УДК 517.977

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВОЛЬТЕРРА, II

В.Л. Пасиков[1]

Изучены задача наведения и игровая задача *m* лиц для случая равновесия системы функционалов (типа расстояния) в смысле Нэша. Для решения этих задач применяется известная экстремальная конструкция академика Н.Н. Красовского, модифицированная для рассматриваемых ситуаций.

Ключевые слова: игровая задача, интегро-дифференциальная система, управляющее воздействие, позиции игры, программный максимин, равновесие в смысле Нэша.

Предлагаемая работа примыкает к работам [1–8] и является продолжением статьи [9]. Все понятия и обозначения, несопровождаемые ссылками и пояснениями, имеются в [9]. Нумерация параграфов и формул продолжает нумерацию [9].

3. Игровая задача наведения для линейных интегро-дифференциальных систем Вольтерра

Рассматривается конфликтно-управляемая линейная интегро-дифференциальная система Вольтерра

$$\dot{x}(t)=f(t)+A(t)x(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds+u(t)-v(t),\ x(0)=x_0. \tag{40}$$

Все понятия и ограничения аналогичны [9].

Игра рассматривается на заданном отрезке $[0,\theta]$, плата задана равенством

$$\gamma[\theta]=\left\|\{x[\theta]\}_m\right\|. \tag{41}$$

Первый игрок распоряжается выбором управления $u\in P$ и стремится минимизировать величину $\gamma[\theta]$ на траекториях $x[t]$, $0\le t\le\theta$, системы (40), реализующихся под действием управлений $u[t]$, $0\le t\le\theta$, $u\in P$, в паре с любой интегрируемой реализацией $v[t]$, $0\le t\le\theta$, $v\in Q$, второго игрока. Цель второго игрока противоположна и состоит в максимизации величины (41).

Пусть $\varphi(s)=\Phi(s,0)x_0+f(s)$, где $\Phi(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)X(\tau,s)d\tau$, $X(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{x}(t)=A(t)x(t)$.

Тогда решение системы (40) записывается в виде

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int_0^t\tilde{x}(t,s)\varphi(s)ds+\int_0^t\tilde{x}(t,s)u(s)ds-\int_0^t\tilde{x}(t,s)v(s)ds. \tag{42}$$

$$\tilde{x}(t,s)=X(t,s)+\int_s^t X(t,\tau)R(\tau,s)d\tau,$$

$R(t,s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,s)$.

Предполагаем, что до момента t_0, $0\le t_0\le\theta$ начала игры, оба игрока применяют некоторые допустимые реализации управлений $u_0[t]$, $v_0[t]$, $0\le t\le t_0$. Если $u[t]\equiv 0$, $v[t]\equiv 0$ после момента t, $t_0\le t\le\theta$, то состояние системы (40) в момент θ согласно (42) записывается по формуле

$$x(\theta,t)=x_0(\theta)+\int_0^{t_0}\tilde{x}(\theta,s)u_0[s]ds+\int_{t_0}^{t}\tilde{x}(\theta,s)u[s]ds-\int_0^{t_0}\tilde{x}(\theta,s)v_0[s]ds-\int_{t_0}^{t}\tilde{x}(\theta,s)v[s]ds, \tag{43}$$

[1] Пасиков Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и информатики, Орский гуманитарно-технологический институт (филиал Оренбургского государственного университета)
E-mail pasikov_fmf@mail.ru

где $x_0(\theta) = X(\theta, 0)x_0 + \int_0^\theta \tilde{x}(\theta, s)\varphi(s)ds$.

Определение 3.1. Пару $p = \{t, x(\theta, t)\}$ будем называть позицией игры в момент t, $0 \le t < \theta$; $p_0 = \{t_0, x(\theta, t_0)\}$ – начальная позиция, где

$$x(\theta, t_0) = x_0(\theta) + \int_0^{t_0} \tilde{x}(\theta, s)u_0[s]ds - \int_0^{t_0} \tilde{x}(\theta, s)v_0[s]ds,$$

тогда состояние системы (40) с учетом (43) в момент θ имеет вид

$$x(\theta) = x(\theta, t_0) + \int_{t_0}^{\theta} \tilde{x}(\theta, s)u[s]ds + \int_{t_0}^{\theta} \tilde{x}(\theta, s)v[s]ds. \tag{44}$$

Уточним постановки задач для обоих игроков в рассматриваемом случае наведения.

