УДК 514.17

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТРИКИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ[1]

П.Д. Лебедев[2], В.Н. Ушаков[3]

Методы выпуклого анализа привлечены для построения функции расстояния между замкнутыми, в общем случае не ограниченными, множествами в евклидовом пространстве. Показано, что данное расстояние удовлетворяет всем свойствам метрики. Доказана инвариантность расстояний относительно движений пары множеств в пространстве. Показано, что данное метрическое пространство является полным.

Ключевые слова: хаусдорфово расстояние, метрика, выпуклое множество, рецессивный конус.

Введение

При решении различных задач теории распознавания образов [1], математической теории управления и теории управления и дифференциальных игр [2] требуется оценивать степень рассогласования между множествами в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ [3]. Один из самых широко распространенных методов, позволяющих ответить на эти вопросы, основан на использовании метрики Хаусдорфа [4].

Обозначим через $\mathrm{comp}(\mathbf{R}^n)$ совокупность всех ограниченных замкнутых множеств в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. *Расстоянием от точки* $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ *до замкнутого множества A называется величина*

$$\rho(\mathbf{x}, A) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|: \mathbf{y}\in A\}.$$

Определение 2. [5, 6] *Хаусдорфовым отклонением множества* $A\in\mathrm{comp}(\mathbf{R}^n)$ *от* $B\in\mathrm{comp}(\mathbf{R}^n)$ *называется величина*

$$h(A, B) = \max\{\rho(\mathbf{x}, B): \mathbf{x}\in A\}. \tag{1}$$

Определение 3. [5, 6] *Хаусдорфовым расстоянием между множествами* $A\in\mathrm{comp}(\mathbf{R}^n)$ *и* $B\in\mathrm{comp}(\mathbf{R}^n)$ *называется максимум из хаусдорфовых отклонений*

$$d(A, B) = \max\{h(A, B), h(B, A)\}. \tag{2}$$

Хаусдорфово расстояние обладает всеми свойствами метрики [5] и любой паре компактных множеств ставит в соответствие неотрицательное число, характеризующее степень их рассогласования.

Метрику Хаусдорфа можно распространить на произвольные замкнутые множества (обозначим их совокупность $\mathrm{clos}(\mathbf{R}^n)$). Однако если хотя бы одно из множеств A, B не ограничено, то в общем случае значение максимум в выражении (1) не достигается. Поэтому для них можно определить обобщение понятия хаусдорфова отклонения как

$$h^*(A, B) = \sup\{\rho(\mathbf{x}, B): \mathbf{x}\in A\}. \tag{3}$$

Соответственно обобщение понятия хаусдорфова расстояния между неограниченными множествами может быть записано как

$$d^*(A, B) = \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\}. \tag{4}$$

Значение выражений (3) и (4) при некоторых A и B равно $+\infty$. При оценке конструкций теории распознавания образов и теории управления наиболее часто требуется оценивать рассогласо-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00427-а «Алгоритмы и динамические процедуры решения в дифференциальных играх и задачах управления», 11-01-12088-офи-м-2011 «Методы позиционных дифференциальных игр в задачах техники, экономики и экологии» и проекта 12-01-31247 мол_а «Управление и сингулярности в дифференциальных играх»), и при поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН 12-П-1-1002 «Управление в условиях конфликта и неопределенности Позиционные стратегии и гамильтоновы конструкции в задачах управления» и 12-С-1-1017/3 «Качественная теория и численные методы для задач динамики, управления и оптимизации» при финансовой поддержке УрО РАН

[2] Лебедев Павел Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, отдел динамических систем Институт математики и механики УрО РАН

E-mail pleb@yandex.ru

[3] Ушаков Владимир Николаевич – доктор физико-математических наук, отдел динамических систем Институт математики и механики УрО РАН

E-mail ushak@imm uran ru

вания между выпуклыми множествами. При этом естественно попытаться ввести такую метрику, которая бы определяла расстояния между произвольными выпуклыми [7] замкнутыми множествами в виде конечных чисел и отражала бы при этом особенности их геометрии. Одним из ее вариантов является так называемая метрика Хаусдорфа–Бебутова [8–10]. Она обладает рядом важных достоинств. В частности, ее значения лежат на отрезке

$$\left[0,\frac{\|\mathbf{a}_0\|+\|\mathbf{b}_0\|+\sqrt{\|\mathbf{a}_0\|^2+4}+\sqrt{\|\mathbf{b}_0\|^2+4}}{2}\right],$$

где $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ – ближайшие к началу координат точки во множествах A и B соответственно, $\|\mathbf{a}\|$ – норма вектора $\mathbf{a}$. В метрике Хаусдорфа–Бебутова пространство $\mathrm{clos}(\mathbf{R}^n)$ является полным [9, с. 187]. Однако она имеет и некоторые недостатки. Сходимость в ней не совпадает со сходимостью в метрике Хаусдорфа. Кроме того, значения расстояния между множествами не сохраняются при параллельном переносе и при их вращении. В настоящей работе предлагается еще один вариант определения расстояния между произвольными выпуклыми множествами, который лишен указанных недостатков метрики Хаусдорфа–Бебутова. Он базируется на конструкциях выпуклого анализа и преобразовании метрики Хаусдорфа.

