Математика

УДК 517.53

О ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА–ХОПФА ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОММУТАТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

В.М. Адуков[1]

Для функционально-коммутативных матриц-функций специального вида предложен алгоритм явного решения задачи факторизации Винера–Хопфа. Используются элементарные факты теории представлений конечных групп. Симметрия факторизуемой матрицы-функции позволяет диагонализовать ее с помощью постоянного линейного преобразования. Тем самым задача приводится к скалярному случаю.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа, частные индексы, конечные группы.

1. Введение

Пусть Γ – замкнутый гладкий жорданов контур, ограничивающий область D_+. Дополнение $D_+ \cup \Gamma$ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначим D_-, считаем, что $0 \in D_+$. Пусть $A(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция порядка s. *Правой факторизацией Винера–Хопфа* $A(t)$ называется ее представление в виде

$$A(t) = A_-(t)d(t)A_+(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Здесь $A_\pm(t)$ – непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимые в $D_\pm$ и обратимые там, а $d(t) = \operatorname{diag}[t^{\rho_1},\ldots,t^{\rho_s}]$, где $\rho_1,\ldots,\rho_s$ – целые числа, которые называются *правыми частными индексами* $A(t)$. Можно считать, что $\rho_1 \le \ldots \le \rho_s$. Частные индексы – важные целочисленные инварианты матрицы-функции $A(t)$. В скалярном случае ($s = 1$) задача факторизации может быть решена явно [1].

Задача факторизации Винера–Хопфа (краевая задача Римана) – одна из самых востребованных задач комплексного анализа. Она находит многочисленные приложения в топологии, теории операторов, теории аппроксимаций Паде, дифференциальных уравнениях, механике сплошной среды.

Особенно важна для приложений матричная краевая задача Римана, однако именно в этом случае имеются значительные трудности. Вызваны они отсутствием для матриц-функций общего вида явных формул для факторизационных множителей и частных индексов. Поэтому в настоящее время главной проблемой в теории факторизации является проблема отыскания классов матриц-функций, для которых задача может быть решена явно.

Один из таких классов был рассмотрен в работах [2–5]. Он состоит из достаточно часто встречающихся в приложениях мероморфных матриц-функций. Для данных матриц-функций один из факторизационных множителей является рациональным, то есть определяется конечным числом параметров. Это позволило получить явное решение задачи для мероморфных либо кусочно-мероморфных матриц-функций средствами линейной алгебры.

Если матрица-функция обладает определенной симметрией (например, является циркулянтной матрицей-функцией), то естественно ожидать, что использование теоретико-групповых методов позволит понизить размерность s задачи. В этой работе мы рассмотрим только случай, когда $A(t)$ можно рассматривать как функцию на контуре Γ со значениями в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ конечной абелевой группы или в центре $Z(\mathbb{C}[G])$ групповой алгебры конечной неабелевой группы G. Симметрия данной задачи факторизации такова, что она может быть сведена к одномерному случаю.

[1] Адуков Виктор Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, кафедра математического анализа, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: victor.m.adukov@gmail.com

Поскольку значения $A(t)$ лежат в коммутативной матричной алгебре, то $A(t)$ является функционально-коммутативной матрицей. Это – первый класс матриц-функций, для которого краевую задачу Римана удалось решить в явной форме [6]. Для рассматриваемого в работе специального класса функционально-коммутативных матриц-функций предлагаемое решение задачи факторизации значительно проще – оно требует только знания характеров неприводимых комплексных представлений группы.

2. Основные результаты

1. Пусть G – конечная группа порядка $|G| = n$, e – единица G, $\mathbb{C}[G]$ – групповая алгебра, то есть линейное пространство формальных линейных комбинаций $\sum_{g\in G} a(g)g$ элементов группы G с коэффициентами $a(g)$ из $\mathbb{C}$. Группа G вкладывается в $\mathbb{C}[G]$ отождествлением элемента g с линейной комбинацией $1\cdot g$. Тогда G – базис линейного пространства $\mathbb{C}[G]$. Групповая операция на G задает умножение базисных элементов, тем самым на $\mathbb{C}[G]$ определяется структура алгебры над полем $\mathbb{C}$. Можно также рассматривать $\mathbb{C}[G]$ как алгебру функций $a(g)$ со сверткой в качестве умножения.

