УДК 512.552.7

ЕДИНИЦЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ПРЯМЫМ СОМНОЖИТЕЛЕМ ПОРЯДКА 3

С.А. Колясников[1]

Получено строение единиц целочисленных групповых колец конечных групп типа $A\times Z_3$, где A содержит центральную подгруппу порядка 3. В качестве примеров найдены группы единиц целочисленных групповых колец абелевых групп типов (9,3), (9,3,3) и (15,3).

Ключевые слова: абелева группа, групповое кольцо, группа единиц группового кольца.

1. Основная теорема

Пусть $G=A\times\langle b\rangle$ – конечная группа, где b – элемент порядка 3, A содержит центральную подгруппу $\langle a\rangle$ порядка 3. Через $V(\mathbb{Z}G)$ обозначим нормализованную группу единиц целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}G$.

Рассмотрим следующие гомоморфизмы:

$$\varphi_0 : V(\mathbb{Z}G)\to V(\mathbb{Z}A),\ \ x\mapsto x(\forall x\in A),\ \ b\mapsto 1;$$

$$\varphi_1 : V(\mathbb{Z}G)\to V(\mathbb{Z}A)\cong V(\mathbb{Z}G/\langle ab\rangle),\ \ x\mapsto x(\forall x\in A),\ \ b\mapsto a^2;$$

$$\varphi_2 : V(\mathbb{Z}G)\to V(\mathbb{Z}A)\cong V(\mathbb{Z}G/\langle a^2b\rangle),\ \ x\mapsto x(\forall x\in A),\ \ b\mapsto a;$$

$$\varphi_3 : V(\mathbb{Z}G)\to V(\mathbb{Z}G/\langle a\rangle),\ g\mapsto g\langle a\rangle\ \ (\forall g\in G)).$$

Зафиксируем полную систему представителей левых смежных классов группы A по подгруппе $\langle a\rangle$, и обозначим это множество через H. Дополнительно рассмотрим инъективное отображение

$$\sim : \mathbb{Z}G/\langle a\rangle\to\mathbb{Z}G,\ h\langle a\rangle\mapsto h(\forall h\in H).$$

Теорема 1. $V(\mathbb{Z}G)=\left(\langle b\rangle\times V(\mathbb{Z}A)\right)\leftthreetimes K$, где $K=\langle \upsilon=1+\frac{\upsilon_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2)+\frac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2)+\frac{\tilde{\upsilon}_3-1}{3}(1+a+a^2)\rangle\cap\mathbb{Z}G$, $\varphi_1(\upsilon)=\upsilon_1$, $\varphi_2(\upsilon)=\upsilon_2\in(1+I(\langle a\rangle))\cap V(\mathbb{Z}A)$, $\varphi_3(\upsilon)=\upsilon_3\in(1+I(\langle b\rangle))\cap V(\mathbb{Z}G/\langle a\rangle)$. $I(\langle a\rangle)$ – идеал кольца $\mathbb{Z}A$, порожденный элементами $a-1$, a^2-1; $I(\langle b\rangle)$ – идеал кольца $\mathbb{Z}G/\langle a\rangle$, порожденный элементами $b-1$, b^2-1 (об идеалах см. [1]).

Доказательство. Из теоремы 1 статьи [2] мы имеем $V(\mathbb{Z}G)=\left(\langle b\rangle\times V(\mathbb{Z}A)\right)\leftthreetimes K$, где $K=\left(1+A(\mathbb{Z}A)\right)A(\mathbb{Z}\langle b\rangle)\cap V(\mathbb{Z}G)$, $A(\mathbb{Z}A)A(\mathbb{Z}\langle b\rangle)$ – идеал, порожденный как аддитивная подгруппа кольца $\mathbb{Z}G$ элементами $(x-1)(b-1)$, $(x-1)(b^2-1)$ для любого $x\in A\setminus\{1\}$. Поэтому нам осталось показать только то, что K имеет такой вид как в формулировке теоремы.

Возьмем $\upsilon\in K$ и запишем его в следующем виде

$$\upsilon=\left(\sum_{h\in H}\alpha_h h+\sum_{h\in H}\alpha_{ha}ha+\sum_{h\in H}\alpha_{ha^2}ha^2\right)\cdot 1+\left(\sum_{h\in H}\beta_h h+\sum_{h\in H}\beta_{ha}ha+\sum_{h\in H}\beta_{ha^2}ha^2\right)\cdot b+$$
$$+\left(\sum_{h\in H}\gamma_h h+\sum_{h\in H}\gamma_{ha}ha+\sum_{h\in H}\gamma_{ha^2}ha^2\right)\cdot b^2.$$

