УДК 517.544.8

ОДИН ИЗ СЛУЧАЕВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРКУШЕВИЧА В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

А.А. Патрушев[1], *Е.В. Патрушева*[2]

Предложен метод явного решения краевой задачи Маркушевича в классе кусочно-аналитических функций. Краевое условие задано на единичной окружности. Получено решение в замкнутой форме при некотором ограничении, наложенном на коэффициент *b*(*t*) задачи.

Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, краевая задача Римана, краевая задача Гильберта, краевая задача Маркушевича.

В предложенной работе получил дальнейшее развитие метод нахождения решения задачи Маркушевича в явном виде, разработанный в статье [1]. Этот метод отличается от рассмотренного в статьях [2–4], что обусловлено различными постановками задачи.

Рассмотрим трехэлементную задачу Маркушевича

$$\psi_+(t)=a(t)\psi_-(t)+b(t)\overline{\psi_+(t)}+f(t) \tag{1}$$

на единичной окружности L. Здесь $a(t),b(t),f(t)\in H(L)$ – гельдеровские функции, $a(t)\neq 0$, $t\in L$. Пусть $\kappa=Ind_L a(t)$, $a(t)=a_+(t)t^\kappa a_-(t)$ – факторизация коэффициента $a(t)$ по формулам Гахова. Перепишем краевое условие (1) в виде

$$\phi_+(t)=t^\kappa\phi_-(t)+b_1(t)\overline{\phi_+(t)}+f_0(t), \tag{2}$$

где $\phi_\pm(t)=\dfrac{\psi_\pm(t)}{a_\pm(t)}$, $b_1(t)=b(t)\dfrac{\overline{a_+(t)}}{a_+(t)}$, $f_0(t)=\dfrac{f(t)}{a_+(t)}$.

Наложим следующие ограничения на коэффициент $b_1(t)$ задачи (2):

а) $b_1(t)+1\neq 0, t\in L$;

б) $b_1(t)+1$ является краевым значением аналитической и отличной от нуля всюду в области D_- функции, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой она имеет конечный порядок κ_1.

Тогда краевое условие (2) можно записать следующим образом:

$$\phi_+(t)=\frac{t^\kappa}{b_1(t)+1}\phi_-(t)+\frac{2b_1(t)}{b_1(t)+1}\mathrm{Re}\phi_+(t)+f_1(t), \tag{3}$$

где $f_1(t)=\dfrac{f(t)}{a_+(t)(b_1(t)+1)}$.

Рассмотрим соотношение (3) как неоднородную задачу Римана, считая $\mathrm{Re}\phi_+(t)$ известной. Пусть $\kappa_0=Ind_L\dfrac{t^\kappa}{b_1(t)+1}=\kappa-\kappa_1$, $\kappa_1=Ind_L(b_1(t)+1)$.

Если $\kappa_0\geq 0$, то общее решение задачи (3) будет иметь вид [5]

$$\phi(z)=\chi(z)[F(z)+P_{\kappa_0-1}(z)]. \tag{4}$$

Здесь $F(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\left[\frac{2b_1(\tau)\mathrm{Re}\phi_+(\tau)}{(b_1(\tau)+1)}+f_1(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}$, $P_{\kappa_0-1}(z)$ – произвольный многочлен степени не выше κ_0-1,

[1] Патрушев Алексей Алексеевич – доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет
E-mail patraleksej@yandex.ru
[2] Патрушева Елена Васильевна – доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет

$$\chi(z)=\begin{cases}1,\ z\in D_+,\\ \dfrac{b_1(z)+1}{z^{\kappa}},z\in D_-\end{cases}$$

– каноническая функция.

Если $\kappa_0<0$, то условия разрешимости задачи Римана запишутся следующим образом:

$$\int_L\left[\frac{2b_1(\tau)\operatorname{Re}\phi_+(\tau)}{(b_1(\tau)+1)}\right]\tau^{k-1}d\tau-\int_L f_1(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0,\ k=1,\cdots,-\kappa_0. \tag{5}$$

Сравним на контуре L краевое значение функции $\phi_+(z)$, аналитической в области D_+, решения задачи Римана (3), с краевым значением $\phi_+(z)$, которое является решением задачи Шварца для этой области. Приходим к вырожденному сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\dfrac{2\operatorname{Re}\phi_+(t)}{b_1(t)+1}-f_1(t)$:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\operatorname{Re}\phi_+(t)}{(b_1(t)+1)}-f_1(t)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{2\operatorname{Re}\phi_+(\tau)}{(b_1(\tau)+1)}-f_1(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-t}=d+P_{\kappa_0-1}(t)\,. \tag{6}$$

Здесь $d=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\operatorname{Re}\phi_+(\tau)}{\tau}d\tau-c_0$, где c_0 – произвольная мнимая постоянная.