Пусть $K_1 = \{e\}, K_2, \ldots, K_s$ – сопряженные классы G, $h_j = |K_j|$ – порядок сопряженного класса K_j, $g_1, \ldots, g_s$ – произвольные фиксированные представители сопряженных классов. Центр $Z(\mathbb{C}[G])$ групповой алгебры состоит из центральных функций на G, то есть функций $a(g)$, постоянных на сопряженных классах.

Элементы $C_j = \sum_{g\in K_j} g$, $j = 1, \ldots, s$ образуют базис коммутативной алгебры $Z(\mathbb{C}[G])$. Поэтому

$$C_i C_j = \sum_{k=1}^{s} c_{ij}^k C_k,$$

где c_{ij}^k – структурные константы алгебры $Z(\mathbb{C}[G])$.

Пусть A – оператор умножения на элемент $a = \sum_{i=1}^{s} a_i C_i \in Z(\mathbb{C}[G])$, $a_i = a(g_i)$, действующий в линейном пространстве $Z(\mathbb{C}[G])$. Найдем его матрицу A в базисе $C_1, \ldots, C_s$. Так как

$$aC_j = \sum_{i=1}^{s} a_i C_i C_j = \sum_{i,k=1}^{s} a_i c_{ij}^k C_k,$$

то элемент A_{kj} матрицы A оператора находится по формуле $A_{kj} = \sum_{i=1}^{s} a_i c_{ij}^k$ и потому

$$A = \left(\sum_{i=1}^{s} a_i c_{ij}^k \right)_{k,j=1}^{s}. \tag{2}$$

В частности, если группа G – абелева, то $s = n$, $Z(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{C}[G]$, и матрица оператора A умножения на $a = \sum_{g\in G} a(g)g \in \mathbb{C}[G]$ в базисе $\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a(g_1) & a(g_1 g_2^{-1}) & \cdots & a(g_1 g_n^{-1}) \\ a(g_2) & a(g_2 g_2^{-1}) & \cdots & a(g_2 g_n^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(g_n) & a(g_n g_2^{-1}) & \cdots & a(g_n g_n^{-1}) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Эта матрица получена из первого столбца с помощью группы перестановок, изоморфной G.

Например, если G есть циклическая группа порядка n с образующей a, то, выбрав базис $\{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$, получим циркулянтную матрицу.

Групповую алгебру $\mathbb{C}[G]$ (алгебру $Z(\mathbb{C}[G])$) мы можем отождествить с алгеброй матриц вида (3) (вида (2)). Эти матричные представления алгебр $\mathbb{C}[G]$, $Z(\mathbb{C}[G])$ соответствуют регулярному представлению группы G.

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная алгебра с единицей I над полем $\mathbb{C}$. Тензорное произведение $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}[G]$ мы отождествляем с алгеброй матриц вида (3) с элементами $a(g_k) \in \mathfrak{A}$. Соответственно, $\mathfrak{A} \otimes Z(\mathbb{C}[G])$ рассматривается как алгебра матриц вида (2) с $a_i \in \mathfrak{A}$. Обозначим I_s диагональную матрицу порядка s с элементами I на диагонали.

Теорема 1. *Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_s$ – характеры неприводимых комплексных представлений группы G и $n_1, \ldots, n_s$ – степени соответствующих представлений. Обозначим*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} h_1\chi_1(g_1)I & h_2\chi_1(g_2)I & \cdots & h_s\chi_1(g_s)I \\ h_1\chi_2(g_1)I & h_2\chi_2(g_2)I & \cdots & h_s\chi_2(g_n)I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1\chi_s(g_1)I & h_2\chi_s(g_2)I & \cdots & h_s\chi_s(g_s)I \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{F}$ *– обратимая матрица,*

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \overline{\chi_1(g_1)}I & \overline{\chi_2(g_1)}I & \cdots & \overline{\chi_s(g_1)}I \\ \overline{\chi_1(g_2)}I & \overline{\chi_2(g_2)}I & \cdots & \overline{\chi_s(g_2)}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\chi_1(g_s)}I & \overline{\chi_2(g_s)}I & \cdots & \overline{\chi_s(g_s)}I \end{pmatrix},$$