Преобразование метрики

При решении различных задач теории распознавания образов, теории управления и дифференциальных уравнений для устранения проблем, связанных с неограниченным возрастанием функции неотрицательного аргумента, применяется так называемое преобразование Кружкова [12]

$$\tilde{x}=1-\exp(-x). \tag{5}$$

Оно осуществляет непрерывное взаимно однозначное отображение бесконечного полуинтервала $[0,+\infty)$ на полуинтервал $[0,1)$. Причем при стремлении $x\to+\infty$ для $\tilde{x}$ в (5) имеет место $\tilde{x}\to 1$.

Определение 4. *K-хаусдорфовым отклонением замкнутого множества A от B назовем число*

$$\tilde{h}(A,B)=\begin{cases}1-\exp\left(-h^*(A,B)\right), & \text{если } h^*(A,B)\in(0,+\infty)\\ 1, \text{ если } h^*(A,B)=+\infty.\end{cases} \tag{6}$$

Определение 5. *K-хаусдорфовым расстоянием между множествами A и B назовем число*

$$\tilde{d}(A,B)=\max\{\tilde{h}(A,B),\tilde{h}(B,A)\}. \tag{7}$$

Из определения 3 видно, что выражение (7) можно записать в виде

$$\tilde{d}(A,B)=\begin{cases}1-\exp\left(-d^*(A,B)\right), & \text{если } h^*(A,B)\in(0,+\infty)\\ 1, \text{ если } d^*(A,B)=+\infty.\end{cases} \tag{8}$$

Лемма 1. Выражение (8) задает метрику на множестве $\mathrm{clos}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Покажем, что для функции, заданной в (8), выполняются все три аксиомы метрики [13]. Из свойств хаусдорфова расстояния и преобразования Кружкова вытекает выполнение аксиомы тождества и аксиомы симметрии. Покажем, что выполняется неравенство треугольника. Покажем, что для произвольных $A, B, C\in\mathrm{clos}(\mathbf{R}^n)$

$$\tilde{d}(A,B)\le\tilde{d}(A,C)+\tilde{d}(B,C). \tag{9}$$

Действительно, обозначим

$$\alpha=d^*(\mathrm{A},\mathrm{B}),\ \beta=d^*(A,C),\ \gamma=d^*(B,C).$$

Неравенство (9) принимает вид

$$1-\exp(-\alpha)\le 1-\exp(-\beta)+1-\exp(-\gamma). \tag{10}$$

Покажем, что (10) выполняется при $\alpha=\beta+\gamma$. Для хаусдорфовой метрики выполняется неравенство треугольника

$$\alpha\le\beta+\gamma.$$

Из свойств экспоненциальной функции вытекает

$$1-\exp(-\beta-\gamma)-1+\exp(-\beta)-1+\exp(-\gamma)=$$
$$=\exp(-\beta)(1-\exp(-\gamma))+(\exp(-\gamma)-1)=$$
$$=-(1-\exp(-\gamma))(1-\exp(-\beta))\le 0 .$$

Заметим, что в левой части (10) стоит монотонно возрастающая функция. Поэтому если неравенство выполняется в случае $\alpha=\beta+\gamma$, то оно верно и при всех $\alpha\in[0, \beta+\gamma]$. Значит, неравенство (10) верно. Третья аксиома метрики выполняется для метрики $\tilde{d}$.

Значения функции (8) лежат на отрезке [0, 1]. При чем $\tilde{d}(A, B)=1$ тогда и только тогда, когда $d^*(A, B)=+\infty$. Однако на практике вычислять хаусдорфово расстояние для неограниченных множеств очень затруднительно. Покажем, что расстояние между множествами в метрике $\tilde{d}$ можно найти, вычислив предел для некоторой последовательности конечных чисел. Обозначим через $\mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$ множество выпуклых замкнутых множеств в $\mathbf{R}^n$.

Лемма 2. *Пусть* $A, B\in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$. Тогда

$$\tilde{d}(A,B)=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(1-\exp\left(-d^*\left(A(\varepsilon),B(\varepsilon)\right)\right)\right), \tag{11}$$

где $M(\varepsilon)=M\cap U(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *– шар в пространстве* $\mathbf{R}^n$ *с центром в точке* $\mathbf{x}$ *радиуса* ε, $\mathbf{0}$ *– нулевой вектор в* $\mathbf{R}^n$.

В (11) подразумевается, что значения ε настолько большие, чтобы множества $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ были непусты.

Доказательство. Без ограничения общности полагаем, что $h^*(A, B)\ge h^*(B, A)$ и, следовательно, $d^*(A, B)=h^*(A, B)$. Покажем, что выполняется предельное соотношение

$$h^*(A,B)=\lim_{\varepsilon\to+\infty}h\left(A(\varepsilon),B(\varepsilon)\right), \tag{12}$$

из которого и следует равенство в (11).

Предположим, что равенство (12) не выполняется. То есть предел в данном выражении не существует или отличен от $h^*(A, B)$.

Если B – ограниченное множества, то равенство (12) выполняется, поскольку найдется такое ε_0, что при $\varepsilon>\varepsilon_0$ выполняется $B(\varepsilon)=B$. Соответственно, если $h^*(A, B)$ – конечное число, то найдется и такое ε_1, что при $\varepsilon>\varepsilon_1$ выполняется равенство $h(A(\varepsilon), B(\varepsilon))=h^*(A, B)$. Если же $h^*(A, B)=+\infty$, то справедлива оценка для хаусдорфовых отклонений $h(A(\varepsilon), B(\varepsilon))\ge\varepsilon-\varepsilon_0$ при $\varepsilon>\varepsilon_0$.