Задача 3.1. Среди допустимых стратегий U первого игрока найти стратегию U^e, которая при любом допустимом способе управления второго игрока для любой начальной позиции p_0, $0 \le t_0 < \theta$, гарантирует результат игры:

$$(\gamma[\theta] \,|\, t_0, x(\theta, t_0), U^e, v) \le \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)).$$

Задача 3.2. Среди допустимых стратегий V второго игрока найти стратегию V^e, которая при любом допустимом способе управления первого игрока для любой начальной позиции p_0, $0 \le t_0 < \theta$, гарантирует результат игры:

$$(\gamma[\theta] \,|\, t_0, x(\theta, t_0), u, V^e) \ge \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)).$$

Задача 3.3. Среди допустимых стратегий U, V первого и второго игроков соответственно найти стратегии U^e, V^e, которые для любой начальной позиции p_0, $0 \le t_0 < \theta$, гарантируют результат игры $(\gamma[\theta] \,|\, t_0, x(\theta, t_0) U_e, V^e) = \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$.

В рассматриваемом случае программный максимин $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$ для начальной позиции p_0, $0 \le t_0 < \theta$ согласно (43), (44) записывается в виде

$$\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)) = \max_{\|l\|=1} \left[\int_{t_0}^{\theta} \max_{v \in Q} l'\{\tilde{x}(\theta, s)v[s]\}_m ds - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u \in P} l'\{\tilde{x}(\theta, s)u[s]\}_m ds - l'\{x(\theta, t_0)\}_m \right], \tag{45}$$

если правая часть этого равенства положительна, иначе $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0)) = 0$.

Здесь рассматривается лишь регулярный случай, когда максимум в правой части (45) достигается на единственном векторе $l = l_0(t_0, x(\theta, t_0))$, $0 \le t_0 < \theta$.

Далее обозначим

$$\{l_0'\tilde{x}(\theta, t)\} = \{l_0' X(\theta, t)\}_m + \int_t^{\theta} \{l_0' X(\theta, \tau)\}_m R(\tau, t)d\tau = x^e[t]. \tag{46}$$

Определение 3.2. Пусть m-мерный вектор l_0 в каждый момент t_0, $0 \le t_0 < \theta$, доставляет максимум правой части (45). Тогда, если позиция p_0 такова, что $\varepsilon_0(t_0, x(\theta, t_0)) > 0$, то с этой позицией будем сопоставлять множество $U^e(t_0, x(\theta, t_0))$ ($V^e(t_0, x(\theta, t_0))$) всех векторов $u^e \in P$ ($v^e \in Q$), для которых $x^e[t_0]u^e[t_0] = \max\limits_{u \in P} x^e[t_0]u$ ($x^e[t_0]v^e[t_0] = \max\limits_{v \in Q} x^e[t_0]v$). В этом случае стратегия U^e (V^e) называется экстремальной стратегией первого (второго) игрока.

Отметим, что здесь $\{l_0' X(\theta, t)\}_m$ – первые m координат решения системы $\dot{x}(t) = -A'(t)x(t)$ с краевым условием l_0 [1, с. 117]. У вектора l_0 после m-й координаты приписаны нули.

С использованием ранее приведённых фрагментов рассуждений по плану доказательства аналогичных теорем из [1, с. 153] доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.1. В регулярном случае игры из задач 3.1 и 3.2 экстремальные стратегии $U^e = U^e(t, x(\theta, t))$ и $V^e = V^e(t, x(\theta, t))$ $0 \le t_0 \le t < \theta$ доставляют решения этих задач. Они составляют пару оптимальных стратегий $\{U^e, V^e\}$, которые разрешают задачу 3.3 и доставляют седловую точку рассматриваемой игры, причём $(\gamma[\theta] \mid t_0, x(\theta, t_0) U^e, V^e) = \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$, то есть оптимальная плата игры $(\gamma[\theta] \mid t_0, x(\theta, t_0) U^e, V^e)$ для всякой исходной позиции $(t_0, x(\theta, t_0))$ равняется программному максимину $\varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$.

