования законны, поскольку ряд в (4) сходится равномерно по $\xi\in\partial S$ и по x при $|x|\le\alpha<1$. Подставляя полученное значение ядра Пуассона в известную формулу решения задачи Дирихле в единичном шаре и используя равномерную сходимость ряда по $\xi\in\partial S$ приходим к (3)

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}u(\xi)ds_\xi=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)ds_\xi H_k^{(i)}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}H_k^{(i)}(\xi)u(\xi)ds_\xi H_k^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}h_k^{(i)}H_k^{(i)}(x).$$

Теорема 5. Если $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\overline{S}$ функция, тогда имеет место равенство

$$\int_{|\xi|=1}G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)ds_\xi=g_\nu G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}, \tag{5}$$

где $g_\nu=|G_{(\nu)}|_{L_2}^2/|G_{(\nu)}|_D^2$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (3) из теоремы 4. Так как для каждых i и k найдется вектор ν такой, что $\nu_1=k\ge\dots\ge\nu_n$ ($\nu_n=0,1$) и

$$H_k^{(i)}(x)=\sqrt{\omega_n}\frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|_{L_2(\partial S)}},$$

то имеем

$$u(x)=\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{G_{(\nu)}(x)}{|G_{(\nu)}|_{l_2(\partial S)}^2}\int_{|\xi|=1}G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)ds_\xi.$$

Применяя к этому равенству оператор $G_{(\mu)}(D)$ (дифференцирование можно внести под интеграл так как ряд сходится равномерно по $|x|\le\alpha<1$) и полагая затем $x=0$ получим

$$G_{(\mu)}(D)u(x)_{|x=0}=\sum_{\nu_1=\mu_1}\frac{\langle G_{(\mu)},G_{(\nu)}\rangle}{|G_{(\nu)}|_{l_2(\partial S)}^2}\int_{|\xi|=1}G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)ds_\xi=\frac{1}{g_\nu}\int_{|\xi|=1}G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)ds_\xi.$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью полиномов $G_{(\mu)}(x)$ в $\mathcal{P}$ (теорема 3). Отсюда сразу получаем равенство (5). Теорема доказана.

Для использования теоремы 5 необходима формула для вычисления интегралов вида $\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x$, где $Q_m(x)$ – однородный полином степени m.

Теорема 6. Справедлива формула

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \begin{cases} 0, & m\in 2\mathbb{N}-1 \\ \dfrac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{m!!n\cdots(n+m-2)}\omega_n, & m\in 2\mathbb{N} \end{cases}. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 из [7].

Лемма 1. Гармонические полиномы $R_{m-2k}(x)$ в разложении однородного полинома $Q_m(x)$ по формуле Альманси

$$Q_m(x) = R_m(x) + |x|^2 R_{m-2}(x) + \cdots + |x|^{2l} R_{m-2l}(x)$$

имеют вид

$$R_{m-2k}(x) = \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s |x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}}.$$

Из теоремы о среднем для гармонических функций и формулы Альманси следует, что

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \int_{|x|=1}\big(R_m(x)+R_{m-2}(x)+\cdots+R_{m-2l}(x)\big)ds_x = \begin{cases} 0, & 2l<m \\ \omega_n R_0, & 2l=m \end{cases}.$$

При нечетном m интеграл равен нулю так как $m-2l>0$ и значит $R_{m-2l}(0)=0$. При четном m, используя лемму 1 запишем ($s=0$, $k=m/2$)

$$\int_{|x|=1} Q_m(x)\,ds_x = \frac{n-2}{(2,2)_{m/2}}\frac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{(n-2,2)_{m/2+1}}\omega_n = \frac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{m!!n\cdots(n+m-2)}\omega_n.$$

Теорема доказана.

В [6] формула Альманси обобщена на аналитические функции.

Следствие. Если $u(x)$ гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция, то имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\bar{G}_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi = \frac{\Delta^{\nu_1}\bar{G}^2_{(\nu)}(x)}{(2\nu_1)!!(n,2)_{\nu_1}}\bar{G}_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}, \tag{7}$$

где $\bar{G}_{(\nu)}(x) = G_{(\nu)}(x)/|G_{(\nu)}|_D$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что в обозначениях теоремы 5 и с помощью теоремы 6 ($m=2\nu_1$) можно записать

$$g_\nu = |G_{(\nu)}|^2_{L_2} / |G_{(\nu)}|^2_D = |\bar{G}_{(\nu)}|^2_{L_2} = \frac{\Delta^{\nu_1}\bar{G}^2_{(\nu)}(x)}{(2\nu_1)!!(n,2)_{\nu_1}}\omega_n. \tag{8}$$

Подставляя найденное значение константы g_ν в (5) и деля обе части полученного равенства на $|G_{(\nu)}|_D$ и ω_n получим (7). Следствие доказано.