Постоянная d должна удовлетворять условию

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{2\operatorname{Re}\phi_+(\tau)}{b_1(\tau)+1}-f_1(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau}=d+a_0,$$

где $a_0=P_{\kappa_0-1}(0)$ – произвольная постоянная. Если $\kappa_0\le 0$, то $a_0=0$.

Решение сингулярного интегрального уравнения (6) запишется в виде [6]

$$\frac{2\operatorname{Re}\phi_+(t)}{b_1(t)+1}-f_1(t)=d+P_{\kappa_0-1}(t)-\varphi_1^-(t),$$

где $\varphi_1^-(t)$ – произвольная аналитическая в области D_- функция, исчезающая на бесконечности.

Тогда

$$\operatorname{Re}\phi_+(t)=\frac{1}{2}(b_1(t)+1)[d+P_{\kappa_0-1}(t)-\varphi_1^-(t)]+\frac{f(t)}{2a_+(t)} \tag{7}$$

так как $f_1(t)=\dfrac{f(t)}{a_+(t)(b_1(t)+1)}$. Учитывая, что правая часть соотношения (7) – функция действительнозначная, приходим к неоднородной задаче Гильберта

$$\operatorname{Re}[-i(b_1(t)+1)\varphi_1^-(t)]=\operatorname{Im}\left\{(b_1(t)+1)[d+P_{\kappa_0-1}(t)]+\frac{f(t)}{a_+(t)}\right\}, \tag{8}$$

в классе функций, исчезающих на бесконечности.

Общее решение задачи (8) задается формулой [7]

$$-i\varphi_1^-(z)=\frac{1}{b_1(z)+1}\left[F_0(z)+F_1(z)+Q_{\kappa_1-1}(z)+\overline{Q_{\kappa_1-1}(z^*)}\right]. \tag{9}$$

Здесь $F_0(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_l\frac{c(\tau)(\tau+z)}{(\tau-z)\tau}d\tau$, $F_1(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_l\operatorname{Im}\left\{\frac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\frac{\tau+z}{(\tau-z)\tau}d\tau$, $Q_{\kappa_1-1}(z)$ – произвольный многочлен степени κ_1-1, $c(t)=\operatorname{Im}\{(b_1(t)+1)[d+P_{\kappa_0-1}(t)]\}$.

Если $\kappa_1\le 0$, то полагаем $Q_{\kappa_1-1}(z)\equiv 0$. Тогда функция

$$\frac{1}{2\pi i(b_1(z)+1)}\left[\int_l\frac{c(\tau)(\tau+z)}{(\tau-z)\tau}d\tau+\int_L\operatorname{Im}\left\{\frac{f(t)}{a_+(t)}\right\}\frac{\tau+z}{(\tau-z)\tau}d\tau\right] \tag{10}$$

будет исчезающим на бесконечности решением задачи (8) тогда и только тогда, когда выполняются условия разрешимости

$$\int_L \frac{c(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau = \alpha_k, \ \alpha_k = -\int_L \mathrm{Im}\left\{\frac{f(t)}{a_+(t)}\right\} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}}, \ k = 0, \cdots, -\kappa_1. \tag{11}$$

На основании формул (7), (9) мы можем теперь выписать в явном виде выражение для $\mathrm{Re}\phi_+(t)$, а также общее решение $\phi(z)$ задачи Римана (3). Тогда общее решение неоднородной задачи Маркушевича для единичной окружности определится формулой

$$\psi(z) = \begin{cases} a_+(z)\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + G(z) + P_{\kappa_0 - 1}(z)\right], \ z \in D_+, \\ \dfrac{a_-(z)(b_1(z)+1)}{z^\kappa}\left[\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + G(z) + P_{\kappa_0 - 1}(z)\right], \ z \in D_-. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $g(t) = b_1(t)\left[d + P_{\kappa_0 - 1}(t)\right] - \dfrac{ib_1(t)}{b_1(t)+1}\left[F_0^-(t) + Q_{\kappa_1 - 1}(t) + \overline{Q_{\kappa_1 - 1}(t)}\right]$, $G(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \frac{g_1(\tau)}{\tau - z} d\tau$,

$g_1(t) = \dfrac{b_1(t)}{b_1(t)+1}\left[\dfrac{f(t)}{a_+(t)} - iF_1^-(t)\right]$.

