УДК 517.9

КВАЗИСОБОЛЕВЫ ПРОСТРАНСТВА ℓ_p^m

Д.К. Аль-Делфи[1]

Впервые рассмотрены понятия квазибанаховых пространств последовательностей ℓ_p^m, $m\in R$, $p\in(0,+\infty)$. Доказаны аналоги теоремы вложения Соболева. Также рассмотрен квазиоператор Лапласа.

Ключевые слова: квазинормы, квазибанахово пространство, квазисоболевы пространства, квазиоператор Лапласа, квазиоператор Грина.

Введение

Пусть $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞. К настоящему времени хорошо изучены функциональные пространства Соболева $W_p^m(\Omega)$, $m\in\{0\}\cup N$, $p\in[1,+\infty)$; где $W_p^m(\Omega)=L_2(\Omega)$ – пространства Лебега [1]. Также хорошо известна [1] теорема вложения Соболева: при всех $m\in N$, $\ell=0,1,\dots,m-1$, $p,q\in[1,+\infty)$ таких, что $\frac{1}{p}+\frac{m-\ell}{n}\le\frac{1}{q}<1$, имеют место плотные и непрерывные вложения

$$W_p^m(\Omega)\subset W_q^\ell(\Omega) \qquad (1)$$

Нашей задачей является распространение данного результата на квазисоболевы пространства последовательностей

$$\ell_p^m=\left\{x=\{x_k\}:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^{\frac{m}{2}}\,|\,x_k\,|\right)^p<+\infty\right\},$$

где $p\in(0,+\infty)$, $m\in R$, $\{\lambda_k\}$ – монотонно неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=+\infty$. Статья содержит три части, в первой приводятся основные факты теории квазибанаховых пространств, почерпнутые из [2], а во второй излагаются аналоги теоремы вложения Соболева. В заключение вводится в рассмотрение квазиоператор Лапласа.

1. Квазисоболевы пространства.

Пусть $\wp$ – линейное вещественное (простоты ради) пространство. Квазинормированным пространством называется упорядоченная пара $(\wp,{}_p\|\cdot\|)$, где квазинорма ${}_p\|\cdot\|:\wp\to R$ удовлетворяет следующим аксиомам:

(i) $\forall x\in\wp$ ${}_p\|x\|\ge0$, причем ${}_p\|x\|=0$ точно тогда, когда $x=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нуль пространства $\wp$;

(ii) $\forall x\in\wp$ $\forall\alpha\in R$ ${}_p\|\alpha x\|=|\,\alpha\,|\,{}_p\|x\|$;

(iii) $\forall x,y\in\wp$ ${}_p\|x+y\|\le\mathrm{const}\left({}_p\|x\|+{}_p\|y\|\right)$, где константа $\mathrm{const}\ge1$ и не зависит ни от x, ни от y.

В дальнейшем квазинормированное пространство $(\wp,{}_p\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линейным пространством $\wp$. Последовательность $\{x_k\}\subset\wp$ называется сходящейся к $x\in\wp$, если

[1] Джавад К Аль-Делфи – аспирант кафедры уравнений математической физики, механико-математический факультет, Южно-Уральский государственный университет, Al-Mustansiriyah University, Багдад, Ирак
E-mail rassian71@mail ru

$\lim\limits_{k\to\infty} {}_p\|x_k - x\| = 0$. Этот факт будем записывать так: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Последовательность называется фундаментальной, если $\lim\limits_{k,r\to\infty} (x_k - x_r) = 0$.

Пространство $\wp$ называется квазибанаховым, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится к некоторой точке этого пространства. Отметим сразу, что любое банахово пространство является квазибанаховым, а обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 1. Пространства ℓ_p^m – квазибанаховы при всех $p\in(0,+\infty)$, однако они банаховы только при $p\in[1,+\infty)$.

Теорема 1. Квазисоболевы пространства ℓ_p^m, $m\in R$, $p\in R_+$, являются квазибанаховыми.

Приведем набросок доказательства. На, очевидно, линейном пространстве ℓ_p^m построим функцию ${}_p^m\|\cdot\| : \ell_p^m \to R$ по формуле

$$ {}_p^m\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} \mid x_k \mid \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} $$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет аксиомам (i) и (ii) квазинормы. Рассмотрим вектор $y = \left\{ \lambda_k^{\frac{m}{2}} x_k \right\} \in \ell_p$, поэтому ${}_p^m\|\cdot\|$ удовлетворяет и аксиоме (iii), причем $\mathrm{const} = 2^{1/p}$ при $p\in(0,1)$, и $\mathrm{const} = 1$ при $p\in[1,+\infty)$ [2].