Доказательство. Запишем следующую функцию:

$$\begin{aligned}\varepsilon[t] = \varepsilon(t, x(\theta, t)) = \int_t^\theta \max_{v \in V} \{l_0'(s, x(\theta, s)\tilde{x}(\theta, s))\}_m v[s] ds - \\ - \int_t^\theta \max_{u \in U} \{l_0'(s, x(\theta, s)\tilde{x}(\theta, s))\}_m u[s] ds + \int_{t_0}^t \{l_0'(s, x(\theta, s)\tilde{x}(\theta, s))\}_m v_0[s] ds - \\ - \int_{t_0}^t \{l_0'(s, x(\theta, s)\tilde{x}(\theta, s))\}_m u_0[s] ds - \{l_0'(t_0, x(\theta, t_0), \tilde{x}(\theta, t_0))\}_m.\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь $u_0[s]$, $v_0[s]$, $t_0 \le s \le t$ – допустимые управления, реализовавшиеся к моменту t. Аналогично [1] можно показать, что функция $\varepsilon(t, x(\theta, t))$, $t_0 \le t \le \theta$, $0 \le t_0 < \theta$, абсолютно непрерывна по t в области $\varepsilon(t, x(\theta, t)) > 0$ и вектор $l_0(t, x(\theta, t))$ при дифференцировании не зависит от t, t_0 – начало процесса управления.

Производная от функции (47) существует почти всюду [1, с. 144] и имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon[t]}{dt} = \max_{u \in P} \{l_0'(t, x(\theta, t)\tilde{x}(\theta, t)\}_m u - \max_{v \in Q} \{l_0'(t, x(\theta, t)\tilde{x}(\theta, t)\}_m v + \\ + \{l_0'(t, x(\theta, t)\tilde{x}(\theta, t)\}_m v - \{l_0'(t, x(\theta, t)\tilde{x}(\theta, t)\}_m u.\end{aligned}$$

Отсюда согласно (46) получим

$$\frac{d\varepsilon[t]}{dt} = -\max_{v \in Q} x^e[t] v + \max_{u \in P} x^e[t] u + x^e[t] v[t] - x^e[t] u[t]. \tag{48}$$

Если теперь первый игрок, начиная с момента t_0, применяет экстремальную стратегию U^e в течение всей игры, а второй – произвольную допустимую, то из (48) и определения 3.2 получаем $\frac{d\varepsilon[t]}{dt} = -\max_{v \in V} x^e(t) v + x^e(t) v \le 0$. Таким образом, положительная функция $\varepsilon[t] = \varepsilon(t, x(\theta, t))$ имеет почти всюду на $[t_0, \theta]$ неположительную производную. Следовательно, функция $\varepsilon[t]$ на $[t_0, \theta]$ не возрастает, а значит, $\varepsilon(\theta, x(\theta, \theta)) \le \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$, но из (47) вытекает, что $\varepsilon(\theta, x(\theta, \theta)) = \left\| \{x[\theta]\}_m \right\|$.

Допустим, что второй игрок в течение всей игры применяет экстремальную стратегию V^e. Тогда из (48) имеем $\frac{d\varepsilon[t]}{dt} = \max_{u \in U} x^e[t] u - x^e[t] u[t]$. Отсюда $\frac{d\varepsilon[t]}{dt} \ge 0$. Таким образом, когда функция $\varepsilon[t]$ положительна, она имеет неотрицательную производную при почти всех $t \in [t_0, \theta]$. Следовательно, функция $\varepsilon[t]$ на $[t_0, \theta]$ не убывает. Значит, $\varepsilon(\theta, x(\theta, \theta)) \ge \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$.

Пусть теперь в регулярном случае оба игрока применяют свои экстремальные стратегии, тогда, как это следует из предыдущего, им будет гарантирован результат игры $\left\| \{x[\theta]\}_m \right\| = \varepsilon(t_0, x(\theta, t_0))$.