Если $f(t) \equiv 0$, то мы имеем однородную задачу Маркушевича. В этом случае $G(z) \equiv 0$.

В итоге были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты однородной задачи Маркушевича (1) ($f(t) \equiv 0$) $a(t)$, $b(t) \in H(L)$, $a(t) \neq 0$, $t \in L$, $\kappa = Ind_L a(t)$, а также функция $b_1(t)+1$ является краевым значением на контуре L, аналитической и отличной от нуля всюду в области $D_- \cup L$, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, в которой она может иметь конечный порядок κ_1, $\kappa_0 = \kappa - \kappa_1$.*

Тогда однородная задача (1) ($f(t) \equiv 0$) в классе кусочно-аналитических функций, исчезающих на бесконечности,

1) при $\kappa_1 > 0$, $\kappa_0 \geq 0$ имеет общее решение, определяемое формулой (12) ($G(z) \equiv 0$), которое линейно зависит от $2\kappa_0 + 2\kappa_1 = 2\kappa$ произвольных вещественных постоянных;

2) при $\kappa_1 > 0$, $\kappa_0 < 0$ общее решение задается формулой (12) ($G(z) \equiv 0$), ($P_{\kappa_0 - 1}(z) \equiv 0$), которое содержит $2\kappa_1 - r_1$ произвольных вещественных постоянных, r_1 – ранг матрицы коэффициентов однородной системы (5) (если $r_1 = 2\kappa_1$, то задача имеет только тривиальное решение);

3) *при $\kappa_1 \leq 0$, $\kappa_0 \geq 0$ имеет общее решение, определяемое формулой* (12) ($G(z) \equiv 0$, $Q_{\kappa_1 - 1}(z) \equiv 0$), *которое содержит $2\kappa_0 - r$ произвольных вещественных постоянных, r* – ранг *матрицы коэффициентов однородной системы (11) (если $r = 2\kappa_0$, то задача, отличного от тривиального, решения не имеет);*

4) *при $\kappa_1 \leq 0$, $\kappa_0 < 0$, если функция $b_1(t)+1$ удовлетворяет условиям* (11) ($f(t) \equiv 0$) и *условиям (5) ($f(t) \equiv 0$), имеет одномерное пространство решений, определяемое формулой (12) ($G(z) \equiv 0$, $Q_{\kappa_1 - 1}(z) \equiv 0$, $P_{\kappa_0 - 1}(z) \equiv 0$); в противном случае имеет только тривиальное решение.*

Теорема 2. *Пусть коэффициенты неоднородной задачи Маркушевича $a(t), b(t) \in H(L)$, функция $f(t) \in H(L)$, $a(t) \neq 0$, $t \in L$, а также функция $b_1(t)+1$ является краевым значением на контуре L функции, аналитической и отличной от нуля всюду в области $D_- \cup L$, за исключением бесконечно удаленной точки, в которой она имеет конечный порядок.*

Тогда неоднородная задача в классе кусочно-аналитических функций, исчезающих на бесконечности:

1) при $\kappa_1 > 0$, $\kappa_0 \geq 0$ имеет общее решение, определяемое формулой (12), которое линейно зависит от 2κ произвольных вещественных постоянных;

2) при $\kappa_1 > 0$, $\kappa_0 < 0$ общее решение задается формулой (12) $(P_{\kappa_0 - 1}(z) \equiv 0)$, если выполняются $-\kappa_0 - r_1$ условий разрешимости, выписанных явно (r_1 – ранг матрицы коэффициентов системы (5)),которое содержит $2\kappa_1 - 2r_1$ произвольных вещественных постоянных (если $r_1 = \kappa_1$, решение будет единственным);

3) при $\kappa_1 \le 0$, $\kappa_0 \ge 0$ имеет общее решение, определяемое формулой (12) $(Q_{\kappa_1 - 1}(z) \equiv 0)$, если выполняются $-\kappa_1 + 1 - r$ условий разрешимости, выписанных явно (r – ранг матрицы коэффициентов системы (11)), которое линейно зависит от $2\kappa_0 - 2r$ произвольных вещественных постоянных (при $r = \kappa_0$ решение будет единственным);

4) при $\kappa_1 \le 0, \kappa_0 < 0$ имеет единственное решение, определяемое формулой (12) $(Q_{\kappa_1 - 1}(z) \equiv 0, P_{\kappa_0 - 1}(z) \equiv 0)$, тогда и только тогда, когда выполняются $-\kappa_1 + 1$ условий разрешимости (11) и $-\kappa_0$ условий разрешимости (5).