и любая матрица $A \in \mathfrak{A} \otimes Z(\mathbb{C}[G])$ представляется в виде:

$$A = \mathcal{F}^{-1}\Lambda\mathcal{F},$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_s], \ \lambda_j = \frac{1}{n_j}\sum_{g\in G} a(g)\chi_j(g), \ j = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. Найдем элементы матрицы $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$:

$$\left(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} h_k\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_k)}I = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)}I = \begin{cases} I, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}I. \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались первым соотношением ортогональности для характеров (см. [7, гл.3, § 4, Теорема 2]) и тем, что характеры являются центральными функциями на группе G. Соотношения (4) означают, что $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = I_s$.

Найдем элементы матрицы $\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$, воспользовавшись формулой (2) и определением матриц $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\left(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{l,k=1}^{s}\mathcal{F}_{ik}A_{kl}(\mathcal{F}^{-1})_{lj} = \frac{1}{n}\sum_{l,k,m=1}^{s} h_k a_m c_{ml}^{k}\chi_i(g_k)\overline{\chi_j(g_l)}.$$

Известно (см. [8, §109, формула (8)]), что характеры удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{k=1}^{s} h_k c_{ml}^{k}\chi_i(g_k) = \frac{h_m h_l}{n_i}\chi_i(g_m)\chi_i(g_l).$$

По терминологии Ван дер Вардена, это – второе соотношение между характерами.

Применив его, получаем

$$\left(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{l,m=1}^{s} a_m\overline{\chi_j(g_l)}\frac{h_m h_l}{n_i}\chi_i(g_m)\chi_i(g_l) = \sum_{m=1}^{s} a_m\frac{h_m}{n_i}\chi_i(g_m)\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{s} h_l\chi_i(g_l)\overline{\chi_j(g_l)}.$$

Наконец, еще раз воспользовавшись первым соотношением ортогональности (4), приходим к результату:

$$\left(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\right)_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{n_i}\sum_{m=1}^{s} a_m h_m \chi_i(g_m).$$

Поскольку характеры – центральные функции, то суммирование в правой части этой формулы мы можем распространить на все элементы группы G. Таким образом, окончательно $\left(\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\right)_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i$ и $\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1} = \Lambda$. Теорема доказана. ▲

В случае, когда $A \in \mathfrak{A}\otimes\mathbb{C}[G]$, G – конечная абелева группа, в формулировке Теоремы 1 нужно положить $h_1 = \ldots = h_s = n_1 = \ldots = n_s = 1$ и $s = |G|$.

Ясно, что матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ – обратимые элементы алгебры $\mathfrak{A}$.

2. Применим доказанную теорему к задаче факторизации (1). Пусть $\mathfrak{A}$ – распадающаяся алгебра непрерывных на контуре Γ функций, допускающих факторизацию Винера–Хопфа. Например, можно взять в качестве $\mathfrak{A}$ алгебру Винера $W(\mathbb{T})$ на единичной окружности $\mathbb{T}$ или алгебру $H(\Gamma)$ гельдеровских на Γ функций (см. [1]).

Элемент $a(g)$ является теперь функцией $a_g(t) \in \mathfrak{A}$, $t \in \Gamma$. Матрица-функция $A(t)$ обратима тогда и только тогда, когда функции $\lambda_j(t) = \frac{1}{n_j}\sum_{g\in G} a_g(t)\chi_j(g)$, $j = 1,\ldots,s$ отличны от нуля на Γ. Обозначим $\rho_j = \operatorname{ind}_\Gamma \lambda_j(t)$ – индекс Коши относительно контура Γ функции $\lambda_j(t)$, то есть деленное на 2π приращение аргумента этой функции, когда точка t пробегает контур Γ. Пусть $\lambda_j(t) = \lambda_j^-(t)t^{\rho_j}\lambda_j^+(t)$ – факторизация Винера–Хопфа $\lambda_j(t)$. Тогда

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}[\lambda_1^-(t),\ldots,\lambda_s^-(t)]\cdot\operatorname{diag}[\lambda_1^+(t),\ldots,\lambda_s^+(t)]$$