Случай, когда A компактно, а B не компактно, невозможен, поскольку мы изначально предполагаем, что $h^*(A, B)\ge h^*(B, A)$.

Следовательно, при сделанном предположении о невыполнении равенства (12) множества A и B должны быть неограниченными.

При этом найдется такая последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}, \varepsilon_i\to+\infty$ и такое число $\gamma>0$, что либо

1) $\forall i\in\mathbf{N}$: $h(A(\varepsilon_i), B(\varepsilon_i))<h^*(A, B)-\gamma$,

либо

2) $\forall i\in\mathbf{N}$: $h(A(\varepsilon_i), B(\varepsilon_i))>h^*(A, B)+\gamma$.

Допустим, реализовалась возможность 1). По определению хаусдорфова отклонения найдется такая последовательность $\{\mathrm{a}_i\}_{i=1}^{\infty}\subset A$, что

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\rho\left(\mathbf{a}_i,B\right)=h^*(A,B). \tag{13}$$

Поскольку по условию B – замкнутое выпуклое множество, то для каждой $\mathbf{a}_i$ найдется такая точка $\mathbf{b}_i\in B$, что $\|\mathbf{a}_i-\mathbf{b}_i\|=\rho(\mathbf{a}_i, B)$. А поскольку все шары достаточно большого радиуса содержат и $\mathbf{a}_i$, и $\mathbf{b}_i$, то имеет место

$$\forall\varepsilon>\max\{\|\mathbf{a}_i\|, \|\mathbf{b}_i\|\}\ h(A\cap U(\mathbf{0}, \varepsilon), B\cap U(\mathbf{0}, \varepsilon))\ge\|\mathbf{a}_i-\mathbf{b}_i\|\ge\rho(\mathbf{a}_i, B).$$

Из данной оценки и (13) следует, что случай 1 невозможен.

Допустим, реализовалась возможность 2). В этом случае $h^*(A, B)=r^*$ может быть только конечным числом, поскольку предел последовательности не может быть больше, чем $+\infty$.

Рассмотрим последовательности $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}=\{A(\varepsilon_i)\}_{i=1}^{\infty}$ A и $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}=\{B(\varepsilon_i)\}_{i=1}^{\infty}$. При этом для $\forall i\in\mathbf{N}$

$$h(A_i, B_i)>r^*+\gamma.$$

Поскольку A_i – компакт, то в нем найдется точка a_i, такая что

$$\rho(\mathbf{a}_i, B_i) > r^* + \gamma. \tag{14}$$

При этом найдется точка $\mathbf{b}_i \in B \backslash B_i$, для которой

$$\|\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i\| \le r^*.$$

Точки $\mathbf{a}_i$ находятся на расстоянии не большем чем r^* от границы $\partial U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$ шара $U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$ поскольку $\mathbf{a}_i \in U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$, $\mathbf{b}_i \notin U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$ (рис. 1), то есть

$$\|\mathbf{a}_i\| \in [\varepsilon_i - r^*, \varepsilon_i].$$

Следовательно, при стремлении $\varepsilon_i \to +\infty$ имеет место $\|\mathbf{a}_i\| \to +\infty$.

Рассмотрим точку $\mathbf{b}_0$, ближайшую в евклидовой метрике на множестве B к началу координат. Точка $\mathbf{b}_i$ зафиксирована, а точки $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i$ находятся на расстоянии, не превышающем r^* друг от друга, и бесконечно удаляются от начала координат. Следовательно, угол $\angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0)$ между векторами $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0$ стремится к нулю:

$$\lim_{i\to\infty} \angle(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0) = 0. \tag{15}$$

При достаточно ε_i больших отрезок $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_0]$ будет пересекаться с границей $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ шара $U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ в некоторой точке $\mathbf{b}_i^*$ (поскольку $\mathbf{b}_0 \in U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$, $\mathbf{b}_i \notin U(\mathbf{0}, \varepsilon_i)$). Рассмотрим пересечение сферы $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ и гиперплоскости

$$\Gamma_i = \{\mathbf{g} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{g} - \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle = 0\},$$

проходящей через точку $\mathbf{a}_i$ ортогонально ее радиус-вектору (рис. 2), с шарами $U(\mathbf{a}_i, r^* + \gamma)$ фиксированного радиуса r^*. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов. У $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ и Γ_i общая нормаль в точке $\mathbf{a}_i$ и радиус сферы $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ стремится к $+\infty$. Поэтому выполняется предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} d\left(\Gamma_i \cap U(\mathbf{a}_i, r_* + \gamma), \partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|) \cap U(\mathbf{a}_i, r_* + \gamma)\right) = 0. \tag{16}$$

Из предельных соотношений (15) и (16) следует, что точка $\mathbf{b}_i^*$ при $i \to \infty$ приближается к $\mathbf{b}_i$. Рассмотрим проекцию

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{b}_i - \frac{\langle \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|}$$

точки $\mathbf{b}_i$ на гиперплоскость Γ_i. Действительно, она лежит на отрезке $[\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_0]$, а угол между векторами $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0$ стремится к нулю. Соответственно точка $\mathbf{b}_i^*$ становится все ближе к точке $\mathbf{s}_i$ пересечения сферы $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ с прямой, проходящей через $\mathbf{b}_i$ параллельно вектору $\mathbf{a}_i$.