Пример. Рассмотрим модельный пример. Пусть задана система из двух скалярных уравнений

$$\dot{x}(t) = e^t + \int_0^t x(s) ds + u(t) - v(t), \tag{49}$$

здесь $f(t)=e^t, K(t,s)\equiv 1$, однородная дифференциальная система для (49) записывается в виде $\dot{x}=0$. В качестве фундаментальной матрицы выбираем $X(t)=1$, тогда матрица Коши $X(t,s)=X(t)X^{-1}(s)\equiv 1$, $X(t,0)=1$; вычисляем $\Phi(t,s)=\int_s^t K(t,\tau)X(\tau,s)d\tau=\int_s^t d\tau=t-s$, резольвента этой матрицы определяется формулой [10, с. 22] $R(t,s)=\mathrm{sh}(t-s)=\dfrac{e^{t-s}-e^{-(t-s)}}{2}$, тогда

$$\tilde{x}(t,s)=1+\int_s^t \mathrm{ch}(\tau-s)d\tau=1+\mathrm{ch}(\tau-s)\Big|_{\tau=s}^{\tau=t}=1+\mathrm{ch}(t-s)-1=\mathrm{ch}(t-s).$$

Выбираем какое-либо ненулевое начальное условие, например $x_0=x(0)=3$, получаем $\varphi(t)=f(t)+\Phi(t,0)x_0=e^t+3t.$

Записываем состояние системы в момент t

$$x(t)=X(t,0)x_0+\int_0^t \tilde{x}(t,s)\varphi(s)ds+\int_0^t \tilde{x}(t)u(t)dt-\int_0^t \tilde{x}(t)v(t)dt=$$

$$=3+\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)(e^s+3s)ds+\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)u(s)ds-\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)v(s)ds.$$

Проведём вычисления:

$$\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)e^s ds+3\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)sds=\frac{1}{2}\int_0^t (e^{t-s}+e^{-(t-s)})e^s ds+\frac{3}{2}\int_0^t (e^{t-s}+e^{-(t-s)})sds.$$

Для первого слагаемого получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^t (e^t+e^{-t+2s})ds=\frac{1}{2}\int_0^t (e^t s+\frac{1}{2}e^{-t+2s})\Big|_0^t=\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t};$$

для второго слагаемого интегрированием по частям получаем

$$\frac{3}{2}e^t\int_0^t e^{-s}sds+\frac{3}{2}e^{-t}\int_0^t (e^s sds=\frac{3}{2}(-t-1+e^t)+\frac{3}{2}(t-1+e^{-t}).$$

Подставим в (1)

$$x(t)=\frac{1}{2}te^t+\frac{7}{4}e^t+\frac{5}{4}e^{-t}+\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)u(s)ds-\int_0^t \mathrm{ch}(t-s)v(s)ds,$$

нетрудно проверить, что $x(0)=3$.

Будем теперь считать, что начало управления $t_0=0$, начальная точка находится в точке (3,3) координат, из элементарных соображений заключаем, что движение в плоскости Oxy будет проходить по прямой $y=x$ по направлению к началу координат. Полагаем, что управляющие воздействия стеснены ограничениями $u\in[0,1], v\in[0,1]$. Седловую точку определяют стратегии U^e, V^e, согласно которым в каждый момент $t\in[0,\theta)$ управляющие воздействия принимают значения $u=1$, $v=1$. При этих значениях экстремальный вектор $l_0=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ и согласно (45) $\varepsilon(0,x(\theta,0))=\max(-e'x(\theta,0))=-(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 3-\frac{1}{\sqrt{2}}\ 3)=\frac{6}{\sqrt{2}}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$, то есть сближения с началом координат нет, в других случаях точка (3,3) будет либо приближаться к началу координат, либо удаляться.

4. Игровая задача для интегро-дифференциальных систем в случае *m* лиц

Рассматривается управляемая система, эволюция которой описывается векторным интегро-дифференциальным уравнением Вольтерра

$$\dot{x}(t) = f(t) + A(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + \sum_{i=1}^{m} u_i(t), \ x(0) = x_0, \tag{50}$$

здесь x – n-мерный фазовый вектор, $f(t)$ – n-мерная интегрируемая по Лебегу на $[0,\theta]$ вектор-функция, $\theta > 0$ – фиксированный момент, $K(t,s)$ – непрерывная на $[0,\theta]\times[0,\theta]$ матрица $n\times n$, $A(t)$ – непрерывная на $[0,\theta]$ матрица $n\times n$, $u_i(t), i=\overline{1,m}$ – управляющие воздействия, стесненные ограничениями, $u_i \in U_i, U_i$ – выпуклые компакты в R^n, а реализации управляющих воздействий $u_i[t], t\in[0,\theta]$ – измеримые по Лебегу функции. Все интегралы понимаются в смысле Лебега. Как показано в [9], при таких ограничениях система (50) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $x[t]$, удовлетворяющее начальному условию $x[0] = x_0$.