– факторизация Винера–Хопфа диагональной матрицы-функции $\Lambda(t)$ и применение Теоремы 1 дает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $A(t) \in \mathfrak{A}\otimes Z(\mathbb{C}[G])$ *– обратимая на контуре* Γ *матрица-функция вида (2). Тогда ее факторизация Винера–Хопфа* $A(t) = A_-(t)d(t)A_+(t)$ *строится по формулам:*

$$A_-(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1^-(t)\overline{\chi_1(g_1)} & \lambda_2^-(t)\overline{\chi_2(g_1)} & \cdots & \lambda_s^-(t)\overline{\chi_s(g_1)} \\ \lambda_1^-(t)\overline{\chi_1(g_2)} & \lambda_2^-(t)\overline{\chi_2(g_2)} & \cdots & \lambda_s^-(t)\overline{\chi_s(g_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^-(t)\overline{\chi_1(g_s)} & \lambda_2^-(t)\overline{\chi_2(g_s)} & \cdots & \lambda_s^-(t)\overline{\chi_s(g_s)} \end{pmatrix},$$

$$d(t) = \operatorname{diag}[t^{\rho_1},\ldots,t^{\rho_s}], \qquad \rho_j = \operatorname{ind}_\Gamma \lambda_j(t),$$

$$A_+(t) = \begin{pmatrix} h_1\lambda_1^+(t)\chi_1(g_1) & h_2\lambda_1^+(t)\chi_1(g_2) & \cdots & h_s\lambda_1^+(t)\chi_1(g_s) \\ h_1\lambda_2^+(t)\chi_2(g_1) & h_2\lambda_2^+(t)\chi_2(g_2) & \cdots & h_s\lambda_2^+(t)\chi_2(g_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1\lambda_s^+(t)\chi_s(g_1) & h_2\lambda_s^+(t)\chi_s(g_2) & \cdots & h_s\lambda_s^+(t)\chi_s(g_s) \end{pmatrix}.$$

▲

3. Примеры

Пример 1. Пусть $G = V_4$ – четверная группа Клейна. Она является абелевой подгруппой симметрической группы S_4:

$$V_4 = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\},$$

изоморфной прямому произведению $C_2\times C_2$ циклических групп второго порядка. Матрица $A(t)$ поэтому есть 2-уровневая циркулянтная матрица, то есть 2×2 блочно-циркулянтная матрица, с 2×2 циркулянтными блоками

$$A(t)=\left(\begin{array}{cc|cc} a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & a_4(t) \\ a_2(t) & a_1(t) & a_4(t) & a_3(t) \\ \hline a_3(t) & a_4(t) & a_1(t) & a_2(t) \\ a_4(t) & a_3(t) & a_2(t) & a_1(t) \end{array}\right).$$

Таблица характеров V_4 (см. [7, гл.3, § 5])

	e	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,3)(2\,4)$	$(1\,4)(2\,3)$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	–1	1	–1
χ_3	1	1	–1	–1
χ_3	1	–1	–1	1

задаст постоянную матрицу $\mathcal{F}$, которая приводит $A(t)$ к диагональному виду с диагональными элементами:

$$\lambda_1(t)=a_1(t)+a_2(t)+a_3(t)+a_4(t),\ \lambda_2(t)=a_1(t)-a_2(t)+a_3(t)-a_4(t),$$
$$\lambda_3(t)=a_1(t)+a_2(t)-a_3(t)-a_4(t),\ \lambda_4(t)=a_1(t)-a_2(t)-a_3(t)+a_4(t).$$

Индексы Коши этих функций являются частными индексами $A(t)$.

Пример 2. Пусть $G=S_3$ – симметрическая группа степени 3. В этой неабелевой группе имеется 3 сопряженных класса:

$$K_1=\{e\},\ K_2=\{(1\,2),(1\,3),(2\,3)\},\ K_3=\{(1\,2\,3),(1\,3\,2\}.$$

Таблица умножения базисных элементов C_j алгебры $Z(\mathbb{C}[S_3])$ приведена ниже:

1 \ 2	C_1	C_2	C_3
C_1	C_1	C_2	C_3
C_2	C_2	$3C_1+3C_3$	$2C_2$
C_3	C_3	$2C_2$	$2C_1+C_3$

Теперь по формуле (1) мы можем составить матрицу-функцию $A(t)$:

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_1(t) & 3a_2(t) & 2a_3(t) \\ a_2(t) & a_1(t)+2a_3(t) & 2a_2(t) \\ a_3(t) & 3a_2(t) & a_1(t)+a_3(t) \end{pmatrix}.$$

Таблица характеров S_3 имеет вид (см. [7, гл.3, § 5])

	e	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
χ_1	1	1	1
χ_2 .	1	–1	1
χ_3	2	0	–1

Следовательно, $\lambda_1(t)=a_1(t)+3a_2(t)+2a_3(t)$, $\lambda_2(t)=a_1(t)-3a_2(t)+2a_3(t)$, $\lambda_3(t)=a_1(t)-a_3(t)$, и

$$\mathcal{F}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\quad \mathcal{F}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2 получаем

$$A_-(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1^-(t) & \lambda_2^-(t) & 2\lambda_3^-(t)\\ \lambda_1^-(t) & -\lambda_2^-(t) & 0\\ \lambda_1^-(t) & \lambda_2^-(t) & -\lambda_3^-(t)\end{pmatrix},\quad A_+(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1^+(t) & 3\lambda_1^+(t) & 2\lambda_1^+(t)\\ \lambda_2^+(t) & -3\lambda_2^+(t) & 2\lambda_2^+(t)\\ 2\lambda_3^+(t) & 0 & -2\lambda_3^+(t)\end{pmatrix},$$

и $\rho_1=\mathrm{ind}_\Gamma(a_1(t)+3a_2(t)+a_3(t))$, $\rho_2=\mathrm{ind}_\Gamma(a_1(t)-3a_2(t)+a_3(t))$, $\rho_3=\mathrm{ind}_\Gamma(a_1(t)-a_3(t))$.

Пример 3. Пусть $G=Q_8=\{\pm 1,\pm \mathrm{i},\pm \mathrm{j},\pm \mathrm{k}\}$ – группа кватернионов, заданная определяющими соотношениями $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1$. В группе имеется 5 сопряженных классов:

$$K_1=\{1\},\ K_2=\{-1\},\ K_3=\{\pm \mathrm{i}\},\ K_4=\{\pm \mathrm{j}\},\ K_5=\{\pm \mathrm{k}\}.$$

Таблица умножения базисных элементов C_j алгебры $Z(\mathbb{C}[Q_8])$ имеет вид

1 \ 2	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_2	C_2	C_1	C_3	C_4	C_5
C_3	C_3	C_3	$2C_1+2C_2$	$2C_5$	$2C_4$
C_4	C_4	C_4	$2C_5$	$2C_1+2C_2$	$2C_3$
C_5	C_5	C_5	$2C_4$	$2C_3$	$2C_1+2C_2$

поэтому

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_1(t) & a_2(t) & 2a_3(t) & 2a_4(t) & 2a_5(t)\\ a_2(t) & a_1(t) & 2a_3(t) & 2a_4(t) & 2a_5(t)\\ a_3(t) & a_3(t) & a_1(t)+a_2(t) & 2a_5(t) & 2a_4(t)\\ a_4(t) & a_4(t) & 2a_5(t) & a_1(t)+a_2(t) & 2a_3(t)\\ a_5(t) & a_5(t) & 2a_4(t) & 2a_3(t) & a_1(t)+a_2(t)\end{pmatrix}.$$

Группа Q_8 имеет следующую таблицу характеров:

	1	−1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	−1	−1
χ_3	1	1	−1	1	−1
χ_4	1	1	−1	−1	1
χ_5	2	−2	0	0	0

Знание ее позволяет найти частные индексы и факторизационные множители $A(t)$. Ограничимся только нахождением частных индексов.

Вычисление функций $\lambda_j(t)=\dfrac{1}{n_j}\sum_{g\in G}a_g(t)\chi_j(g)$, $j=1,\dots,5$, дает такой результат:

$$\lambda_1(t)=a_1(t)+a_2(t)+2a_3(t)+2a_4(t)+2a_5(t),$$
$$\lambda_2(t)=a_1(t)+a_2(t)+2a_3(t)-2a_4(t)-2a_5(t),$$
$$\lambda_3(t)=a_1(t)+a_2(t)-2a_3(t)+2a_4(t)-2a_5(t),$$
$$\lambda_4(t)=a_1(t)+a_2(t)-2a_3(t)-2a_4(t)+a_5(t),\ \lambda_5(t)=a_1(t)-a_2(t).$$

Частные индексы $A(t)$ есть индексы Коши этих функций.