Пример к теореме 1. Рассмотрим трехэлементную задачу Маркушевича на единичной окружности L:

$$\psi_+(t) = (2t+1)^2 \psi_-(t) + (3t+1)\overline{\psi_+(t)},\ t \in L. \tag{13}$$

Решение ищем в классе кусочно-аналитических функций, исчезающих на бесконечности.

Запишем краевое условие (13) в виде

$$\psi_+(t) = \frac{(2t+1)^2}{3t+2}\psi_-(t) + \frac{2(3t+1)}{3t+2}\mathrm{Re}\,\psi_+(t). \tag{14}$$

В нашем случае $\kappa = Ind_L(2t+1)^2 = 2$, $\kappa_1 = Ind_L(3t+2) = 1$, $\kappa_0 = Ind_L \dfrac{(2t+1)^2}{3t+2} = 1$. Очевидно, функция $\dfrac{(2t+1)^2}{3t+2}$ является краевым значением функции на контуре L, мероморфной в области D_-. Следовательно, на основании формул Сохоцкого, на контуре L имеем:

$$\psi_+(t) = \frac{3t+1}{3t+2}\mathrm{Re}\,\psi_+(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{(3\tau+1)\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{(3\tau+2)(\tau-t)} + \alpha, \tag{15}$$

где α – произвольное комплексное число.

С другой стороны,

$$\psi_+(t) = \mathrm{Re}\,\psi_+(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{\tau} + c_0, \tag{16}$$

c_0 – произвольная мнимая постоянная. На основании соотношений (15), (16) приходим к вырожденному сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(t)}{3t+2} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{(3\tau+2)(\tau-t)} = 2d,\ d = \frac{1}{2}\left[\alpha + c_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{\tau}\right]. \tag{17}$$

Решением уравнения (17) является функция

$$\mathrm{Re}\,\psi_+(t) = (3t+2)(d - \varphi^-(t)), \tag{18}$$

где $\varphi^-(z)$ – произвольная аналитическая в области D_- функция, исчезающая на бесконечности. Так как левая часть выражения (18) – функция действительнозначная, то приходим к однородной задаче Гильберта:

$$\mathrm{Im}\left[(3t+2)\Psi^-(t)\right] = 0, \tag{19}$$

где $\Psi^-(t) = d - \varphi^-(t)$ – краевое значение функции, аналитической в области D_-, $\Psi^-(\infty) = d$. Запишем краевое условие (19) иначе:

$$(3t+2)\Psi^-(t) - (\frac{3}{t} + 2)\overline{\Psi^-(t)} = 0,$$

или

$$\Psi_1^+(t)=\frac{(3t+2)t}{3+2t}\Psi_1^-(t),\ \Psi_1(z)=\begin{cases}\overline{\Psi^-(z^*)},\ |z|<1,\\ \Psi^-(z),\ |z|>1.\end{cases} \quad (20)$$

Функция

$$\chi_1(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{3+2z},\ |z|<1,\\ \dfrac{1}{3z+2},\ |z|>1,\end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет условию симметрии $\overline{\chi_1(z^*)}=\chi_1(z)$ и является канонической симметричной функцией задачи (20). Следовательно, имеем:

$$\Psi^-(z)=\frac{1}{3z+2}(2\alpha_0+\alpha_1(z+z^{-1})+\alpha_2 i(z-z^{-1})),$$

где $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2\in R$.