Решение системы (50) записывается в виде (42):

$$x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t \tilde{x}(t,s)\varphi(s)ds + \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \tilde{x}(t,s)u_i[s]ds. \tag{51}$$

Пусть, как и в [8], задана система функционалов

$$\Omega = \left\{Y_i \mid Y_i(u_1,\dots,u_m) = \varphi_i(x[\theta]), i = \overline{1,m}\right\}. \tag{52}$$

Задача 4.1. Найти такие стратегии $U_1^e,\dots,U_m^e$, для которых выполняются соотношения $\varphi_i(x^e[\theta]) \le \varphi_i(x^i[\theta])$, $i=\overline{1,m}$.

Здесь $x^e[\theta]$ – точка реализовавшейся траектории $x[t]$ системы (50), которая отвечает стратегиям $U_1^e,\dots,U_m^e$; $x^i[\theta]$ – точка траектории $x[t]$, $0\le t\le\theta$, системы (50), соответствующая управлениям $u_1^e[t],\dots,u_{i-1}^e[t], u_i[t], u_{i+1}^e[t],\dots,u_m^e[t]$, где $u_j^e[t]$, $j\ne i$, $j=\overline{1,m}$, формируется на основе U_j^e; $u_i[t]$ – реализация произвольного измеримого по Лебегу управления, стесненного условием $u_i \in U_i$.

Если задача 4.1 разрешима, то набор стратегий $U^e = \left\{U_1^e,\dots,U_m^e\right\}$ называется равновесным по Нэшу для игры (50), (52) [8]. Как и в [8], рассмотрим случай, когда

$$Y_i(u_1,\dots,u_m) = \left\|c^i - x[\theta]\right\|, \tag{53}$$

где c^i – заданные точки в R^n, $i=\overline{1,m}$.

Считаем, что до момента начала игры t_0, $0\le t_0<\theta$, все игроки уже реализовали некоторые допустимые управления $u_i^0[t]$, $0\le t\le t_0$; далее до момента t, $t_0\le t<\theta$, применялись некоторые допустимые управления согласно тем или иным соображениям игроков, а после момента t предполагаем, что $u[t]\equiv 0$. Тогда в момент t состояние системы (50) имеет вид $x(\theta,t) = x(\theta,t_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\tilde{x}(\theta,s)u_i[s]ds$, где $x(\theta,t_0) = X(\theta,0)x_0 + \int_0^\theta \tilde{x}(\theta,s)\varphi(s)ds + \sum_{i=1}^{m}\int_0^{t_0}\tilde{x}(\theta,s)u_i^0[s]ds$.

Следовательно,

$$x(\theta,t) = x(\theta,t_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\tilde{x}(\theta,s)u_i[s]ds. \tag{54}$$

Определение 4.1. Для i-го игрока, $i=\overline{1,m}$, тройку $p=\left\{t, x(\theta,t), c^i\right\}$ будем называть позицией в момент t, $0\le t_0\le t\le\theta$, а $p_0=\left\{t_0, x(\theta,t_0), c^i\right\}$ – начальной позицией.

Определение 4.2. Стратегией U_i для i-го игрока, $i=\overline{1,m}$, будем называть многозначное отображение, которое каждой реализовавшейся позиции $p=\left\{t, x(\theta,t), c^i\right\}$, $t_0 \le t \le \theta$, $0 \le t_0 < \theta$, ставит в соответствие некоторое непустое множество $U_i\left(t, x(\theta,t), c^i\right) \div u_i\left(t, x(\theta,t), c^i\right) \subset U_i$ [1, с. 61].

Множества U_i предполагаются выпуклыми замкнутыми и полунепрерывными сверху по включению при изменении позиции. Такие стратегии и соответствующие им управления называют допустимыми. Под движением системы (50) понимают решение линейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра (54).

Будем решать задачу за k-го игрока, $k=\overline{1,m}$. Введем в рассмотрение функцию

$$\varepsilon_k(t_0, x(\theta,t_0), c^k)=\max_{\|l\|=1}[l'(c^k - x(\theta,t_0)) - \int_{t_0}^{\theta} \max_{u_k \in U_k} (l'\{\tilde{x}(\theta,s)u_k(s)\})ds - \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne k}}^{m} \int_{t_0}^{\theta} \min_{u_i \in U_i} (l'\{\tilde{x}(\theta,s)u_i(s)\})ds], \quad (55)$$

если правая часть этого равенства положительна, иначе $\varepsilon_k(t_0, x(\theta,t_0), c^k)=0$.