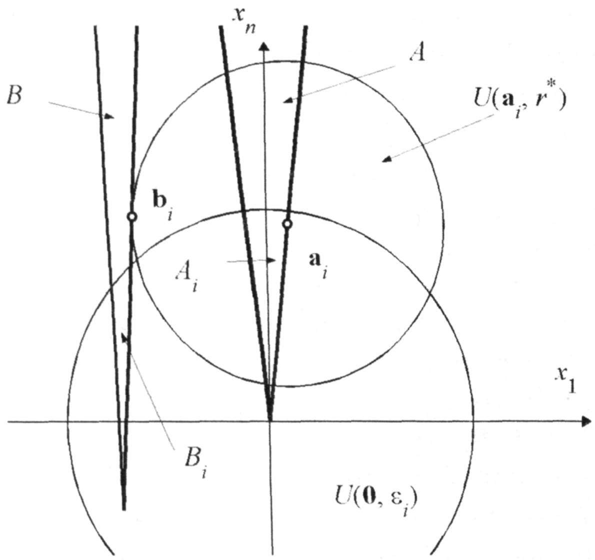

Рис. 1. Выпуклые неограниченные множества *A* и *B*

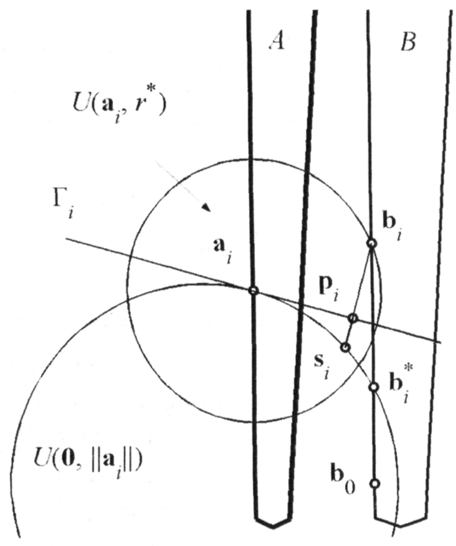

Рис. 2. Расположение точек a_i, b_i, b_i^* и p_i

С другой стороны, поскольку сфера $\partial U(\mathbf{0}, \|\mathbf{a}_i\|)$ с увеличением ее радиуса приближается в окрестности точки $\mathbf{a}_i$ к гиперплоскости Γ_i, то точки $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{p}_i$ становятся все ближе друг к другу. Соответственно имеет место предельное соотношение

$$\lim_{i\to\infty} \left\|\mathbf{b}_i^* - \mathbf{p}_i\right\| = 0. \tag{17}$$

При этом поскольку $\mathbf{p}_i$ есть ортогональная проекция $\mathbf{b}_i$ на гиперплоскость, проходящую через точку $\mathbf{a}_i$, то выполняется оценка

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{a}_i\| \le \|\mathbf{p}_i - \mathbf{b}_i\| \le r^* .$$

Это означает, что для последовательностей точек $\{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{\infty}$ и шаров $\{U(\mathbf{a}_i, r^*)\}_{i=1}^{\infty}$ имеет место

$$\mathbf{p}_i \in U(\mathbf{a}_i, r^*). \tag{18}$$

Из выражений (17) и (18) вытекает, что предел отклонения точек $\mathbf{b}_i^*$ от шаров $U(\mathbf{a}_i, r^*)$ равен нулю:

$$\lim_{i\to\infty} \rho\left(\mathbf{b}_i^*, U(\mathbf{a}_i, r^*)\right) = 0 . \tag{19}$$

Точки $\mathbf{b}_i^*$ (по построению) принадлежат компактам B_i , поэтому верна оценка

$$\|\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i\| > r^* + \gamma .$$

Однако эта оценка противоречит соотношению (19). Получилось противоречие. Следовательно, формула (12) верна.

Невозможность существования последовательностей, для которых выполняются оценки 1) или 2) доказывает равенство (12).

Замечание 1. Условие выпуклости множеств A и B является существенным. В противном случае предел (11) может не существовать. Пусть, например, на плоскости заданы два неограниченных множества. Одно является лучом $A = \{(x, y): x\in [0, +\infty), y = 0\}$, а другое состоит из точек на этом луче с целыми координатами $A = \{(x, y): x\in \mathbf{N}\cup\{0\}, y=0\}$. Для кругов радиусом i, $i\in \mathbf{N}$, выполняется равенство

$$d^*(A\cap U(\mathbf{0}, i), B\cap U(\mathbf{0}, i)) = 0{,}5.$$

В то же время для кругов радиуса $i + 0{,}9$, $i \in \mathbf{N}$, имеет место

$$d^*(A\cap U(\mathbf{0}, i + 0{,}9), B\cap U(\mathbf{0}, i+ 0{,}9)) = 0{,}5.$$

Таким образом, значение выражения (11) не определено.

Оценка степени близости неограниченных множеств

Для неограниченных множеств A и B K-хаусдорфово расстояние является достаточно грубой оценкой. Если $h^*(A, B) = +\infty$ или $h^*(B, A) = +\infty$, то $\tilde{d}\,(A, B) = 1$. В частности, это имеет место для любых двух непараллельных гиперплоскостей. Но они при этом могут располагаться по-разному, что играет роль при их изучении в различных практических задачах. Возникает необходимость ввести еще одну функцию, характеризующую степень того, как выпуклые множества A и B отклоняются друг от друга с учетом их геометрии в целом. При этом мы будем использовать то, что выпуклые множества в окрестности бесконечности имеют достаточно специфическую структуру, описанную, в частности в [14].