Рассмотрим фундаментальную в ℓ_p^m последовательность $\{x_\ell\}$. Ее координатные последовательности $\{x_\ell^k\}_{k=1}^{\infty}$, $k\in N$, фундаментальны и в силу полноты R сходятся к x^k. Полученный предел $x = \{x^k\}$ и будет искомым [2].

2. Теоремы вложения.

Пусть U и F – два квазибанаховых пространства. Будем говорить, что

- U вложено в F, если U подмножество F, то есть $U \subseteq F$;
- U плотно вложено в F, если вдобавок замыкание $\overline{U} = F$;
- U плотно и непрерывно вложено в F, если вдобавок для всех $u\in U$ ${}_p\|u\|_U \ge C\ {}_p\|u\|_F$, где $C\in R_+$ – некоторая константа не зависящая от u.

Теорема 2. При всех $p\in R_+$, $m\in R$, $\ell \le m$, имеют место плотные и непрерывные вложения ℓ_p^m в ℓ_p^ℓ.

Доказательство. Вложение $\ell_p^m \subset \ell_p^\ell$ очевидно. Докажем плотность вложения. Пусть $x\in \ell_p^\ell$, рассмотрим последовательность $\{x_k\}$, где $x_1 = (x^1, 0, \ldots)$, $x_2 = (x^1, x^2, 0, \ldots)$, … $x_k = (x^1, x^2, \ldots, x^k, 0, \ldots)$, … Очевидно, $\{x_k\} \in \ell_p^\ell$, причем $x_k \to x$ в квазинорме ℓ_p^ℓ. Непрерывность вложения тоже очевидна.

3. Квазиоператор Лапласа.

Пусть U и F – квазибанаховы пространства, линейный оператор $L: U \to F$ назовем непрерывным, если его область определения $dom\, L = U$ и ${}_p\|u\|_U \ge C\ {}_p\|Lu\|_F$ при всех $u\in U$, а $C\in R_+$ – константа, не зависящая от u. Линейный оператор $L \in \mathbf{L}(U;F)$ назовем топлинейным изоморфизмом, если существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathbf{L}(F;U)$.

Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа $\Lambda x = \{\lambda_k x_k\}$, где $x \in \ell_p^m$.

Теорема 3. При всех $p \in R_+$ и $m \in R$ квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ – топлинейный изоморфизм.

Доказательство. Непрерывность оператора Λ очевидна в силу

$$ {}^m_p\|\Lambda x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}+1} | x_k | \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = {}^{m+2}_{p}\|x\|. $$

Построим обратный оператор $\Lambda^{-1}x = \{\lambda_k^{-1}x_k\}$ (квазиоператор Грина). Очевидно, $\Lambda^{-1}\Lambda x = x$ при всех $x \in \ell_p^{m+2}$ и $\Lambda\Lambda^{-1}x = x$ при всех $x \in \ell_p^m$. Далее,

$$ {}^{m+2}_{p}\|\Lambda x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m+2}{2}-1} | x_k | \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = {}^m_p\|x\|. $$

Замечание. Обобщение всех приведенных выше результатов на случай комплексных квазисоболевых пространств ℓ_p^m очевидно.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность профессору Г.А. Свиридюку за постановку задачи и проявленный интерес к работе.

Литература

1. Трибель, Х. Теория интерполяций, функциональные пространства , дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М: Мир, 1980. – 664 с.

2. Al-Delfi, J.K. Quasi-Banach space for the sequence space ℓ_p, where $0 < p < 1$ / J.K. Al-Delfi // Journal of college of Education (Iraq – Baghdad). Mathematics. – 2007. – № 3. – P. 285–295.

Поступила в редакцию 28 февраля 2013 г.

QUASI-SOBOLEV SPACES ℓ_p^m

***Jawad K. Al-Delfi*[1]**

Firstly, the notion of quasi-Banach spaces for the sequence spaces ℓ_p^m, $m \in R$, $p \in (0,+\infty)$ has been considered and we have been proved analogs of the Sobolev embedding theorem. Also, the notion quasi-operator Laplace has been considered.

Keywords: quasi-norm, Quasi-Banach space, Quasi-Sobolev spaces, Laplace' Quasi-operator, Green' Quasi-operator.

Reference

1. Triebel H. *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Moscow: Mir, 1980. 664 p. (in Russ).

2. Al-Delfi J.K. Quasi-Banach space for the sequence space ℓ_p, where $0 < p < 1$. *Journal of college of Education (Iraq – Baghdad). Mathematics.* 2007. no. 3. pp. 285–295.

[1] Jawad K Al-Delfi is Post-graduate student, Equations of Mathematical Physics Department, South Ural State University, Al-Mustansiriyah University, Baghdad Iraq

E-mail rassian71@mail ru