Аналогично предыдущему говорят, что имеет место регулярный случай, если для всех позиций $\left\{t_0, x(\theta,t_0), c^k\right\}$, $1 \le k \le m$, $0 \le t_0 < \theta$, которые могут встретиться в рассматриваемой игре и для которых максимум в правой части (55) достигается на единственном векторе $l_0^k = l_0^k(t_0, x(\theta,t_0), c^k)$. Мы рассматриваем лишь регулярный случай. Предположим, что в момент $t=t_0$ известен экстремальный вектор l_0^k, доставляющий максимум правой части (55).

Определение 4.3. Пусть вектор l_0^k в каждый момент t_0, $0 \le t_0 < \theta$, доставляет максимум правой части (55). Тогда, если позиция $p_0=\left\{t_0, x(\theta,t_0), c^k\right\}$ такова, что $\varepsilon_k(t_0, x(\theta,t_0), c^k) > 0$, то с этой позицией будем сопоставлять множество $U_k^e(t_0, x(\theta,t_0), c^k)$, $1 \le k \le m$, всех векторов $u_k^e \in U_k$, которые удовлетворяют условию $x_k^e[t_0]u^e[t_0] = \max_{u_k \in U_k} x_k^e[t_0]u_k$, где вектор-строка $x_k^e[t_0]=\left\{l_0^{k'}\tilde{x}(\theta,t_0)\right\}$. Тогда стратегии U_k^e назовем экстремальными.

Замечание. Так как согласно (17), (18) $\tilde{x}(t,s)=X(t,s)+\int_s^t X(t,\tau)R(\tau,s)d\tau$, где $R(t,s)$ – резольвента матрицы $\Phi(t,s)$, то функция $x_k^e(t)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода $x_k^e(t)=\left\{l_0^{k'}X(\theta,t)\right\}+\int_t^{\theta}\Phi'(\tau,t)x_k^e(\tau)d\tau$ [11].

Аналогично [1] можно показать, что экстремальные стратегии допустимы.

Теорема 4.1. В регулярном случае экстремальные стратегии U_k^e, $1 \le k \le m$, уравновешивают в смысле Нэша систему функционалов (53).

Доказательство. Запишем функцию

$$\varepsilon_k(t, x(\theta,t), c^k) = l_0^{k'}(c^k - x(\theta,t_0)) - \int_{t_0}^{t}\{l_0^{k'}\tilde{x}(\theta,s)\}u_k(s)ds -$$

$$-\int_t^{\theta}\max_{u_k \in P_k}\{l_0^{k'}\tilde{x}(\theta,s)\}u_k(s)ds - \int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{m}\{l_0^{k'}\tilde{x}(\theta,s)\}u_k(s)ds - \int_t^{\theta}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{m}\min_{u_i \in P_i}\{l_0^{k'}\tilde{x}(\theta,s)\}u_i(s)ds = \quad (56)$$

$$= l_0^{k'}(c^k - x(\theta,t_0)) - \int_{t_0}^{t} x_k^e(s)u_k^e(s)ds - \int_t^{\theta} x_k^e(s)u_k(s)ds - \sum_{i=1, i\ne k}^{m}\int_{t_0}^{\theta} x_k^e(s)u_i^e(s)ds.$$

Из этой формулы согласно определению 4.3 получаем, что $\varepsilon_k(\theta)=Y_k(u_1^e,...,u_m^e)$, $\varepsilon_k(t_0)=Y_k(u_1^e,...,u_{k-1}^e,u_k,u_{k+1}^e,...,u_m^e)$, т.е. $\varepsilon_k(\theta)$ – значение функционала Y_k, когда все игроки применяют свои экстремальные управления, а $\varepsilon_k(t_0)$ – значение функционала Y_k, когда k-й игрок применяет произвольное допустимое управление, а остальные игроки применяют свои экстремальные управления.

Вычисляем производную

$$\frac{d\varepsilon_k(t)}{dt}=-x_k^e(t)u_k^e(t)+x_k^e(t)u_k(t)\le 0,$$

отсюда вытекает, что при замене в (56) игроком P_k произвольного допустимого управления на экстремальное функция (56) не возрастает, следовательно, получаем, что $Y_k(u_1^e,...,u_m^e)\le Y_k(u_1^e,...,u_{k-1}^e,u_k,u_{k+1}^e,...,u_m^e)$.