Пример. Пусть $u(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\bar{S}$ функция, тогда имеют место равенства

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n}u_{x_i}(0),\quad \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i\xi_j u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n(n+2)}u_{x_ix_j}(0),$$

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\xi_i^2 u(\xi)\,ds_\xi = \frac{1}{n(n+2)}u_{x_ix_i}(0) + \frac{1}{n}u(0).$$

I. Первую формулу нетрудно получить из (5). Если взять $\nu = e_1+\cdots+e_{n-i+1}$, где $e_i = (\delta_{1,i},\ldots,\delta_{n,i})$, то получим

$$G_{(\nu)}(x)=G^{\nu_2}_{\nu_1-\nu_2}(x_{(n)})G^{\nu_3}_{\nu_2-\nu_3}(x_{(n-1)})\cdots G^{\nu_{n-1}}_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}(x_{(3)})H^{\nu_n}_{\nu_{n-1}}(x_{(2)})=$$
$$=G^1_0(x_{(n)})G^1_0(x_{(n-1)})\cdots G^0_1(x_{(i)})\cdots G^0_0(x_{(3)})H^0_0(x_{(2)})=x_i.$$

Так как

$$|x_i|^2_{L_2}=\int_{|x|=1}x_i^2\,ds_x=\frac{1}{n}\int_{|x|=1}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)ds_x=\frac{\omega_n}{n},$$

и $|x_i|^2_D=D_{x_i}x_i=1$, то $g_\nu=|x_i|^2_{L_2}/|x_i|^2_D=\omega_n/n$ и значит первая формула верна

$$\int_{|\xi|=1}\xi_i u(\xi)\,ds_\xi=\frac{\omega_n}{n}D_{x_i}u(x)_{|x=0}.$$

II. Далее положим $\nu=2e_1+\cdots+2e_{n-j+1}+e_{n-j+2}+\cdots+e_{n-i+1}$ если $i>j$. Тогда

$$G_{(\nu)}(x)=G^{\nu_2}_{\nu_1-\nu_2}(x_{(n)})G^{\nu_3}_{\nu_2-\nu_3}(x_{(n-1)})\cdots G^{\nu_{n-1}}_{\nu_{n-2}-\nu_{n-1}}(x_{(3)})H^{\nu_n}_{\nu_{n-1}}(x_{(2)})=$$
$$=G^2_0(x_{(n)})G^2_0(x_{(n-1)})\cdots G^1_1(x_{(i)})G^1_0(x_{(i-1)})\cdots G^1_0(x_{(j+1)})G^0_1(x_{(j)})\cdots G^0_0(x_{(3)})H^0_0(x_{(2)})=x_ix_j.$$

Для вычисления интеграла $|x_ix_j|^2_{L_2}=\int_{|x|=1}x_i^2x_j^2\,ds_x$ воспользуемся формулой (6). Имеем $Q_m(x)=x_i^2x_j^2$, $m=4$ и значит

$$\frac{\Delta^{m/2}Q_m(x)}{m!!n\cdots(n+m-2)}=\frac{1}{4!!(n,2)_2}\Delta^2\left(x_i^2x_j^2\right)=\frac{1}{8n(n+2)}\Delta\left(2x_i^2+2x_j^2\right)=\frac{1}{n(n+2)}.$$

Поэтому $\int_{|x|=1}x_i^2x_j^2\,ds_x=\frac{\omega_n}{n(n+2)}$. Так как $|x_ix_j|^2_D=D_{x_i}D_{x_j}x_ix_j=1$, то $g_\nu=|x_i|^2_{L_2}/|x_i|^2_D=\omega_n/n(n+2)$ и значит вторая формула тоже верна

$$\int_{|\xi|=1}\xi_i\xi_j u(\xi)\,ds_\xi=\frac{\omega_n}{n(n+2)}D_{x_i}D_{x_j}u(x)_{|x=0}.$$

III. Для доказательства третьей формулы выберем $\nu=2e_1$ и значит

$$G_{(\nu)}(x)=G^0_2(x_{(n)})G^0_0(x_{(n-1)})\cdots H^0_0(x_{(2)})=\frac{x_n^2}{2}-\frac{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}{2(n-1)}.$$