Литература

1. Гохберг, И.Ц. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения / И.Ц. Гохберг, И.А. Фельдман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

2. Adukov, V.M. On Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions / V.M. Adukov // Integral Equations and Operator Theory. – 1991.– V. 14. – P. 767–774.

3. Адуков, В.М. Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. – Вып. 1. – С. 54–74.

4. Адуков, В.М. О факторизации аналитических матриц-функций / В.М. Адуков // Теор. и матем. физика. – 1999. – Т. 118, № 3. – С. 324–336.

5. Адуков, В.М. Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций / В.М. Адуков // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 8. – С. 3–24.

6. Гахов, Ф.Д. Краевая задача Римана для системы *n* пар функций / Ф.Д. Гахов // Успехи матем. наук. – 1952. – Т. 7. – Вып. 4(50). – С. 3–54.

7. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Часть III / А.И. Кострикин. – М.: Физматлит, 2000. – 272 с.

8. Ван дер Варден, Б.Л. Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – СПб.: «Лань», 2004.– 624 с.

ABOUT WIENER–HOPF FACTORIZATION OF FUNCTIONALLY COMMUTATIVE MATRIX FUNCTIONS

V.M. Adukov[1]

An algorithm of an explicit solution of the Wiener–Hopf factorization problem is proposed for functionally commutative matrix functions of a special kind. Elementary facts of the representation theory of finite groups are used. Symmetry of the matrix function that is factored out allows to diagonalize it by a constant linear transformation. Thus, the problem is reduced to the scalar case.

Keywords: Wiener–Hopf factorization, special indexes, finite groups.

References

1. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya* (Convolution equations and projection methods for their solution). Moscow: Nauka, 1971. 352 p. (in Russ.). [Gohberg I.C., Fel'dman I.A. *Convolution equations and projection methods for their solution.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 41. MR 0355675 (50 #8149) (in Eng.).]

2. Adukov V.M. On Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Integral Equations and Operator Theory.* 1991. Vol. 14. pp. 767–774. DOI: 10.1007/BF01198935.

3. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa meromorfnykh matrits-funktsiy (Wiener-Hopf factorization of meromorphic matrix function). *Algebra i analiz.* 1992. Vol. 4. Issue 1. pp. 54–74. (in Russ.). [Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Mathematical Journal.* 1993. Vol. 4. Issue 1. pp. 51–69. (in Eng.).]

4. Adukov V.M. O faktorizatsii analiticheskikh matrits-funktsiy (About factorization of analytical matrix functions) *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika.* 1999. Vol. 118, no. 3. pp. 324–336. [Adukov V.M. Factorization of analytic matrix-valued functions. *Theoretical and Mathematical Physics.* 1999. Vol. 118, no. 3. pp. 255–263. DOI: 10.1007/BF02557319].

5. Adukov V.M. Faktorizatsiya Vinera–Khopfa kusochno meromorfnykh matrits-funktsiy (Piecewise Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions). *Matematicheskiy sbornik.* 2009. Vol. 200, no. 8. pp. 3–24. (in Russ.).

6. Gakhov F.D. Kraevaya zadacha Rimana dlya sistemy *n* par funktsiy (Riemann boundary value problem for system of *n* pairs of functions). *Uspekhi matematicheskikh nauk.* 1952. Vol.7. Issue 4(50). pp. 3–54. (in Russ.).

7. Kostrikin A.I. *Vvedenie v algebru. Chast III.* (Introduction into algebra. Part III). Moscow: Fizmatlit, 2000. 272 p. (in Russ.).

8. Van der Varden B.L. *Algebra.* Saint Petersburg: Lan', 2004. 624 p. (in Russ.).

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.

[1] Adukov Victor Mikhailovich is Dr Sc (Physics and Mathematics), Professor, Department of Mathematical Analysis, South Ural State University

E-mail victor m adukov@gmail com