Таким образом, теорема доказана.

Литература

1. Красовский, Н.Н. Игровые задачи о встрече движений / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1970. – 420 с.

2. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

3. Субботин, А.И. Оптимизация гарантии в задачах управления / А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. – М.: Наука, 1981. – 278 с.

4. Красовский, Н.Н. Управление динамической системой / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1985. – 520 с.

5. Осипов, Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196, № 4. – С. 779–782.

6. Осипов, Ю.С. Альтернатива в дифференциальной игре / Ю.С. Осипов // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197, № 5. – С. 1023–1025.

7. Субботин, А.И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью / А.И. Субботин // ДАН СССР. – 1972. – Т. 206, № 3. – С. 211–213.

8. Гороховик, В.В. О линейных дифференциальных играх нескольких лиц / В.В. Гороховик, Ф.М. Кириллова // Управляемые системы: сб. науч. тр.– Новосибирск, 1971. – Вып. 10. – С. 3–9.

9. Пасиков, В.Л. Экстремальные стратегии в игровых задачах для линейных интегро-дифференциальных систем Вольтерра, I / В.Л. Пасиков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 33–42.

10. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения. Задачи и упражнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1975. – 216 с.

11. Винокуров, В.Р. Некоторые вопросы теории устойчивости систем интегральных уравнений Вольтера, I / В.Р. Винокуров // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1969. – № 6 (85). – С. 24–34.

EXTREME STRATEGIES IN GAME-THEORY PROBLEMS FOR LINEAR INTEGRAL DIFFERENTIAL VOLTERRA SYSTEMS, II

V.L. Pasikov[1]

The problems of guidance as well as game situation of m individuals in case of composed functions balance (a distance) in terms of Nash theory are studied. To solve these problems a familiar extreme construction by an academician N.N. Krasovsky, modified for the considered situations, is used.

Keywords: game-theory problem, integral differential system, control action, game positions, program maximin, balance in terms of Nash theory.

References

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* (Motion game problems). Moscow: Nauka, 1970. 420 p. (in Russ.).

2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* (Position differential games). Moscow: Nauka, 1974. 456 p. (in Russ.).

3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiia garantii v zadachakh upravleniia* (Guarantee optimization in control problems). Moscow: Nauka, 1981. 287 p. (in Russ.).

4. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Dynamic system control). Moscow: Nauka, 1985. 518 p. (in Russ.).

5. Osipov Yu.S. *DAN SSSR.* 1971. Vol. 196, no. 4. pp. 779–782. (in Russ.).

6. Osipov Yu.S. *DAN SSSR.* 1971. Vol. 197, no. 5. pp. 1023–1025. (in Russ.).

7. Subbotin A.I. *DAN SSSR.* 1972. Vol. 206, no. 3. pp. 211–213. (in Russ.).

8. Gorokhovik V.V., Kirillova F.M. O linejnykh differencialnykh igrakh neskolkikh litc [Linear differential games of several individuals]. *Upravlyaemye sistemy: sb. nauch. tr.* [Controllable systems: Proceedings]. Novosibirsk, 1971. Issue 10. pp. 3–9. (in Russ.).

9. Pasikov V.L. Ekstremalnye strategii v igrovykh zadachakh dlya linejnykh integro-differencialnykh sistem Volterra, I [Extreme strategies in game-theory problems for linear integral differential Volterra systems, I]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Matematika. Mekhanika. Fizika».* 2012. Issue 6. no. 11(270). pp. 33–42. (in Russ.).

10. Krasnov M.L., Kiselev A.I., Makarenko G.I. *Integral'nye uravneniia. Zadachi i uprazhneniya* (Integral equations. Tasks and exercises). Moscow: Nauka, 1976. 216 p. (in Russ.).

11. Vinokurov V.R. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Matematika.* 1969. no. 6(85). pp. 24–34. (in Russ.).

Поступила в редакцию 15 апреля 2012 г.

[1] Pasikov Vladimir Leonidovich is Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mathematical Analysis and Information Service, Orsk Humanist and Technological Institute (Branch of Orenburg State University).
E-mail: pasikov_fmf@mail.ru