Отсюда следует, что

$$G_{(\nu)}(x)=\frac{x_n^2}{2}-\frac{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2}{2(n-1)}=\frac{nx_n^2}{2(n-1)}-\frac{|x|^2}{2(n-1)},$$

или $x_n^2=2\frac{n-1}{n}G_{(\nu)}(x)+\frac{1}{n}|x|^2$, а значит, используя формулу (5) и теорему о среднем запишем

$$\int_{|\xi|=1}\xi_n^2u(\xi)\,ds_\xi=2\frac{n-1}{n}\int_{|\xi|=1}G_{(\nu)}(\xi)u(\xi)\,ds_\xi+\frac{1}{n}\int_{|\xi|=1}u(\xi)\,ds_\xi=$$
$$=2\frac{n-1}{n}g_\nu G_{(\nu)}(D)u(x)_{|x=0}+\frac{\omega_n}{n}u(0)=g_\nu\left(2\frac{n-1}{n}G_{(\nu)}(D)+\frac{1}{n}\Delta\right)u(x)_{|x=0}+\frac{\omega_n}{n}u(0)=$$
$$=g_\nu D^2_{x_n}u(x)_{|x=0}+\frac{\omega_n}{n}u(0).$$

Вычислим g_ν. Нетрудно подсчитать, что $|G_{(\nu)}|^2_D=G_{(\nu)}(D)G_{(\nu)}(x)=\frac{n}{2n-2}$, а значит по формуле (8) ($\nu_1=2$) запишем

$$\frac{g_\nu}{\omega_n}=\frac{2n-2}{8n(n,2)_2}\Delta^2G^2_{(\nu)}(x)=\frac{\Delta^2\left(nx_n^2-|x|^2\right)^2}{16n^2(n-1)(n+2)}=\frac{\Delta^2\left(n^2x_n^4-2nx_n^2|x|^2+|x|^4\right)}{16n^2(n-1)(n+2)}=$$
$$=\frac{24n^2-16n(n+2)+8n(n+2)}{16n^2(n-1)(n+2)}=\frac{16n(n-1)}{16n^2(n-1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+2)}.$$

Подставляя вычисленное значение g_ν в предыдущую формулу и деля на ω_n получим третью формулу при $i=n$. В силу симметрии эта формула будет верна и для любого $i=1,\dots,n$.

Литература

1. Карачик, В.В. Полиномиальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами I / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 27–38.

2. Karachik, V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 1998. – V. 126, № 12. – P. 3513–3519.

3. Karachik, V.V. On some special polynomials / V.V. Karachik // Proceedings of American Mathematical Society. – 2004. – V. 132, № 4. – P. 1049–1058.

4. Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976. – 296 с.

5. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. – М.: Мир, 1974. – 332 с.

6. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций гармоническими / В.В. Карачик // Математические труды. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 142–162.

7. Карачик, В.В. Построение полиномиальных решений некоторых задач для уравнения Пуассона / В.В. Карачик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1674–1694.

ON ONE GENERALIZED MEAN THEOREM FOR HARMONIC FUNCTIONS

V.V. Karachik[1]

Mean value on the unit sphere of a product of a harmonic function in the unit ball and a homogeneous polynomial is investigated.

Keywords: harmonic functions, mean theorem, harmonic polynomials.

References

1. Karachik V.V. Polinomial'nye resheniya differencialnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefficientami I [Polynomial solutions to partial differential equations with constant coefficients I]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika».* 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 27–38. (in Russ.).

2. Karachik V.V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society.* 1998. Vol. 126, no. 12. pp. 3513–3519.

3. Karachik V.V. On some special polynomials. *Proceedings of American Mathematical Society,* 2004. Vol. 132, no. 4. pp. 1049–1058.

4. Bicadze A.V. *Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1976. 296 c.

5. Stejn I., Vejs G. *Vvedenie v garmonicheskij analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces]. Moscow: Mir, 1974. 332 p. (in Russ.). [Stein E.M., Weiss G.L. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971. 297 p.]

6. Karachik V.V. *Matematicheskie trudy.* 2007. Vol. 10, no. 2. pp. 142–162.

7. Karachik V.V. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki.* 2011. Vol. 51, no. 9. pp. 1674–1694. (in Russ.).

Поступила в редакцию 30 января 2013 г.

[1] Karachik Valeriy Valentinovich is Dr Sc (Physics and Mathematics), Professor, Mathematical Analysis Department, South Ural State University

E-mail karachik@susu.ru