Определение 6. *Рецессивным конусом* [14, с. 77] *множества A называется конус*

$$0^+A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \forall \mathbf{y} \in A,\ \forall\lambda> 0\ (\mathbf{y} + \lambda\mathbf{x}\in A)\},$$

содержащий лучи всех направлений **x**, *которые начинаясь в любой точке A, лежат в A.*

При рассмотрении выпуклого множества A вне достаточно большой окрестности начала координат оно становится в некотором смысле все более похожим на свой рецессивный конус. Если $A\in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$, то $0^+A = \{0\}$ тогда и только тогда, когда A – ограниченное множество [14, с. 81].

Определение 7. *χ-расстоянием между A и B из* $\mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$ *назовем величину*

$$\chi(A, B) = d(0^+A\cap U(\mathbf{0}, 1), 0^+B\cap U(\mathbf{0}, 1)). \tag{20}$$

Значения выражения (20) лежат на отрезке [0, 1]. Это вызвано тем, что в состав любого конуса входит начало координат $\mathbf{0}$, и любая точка шара $U(\mathbf{0}, 1)$ находится от нее на расстоянии, не превышающем 1. Функция χ определяет полуметрику на множестве $\mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$. То есть для нее выполняются все аксиомы метрики, за исключением того, что она может быть равной нулю для двух несовпадающих множеств. Действительно, ведь одинаковые рецессивные конуса могут быть у различных множеств. Например на плоскости надграфик $G = \mathrm{epi}\, f$ любого многочлена второй степени

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \in (0, +\infty),\ b, c \in(-\infty, +\infty)$$

имеет рецессивный конус, состоящий из одного луча, совпадающего с положительной полуосью оси абсцисс.

Покажем, что в общем случае отклонением выпуклых множеств вне достаточно большой окрестности начала координат можно рассчитывать без нахождения их рецессивных конусов.

Лемма 3. *Пусть* $A,\ B \in \operatorname{clcv}(\mathbf{R}^n)$. *Тогда верно равенство*

$$\chi(A,B) = \lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(\frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Покажем сначала, что для произвольного выпуклого множества справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(\frac{d(A(\varepsilon),0^+A(\varepsilon))}{\varepsilon}\right)=0. \tag{22}$$

Выведем оценку сверху для хаусдорфова отклонения конуса 0^+A от множества A. Выберем произвольную точку $\mathbf{x} \in A$. Из определения 7 следует, что выполняется вложение

$$\{\mathbf{x}\} + 0^+A \subseteq A.$$

То есть во множестве A содержится его рецессивный конус, параллельно перенесенный на вектор $\mathbf{x}$. Получаем

$$h^*(0^+A,\ A) \le h^*(0^+A,\ 0^+A + \{\mathbf{x}\}) \le \|\mathbf{x}\|.$$

Следовательно, $h^*(0^+A,\ A) = d_1 \in [0,\ \|\mathbf{x}\|]$ – конечное число. Из (12) вытекает

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(\frac{h(0^+A(\varepsilon),A(\varepsilon))}{\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to+\infty}\frac{d_1}{\varepsilon}=0. \tag{23}$$

Покажем теперь, что верно соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\left(\frac{h(A(\varepsilon),0^+A(\varepsilon))}{\varepsilon}\right)=0. \tag{24}$$

Допустим, предел в выражении (24) отличен от нуля или не существует. Тогда найдется такое положительное число d_2 и такая последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$\forall i \in \mathbf{N}:\ h(A(\varepsilon_i),\ 0+A(\varepsilon_i)) > d_2\varepsilon_i,\ \varepsilon_i \to +\infty.$$

Соответственно найдется последовательность точек $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ для членов которой выполняются вложения

$$\forall i\in \mathbf{N}:\ \mathbf{a}_i\in A(\varepsilon_i) \tag{25}$$

и неравенство

$$\forall i \in \mathbf{N}:\ \rho(\mathbf{a}_i,\ 0^+A(\varepsilon_i)) > d_2\varepsilon_i. \tag{26}$$

Рассмотрим конус

$$K^* = \{\forall\mathbf{x}:\ (\exists\mathbf{y} \in 0^+A:\ \angle(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) \le \operatorname{arctg} d_2)\}.$$

Из (26) следуют соотношения

$$\forall i \in \mathrm{N}:\ \mathbf{a}_i\notin (A(\varepsilon_i) + U(\mathbf{0},\ d_2)) \supseteq K^*(\varepsilon_i).$$

Отсюда и из (25) вытекает

$$\forall i\in \mathbf{N}:\ \mathbf{a}_i \notin K^*. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{\mathbf{a}_i/\|\mathbf{a}_i\|\}_{i=1}^{\infty}$. Она лежит в шаре единичного радиуса, а значит ограничена. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности полагаем, что вся последовательность сходится и

$$\{\mathbf{a}_i/\|\mathbf{a}_i\|\}_{i=1}^{\infty} \to \mathbf{a}^*.$$

Оценка (27) означает, что все точки $\mathbf{a}_i/\|\mathbf{a}_i\|$ лежат вне конуса K^*. Предел их последовательности может лежать либо вне данного конуса, либо на его границе:

$$\mathbf{a}^* \in \left(\mathbf{R}^n \setminus K^*\right)\cup\partial K^*.$$

Конус 0^+A полностью вложен во внутренность K^* (за исключением точки начала координат). Это означает, что предел $\mathbf{a}^*\in U(\mathbf{0},\ 1)$ не принадлежит 0^+A. В то же время доказано [14, с. 79] утверждение, что предел любой последовательности $\{\lambda_i\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{\infty}$ при $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$, $\lambda_i>0$, $\lambda_i\to 0$ (если он существует) принадлежит 0^+A.