Тогда на основании соотношения (18)

$$\mathrm{Re}\,\psi_+(t)=2\alpha_0+\alpha_1(t+t^{-1})+\alpha_2 i(t-t^{-1}).$$

Заметим здесь, что, так как $\Psi^-(\infty)=\dfrac{\alpha_1+i\alpha_2}{3}$, то $\dfrac{\alpha_1+i\alpha_2}{3}=\dfrac{1}{2}(\alpha+c_0+2\alpha_0)$, где

$$2\alpha_0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(2\alpha_0+\alpha_1(\tau+\tau^{-1})+\alpha_2 i(\tau-\tau^{-1}))d\tau}{\tau}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{Re}\,\psi_+(\tau)d\tau}{\tau}.$$

Откуда решением однородной задачи Маркушевича (13) является функция

$$\psi(z)=\begin{cases}2\alpha_0+2(\alpha_1+i\alpha_2)z-c_0,\ |z|<1,\\ \dfrac{3z+2}{(2z+1)^2}\left(\dfrac{4\alpha_0}{3z+2}-\dfrac{11(\alpha_1+i\alpha_2)}{3z+2}-\right.\\ \left.-\dfrac{\alpha_1-i\alpha_2}{z}+\dfrac{2(\alpha_1+i\alpha_2)}{3}-c_0-2\alpha_0\right),\ |z|>1.\end{cases},$$

где $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,ic_0\in R$.

Литература

1. Патрушев, А.А. Задача Маркушевича в классе автоморфных функциий в случае произвольной окружности / А.А. Патрушев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 4. – № 10(227). – С. 29–37.

2. Патрушев, А.А. Алгоритм точного решения четырехлементной задачи линейного сопряжения с рациональными коэффициентами и его программная реализация / А.А. Патрушев, В.М. Адуков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2010. – Вып. 6. – № 35(211). – С. 4–12.

3. Патрушев, А.А. Четырехлементная задача Маркушевича на единичной окружности / А.А. Патрушев // Известия Смоленского государственного университета. – 2010. – № 4. – С. 82–97.

4. Патрушев, А.А. О точном и явном решении трехэлементной задачи Маркушевича / А.А. Патрушев, В.М. Адуков // Известия Саратовского государственного университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011.– Т. 11. – Вып. 2. – С. 4–12.

5. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

6. Гахов, Ф.Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши / Ф.Д. Гахов // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 533–544.

7. Чибрикова, Л.И. Основные граничные задачи для аналитических функций / Л.И. Чибрикова. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 301 с.

A VARIANT OF THE SOLUTION OF MARKUSHEVICH BOUNDARY PROBLEM

***A.A. Patrushev*[1], *E.V. Patrusheva*[2]**

In the article an explicit method for the solution of Markushevich boundary value problem in the class of piecewise analytic functions is suggested. Boundary condition of the problem is given on the unit circle. The problem is found in a closed form under additional restriction on the coefficient $b(t)$ of the problem.

Keywords: boundary problems for analytic functions, Riemann boundary problem, Hilbert boundary problem, Markushevich boundary problem.

References

1. Patrushev A.A. Zadacha Markushevicha v klasse avtomorfnykh funkciij v sluchae proizvolnoj okruzhnosti [The Markushevich problem in the class of automorphic functions for arbitrary circle]. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematika. Mexanika. Fizika".* 2011. Issue 4. no. 10(227). pp. 29–37. (in Russ.).

2. Adukov V.M., Patrushev A.A. Algoritm tochnogo resheniya chetyrekhlementnoj zadachi linejnogo sopryazheniya s racionalnymi koefficientami i ego programmnaya realizaciya [Algorithm of exact solution of generalized four-element Riemann–Hilbert boundary problem with rational coefficients and its programm realization]. *Vestnik YuUrGU. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie".* 2010. Issue 6. no. 35(211). pp. 4–12. (in Russ.).

3. Patrushev A.A. *Izvestiya Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta.* 2010. no. 4. pp. 82–98. (in Russ.).

4. Adukov V.M., Patrushev A.A. *Izvestiya Saratovskogo gosudarstvennogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika.* 2011. Vol. 11. Issue 2. pp. 4–12. (in Russ.).

5. Gaxov F.D. *Kraevye zadachi* (Boundary problems). Moscow: Fizmatgiz, 1963. 640 p. (in Russ.).

6. Gaxov F.D. *Differencialnye uravneniya.* 1966. Vol. 2, no. 2. pp. 533–544.

7. Chibrikova L.I. *Osnovnye granichnye zadachi dlya analiticheskikh funkcij* [Basic boundary problems for analytic functions]. Kazan: Izdatelstvo Kazanskogo universiteta, 1977. 301 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 18 декабря 2012 г.

[1] Patrushev Alexey Alexeevich is Associate Professor, Department of General Mathematics, South Ural State University.
E-mail: patraleksej@yandex.ru

[2] Patrusheva Elena Vasilievna is Associate Professor, Applied Mathematics Department, South Ural State University.