Последовательность $\{\mathbf{a}_i / \|\mathbf{a}_i\|\}_{i=1}^{\infty}$ подходит под данное описание, если положить $\lambda_i = \|\mathbf{a}_i\|^{-1}$.

Отсюда следует, что

$$\mathbf{a}^* \in 0^+ A.$$

Получилось противоречие. Следовательно, выражения (23) и (24) верны, а значит выполняется и (22).

Теперь оценим поведение отклонения $d(A(\varepsilon), B(\varepsilon))$. В силу неравенства треугольника имеем

$$d(A(\varepsilon), B(\varepsilon)) \le d(A(\varepsilon), 0^+A(\varepsilon)) + d(0^+A(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)) + d(B(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)). \tag{28}$$

С другой стороны в силу того же неравенства

$$d(0^+A(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)) \le d(A(\varepsilon), 0^+A(\varepsilon)) + d(A(\varepsilon), B(\varepsilon)) + d(B(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)).$$

Переставив слагаемые получим

$$d(A(\varepsilon), B(\varepsilon)) \ge d(A(\varepsilon), 0^+A(\varepsilon)) - d(0^+A(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)) - d(B(\varepsilon), 0^+B(\varepsilon)). \tag{29}$$

В пределе оценка дает

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon} \le \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(0^+A(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(A(\varepsilon),0^+A(\varepsilon)) + d(B(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon} \le$$

$$\le \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(0^+A(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon} + 0 + 0 \tag{30}$$

Аналогично оценка (29) дает

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon} \ge \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(0^+A(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon}. \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+\infty} \frac{d(0^+A(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon}. \tag{32}$$

Поскольку рецессивные конусы фигуры, инвариантные относительно гомотетии с центром в начале координат, то значение выражения

$$\frac{d(0^+A(\varepsilon),0^+B(\varepsilon))}{\varepsilon}$$

одинаково при любом $\varepsilon > 0$. Подставив в частности значение $\varepsilon = 1$ (вместо предела $\varepsilon \to +\infty$) в (32), получаем равенство (21).

Комбинированная метрика

Метрика $\tilde{d}$ двум произвольным замкнутым множествам ставит в соответствие число из отрезка [0, 1] на базе метрики Хаусдорфа. Полуметрика χ, введенная на классе выпуклых замкнутых множеств, определяет степень их рассогласования, опираясь на понятие рецессивного конуса. Естественно, ввести новую метрику, сложив $\tilde{d}(A, B)$ и $\chi(A, B)$.

Определение 8. *Комбинированным расстоянием между множествами* $A, B \in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$ *назовем величину*

$$D(A,B) = \tilde{d}(A,B) + \chi(A,B). \tag{33}$$

Теорема 1. *Функция (33) задает на множестве* $\mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$ *метрику и вычисляется по формуле*

$$D(A,B) = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(1 - \exp\big(d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))\big) + \frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Выражение (33) есть сумма метрики и полуметрики, следовательно оно тоже задает метрику [13]. Из лемм 2 и 3 следует, что для метрики $\tilde{d}(A, B)$ и полуметрики $\chi(A, B)$ в случае выпуклых множества A и B имеют место предельные выражения (11) и (21). Их сумма

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\big(1 - \exp(-d(A(\varepsilon),B(\varepsilon)))\big) + \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\frac{d(A(\varepsilon),B(\varepsilon))}{\varepsilon}\right).$$

Метрика $D(A, B)$ обладает рядом достоинств. Прежде всего, она не зависит от параллельного переноса и поворота пары (A, B), что отличает ее от метрики Хаусдорфа–Бебутова [8]. Для множеств, хаусдорфово расстояние между которыми является конечным числом, существует взаимно однозначное отображение между значением $D(A, B)$ и $\tilde{d}^*(A, B)$, определенное преобразованием Кружкова, причем в этом случае $D(A, B)\in[0, 1)$. Если же $\tilde{d}^*(A, B)=+\infty$, то комбинированная метрика дает число $D(A, B)\in[1, 2]$, определяемое рассогласованием множеств в окрестности бесконечно удаленной точки. Это согласуется с принятой аппроксимацией неограниченных выпуклых множеств их рецессивными конусами. Метрика D является полной, поскольку сходимость в ней совпадает со сходимостью в метрике Хаусдорфа.

Заметим, что сходимость в метрике D в общем случае не совпадает со сходимостью в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Рассмотрим, например, последовательность прямых $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, заданных уравнениями:

$$A_i = \{(x, y) : y = x \operatorname{tg} \beta_i,\ \beta_i = 1/i,\ x\in(-\infty, \infty)\}.$$

В комбинированной метрике расстояние между любым двумя непараллельными прямыми, угол между которыми равен β, строго больше 1 и равно $1+\sin\beta$. В метрике Хаусдорфа–Бебутова расстояние между прямым, пересекающимися в начале координат, равно $\sin\beta$ (см. [9, с. 187]). Каждая из прямых A_i образует с осью абсцисс угол равный $\beta_i = 1/i$. Соответственно в метрике Хаусдорфа–Бебутова $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть фундаментальная последовательность, а в метрике D нет.

Примеры

Пример 1. Пусть требуется найти комбинированное расстояние между двумя множествами $A,\ B\in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^2)$. А именно, подграфиками функций $A = \mathrm{epi}\sqrt{1+x^2}$, $x\in(-\infty, +\infty)$, $B = \mathrm{epi}(1/x)$, $x\in(0, +\infty)$.

Оба множества неограниченны и обобщение хаусдорфова расстояния между ними равно бесконечности, и соответственно

$$\tilde{d}(A,B) = 1.$$

Их рецессивные конуса:

$$0^+A = \{(x, y) : x = r\cos t,\ y = r\cos t,\ t\in[\pi/4, 3\pi/4],\ r\in[0, +\infty)\},$$
$$0^+B = \{(x, y) : x = r\cos t,\ y = r\cos t,\ t\in[0, \pi/2],\ r\in[0, +\infty)\}.$$

Угол между крайними векторам конусов равен $\pi/4$. Соответственно их отклонение на бесконечности

$$\chi(A,B) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Комбинированное расстояние между A и B равно

$$D(A,B) = \tilde{d}(A,B) + \chi(A,B) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}707.$$

Пример 2. Пусть требуется найти комбинированное расстояние между двумя множествами $A,\ B\in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^2)$. А именно, подграфиками функций $A = \mathrm{epi}(\exp(x) + 1)$, $x\in(-\infty, +\infty)$, $B = \mathrm{epi}\ \exp(x)$, $x\in(-\infty, +\infty)$.

В данном примере распространение хаусдорфова расстояния между множествами, опреде-

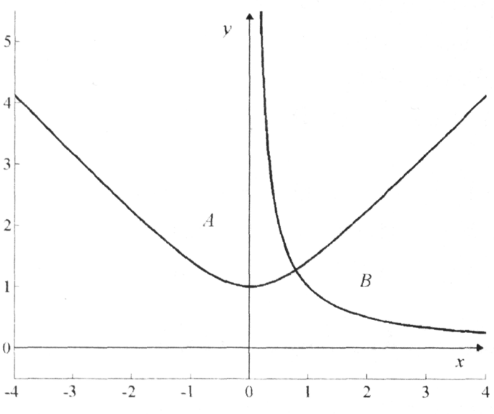

Рис. 3. Множества *A* и *B* в примере 1

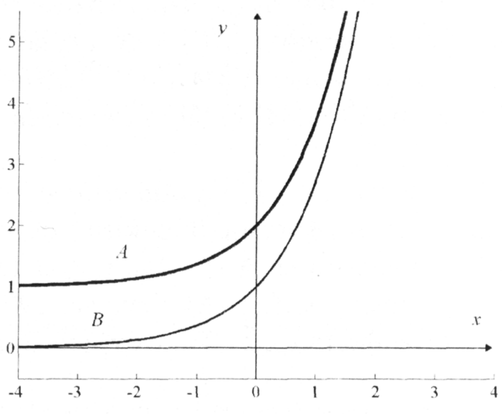

Рис. 4. Множества *A* и *B* в примере 2

ленное по формуле (4), конечно и равно $d^*(A, B) = h^*(B, A) = 1$. Хотя ни для какой точки множества B расстояние до A, равное 1 не достигается, но в пределе

$$h^*(A,B) = \lim_{t\to+\infty}\left(\left(-t,\exp(-t)\right),A\right) = 1,\quad \left(-t,\exp(-t)\right)\in B.$$

Комбинированное расстояние между A и B равно

$$D(A,B) = \tilde{d}(A,B) + \chi(A,B) = 1 - \exp(-1) + 0 \approx 0{,}632.$$

Пример 3. Пусть требуется найти комбинированное расстояние между двумя множествами A, $B \in \mathrm{clcv}(\mathbf{R}^2)$. А именно, подграфиками функций $A = \mathrm{epi}(\exp(x) + x/4)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $B = \mathrm{epi}\, x^4$, $x \in (-\infty,+\infty)$.

В данном примере обобщение хаусдорфова расстояния между множествами равно бесконечности.

Рецессивные конуса множеств:

$0^+A = \{(x, y) : x = r\cos t,\ y = r\cos t,\ t \in [\pi/4,\ \pi/2 + \mathrm{arctg}(1/4)],\ r \in [0, +\infty)\}$,

$0^+B = \{(x, y): x = 0,\ y \in [0, +\infty)\}$.

Угол между крайними векторам конусов равен $\pi/2 + \mathrm{arctg}(1/4) > \pi/2$. Соответственно их отклонение на бесконечности

$$\chi(A, B) = 1.$$

Комбинированное расстояние между A и B равно

$$D(A,B) = \tilde{d}(A,B) + \chi(A,B) = 1 + 1 = 2.$$

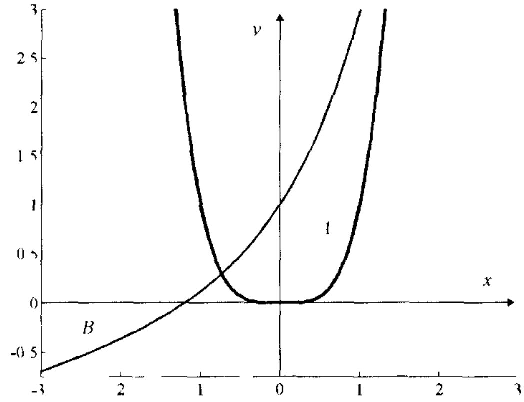

Рис. 5. Множества *A* и *B* в примере 3

Литература

1. Местецкий, Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры / Л.М. Местецкий. – М.: Физматлит, 2009. – 288 с.
2. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
3. Тарасьев, А.М. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления / А.М. Тарасьев, В.Н. Ушаков, А.П. Хрипунов // Прикл. математика и механика. – 1987. – Т. 51. – Вып. 2. – С. 216–222.
4. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.: КомКнига, 2006. – 304 с.
5. Бураго, Д.Ю. Курс метрической геометрии / Д.Ю. Бураго, Ю.Д. Бураго, С.В. Иванов. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004. – 511 с.
6. Лейхтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. – М.: Наука, 1985. – 335 с.
7. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. – М.: Мир, 1979. – 399 с.
8. Бебутов, М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций / М.В. Бебутов // Бюл. мех-мат. факультета МГУ. – 1941. – № 5. – С. 1–52.
9. Панасенко, Е.А. Распространение теорем Е.А. Барабашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы / Е.А. Панасенко, Е.Л. Тонков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 185–201.
10. Панасенко, Е.А. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbf{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова и дифференциальные включения / Е.А. Панасенко, Л.И. Родина, Е.Л. Тонков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 162–177.
11. Демьянов, В.Ф. Недифференцируемая оптимизация / В.Ф. Демьянов. – М: Наука, 1981. – 384 с.
12. Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I / С.Н. Кружков // Математический сборник. – 1975. – Т. 98. – Вып. 3. – С. 450–493.
13. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
14. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М.: Мир, 1973. – 472 с.

A VARIANT OF A METRIC FOR UNBOUNDED CONVEX SETS

P.D. Lebedev[1]*, V.N. Ushakov*[2]

Convex analysis methods are used for the construction of distance function between closed (unbounded in common case) sets of Euclidean space. It is shown that the distance satisfies all properties of metric. It is proved that this distance is invariant under motion of the sets in space. This metric space is proved to be complete.

Keywords: Hausdorff distance, metric, convex set, recessive cone.

References

1. Mesteckij L.M. *Nepreryvnaya morfologiya binarnyx izobrazhenij: figury, skelety, cirkulyary* [Continuous morphology of binary images: figures, shells, circulars]. Moscow: Fizmatlit. 2009. 288 p. (in Russ.).

2. Krasovskij N.N., Subbotin A.I. *Pozicionnye differencial'nye igry* [Positional differential games]. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.

3. Taras'ev A.M., Ushakov V.N., Khripunov A.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika.* 1987. Vol. 51. Issue 2. pp. 216–222. (in Russ.).

4. Khausdorf F. *Teoriya mnozhestv* (Set Theory). Moscow: Kom kniga, 2006. 304 p. (in Russ.). [Hausdorff F. Set Theory. American Mathematical Soc., 1957. 352 p.]

5. Burago D.Yu., Burago Yu.D., Ivanov S.V. *Kurs metricheskoj geometrii* [The course of metric geometry]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternyx issledovanij, 2004. 511 p. (in Russ.).

6. Lejxtvejs K. *Vypuklye mnozhestva* [Convex sets]. Moscow: Nauka, 1985. 335 p. (in Russ.). [von K. Leichtweiss Konvexe Mengen. Berlin: VEB Doutscher Verlag der Wissenschaften, 1980. 332 p. (in Ger.).].

7. E'kland I., Temam. R. *Vypuklyj analiz i variacionnye problemy* [Convex analysis and variational problems]. Moscow: Mir, 1979. 399 p. [Ekeland I., Temam R. Convex analysis and variational problems. SIAM, 1976. 402 p.]

8. Bebutov M.V. *Bul. mex-mat. fakul'teta MGU.* 1941. no. 5. pp. 1–52. (in Russ.).

9. Panasenko E.A., Tonkov E.L. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki.* 2009. Vol. 15, no. 3. pp. 185–201. (in Russ.).

10. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. Prostranstvo clcv($\mathbf{R}^n$) s metrikoj Khausdorfa–Bebutova i differencial'nye vklyucheniya. [The space clcv($\mathbf{R}^n$) with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions]. *Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki.* 2011. Vol. 17, no. 1. pp. 162–177. (in Russ.).

11. Dem'yanov V.F. *Nedifferenciruemaya optimizaciya* [Nondifferential optimization]. Moscow: Nauka, 1981. 384 p. (in Russ.).

12. Kružkov S.N. Generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equations of eikonal type. I. *Mathematics of the USSR – Sbornik.* 1975. Vol. 27, no. 3. pp. 406–446. http://dx.doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522

13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *E'lementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka. 1976. 544 p. (in Russ.).

14. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex analysis]. Moscow: Mir. 1973. 472 p. (in Russ.). [R. Tyrrell Rockafellar. Convex Analysis. Princeton University Press, 1997. 451 p.].

Поступила в редакцию 18 декабря 2012 г.

[1] Lebedev Pavel Dmitrievich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Dynamic Systems of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch).
E-mail: pleb@yandex.ru

[2] Ushakov Vladimir Nikolaevich is Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Department of Dynamic Systems of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Russian Academy of Sciences (Ural branch).
E-mail: ushak@imm.uran.ru