А элементы $\upsilon_1,\upsilon_2\in V(\mathbb{Z}A)$ и $\upsilon_3\in V(\mathbb{Z}G/\langle a\rangle)$

$$\upsilon_1=\left(\sum_{h\in H}\lambda_h h+\sum_{h\in H}\lambda_{ha}ha+\sum_{h\in H}\lambda_{ha^2}ha^2\right),$$

[1] Колясников Сергей Андреевич – старший преподаватель, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет

E-mail: koliasnikovsa@susu.ac.ru

$$\upsilon_2 = \left(\sum_{h\in H} \mu_h h + \sum_{h\in H} \mu_{ha} ha + \sum_{h\in H} \mu_{ha^2} ha^2 \right),$$

$$\upsilon_3 = \left(\sum_{h\in H} \nu_h h\langle a\rangle + \sum_{h\in H} \nu_{hb} hb\langle a\rangle + \sum_{h\in H} \nu_{hb^2} hb^2\langle a\rangle \right).$$

Из условий, что $\varphi_0(\upsilon)=1$ (т.к. $\upsilon\in K$) и если $\varphi_1(\upsilon)=\upsilon_1$, $\varphi_2(\upsilon)=\upsilon_2$, $\varphi_3(\upsilon)=\upsilon_3$, мы получаем следующую систему уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} \alpha_h \\ \alpha_{ha} \\ \alpha_{ha^2} \\ \beta_h \\ \beta_{ha} \\ \beta_{ha^2} \\ \gamma_h \\ \gamma_{ha} \\ \gamma_{ha^2} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \varepsilon_h \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_h \\ \lambda_{ha} \\ \lambda_{ha^2} \\ \mu_h \\ \mu_{ha} \\ \mu_{ha^2} \\ \nu_h \\ \nu_{hb} \\ \nu_{hb^2} \end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon_h = \begin{cases} 1, & h=1; \\ 0, & h\neq 1. \end{cases}$$

Заметим, что сложив три уравнения каждого отображения, мы получим ограничения для υ_1, υ_2, υ_3

$$\lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h; \quad \lambda_h + \lambda_{ha} + \lambda_{ha^2} = \varepsilon_h.$$

Отсюда мы имеем, что $\upsilon_1, \upsilon_2 \in (1+I(\langle a\rangle))\cap V(\mathbb{Z}A)$, а $\upsilon_3 \in (1+I(\langle b\rangle))\cap V(\mathbb{Z}G/\langle a\rangle)$.

Далее, решая нашу систему, мы получим единственное решение

$\alpha_h = (\lambda_h + \mu_h + \nu_h)/3$; $\quad \alpha_{ha} = (\lambda_{ha} + \mu_{ha} + \nu_h - \varepsilon_h)/3$; $\quad \alpha_{ha^2} = (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha^2} + \nu_h - \varepsilon_h)/3$;

$\beta_h = (\lambda_{ha^2} + \mu_{ha} + \nu_{hb})/3$; $\quad \beta_h = (\lambda_h + \mu_{ha^2} + \nu_{hb} - \varepsilon_h)/3$; $\quad \beta_{ha^2} = (\lambda_{ha} + \mu_h + \nu_{hb} - \varepsilon_h)/3$;

$\gamma_h = (\lambda_{ha} + \mu_{ha^2} + \nu_{hb^2})/3$; $\quad \gamma_{ha} = (\lambda_{ha^2} + \mu_h + \nu_{hb^2} - \varepsilon_h)/3$; $\quad \gamma_{ha^2} = (\lambda_h + \mu_{ha} + \nu_{hb^2} - \varepsilon_h)/3$.

Затем, подставив эти значения в υ и сгруппировав соответствующие коэффициенты, легко увидеть, что получится

$$\upsilon = 1 + \tfrac{\upsilon_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2) + \tfrac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2) + \tfrac{\upsilon_3-1}{3}(1+a+a^2). \tag{1}$$

Введем дополнительное отображение $\varphi: K \to V(\mathbb{Z}A)\times V(\mathbb{Z}A)\times V(\mathbb{Z}G/\langle a\rangle)$, действующее по правилу

$$\varphi(\upsilon) = \left(\varphi_1(\upsilon), \varphi_2(\upsilon), \varphi_3(\upsilon)\right).$$

Это отображение является инъективным гомоморфизмом.

Действительно, так как

$$\varphi(\upsilon w) = \left(\varphi_1(\upsilon w), \varphi_2(\upsilon w), \varphi_3(\upsilon w)\right) = \left(\varphi_1(\upsilon)\varphi_1(w), \varphi_2(\upsilon)\varphi_2(w), \varphi_3(\upsilon)\varphi_3(w)\right).$$

И в силу того, что

$$(1+a+a^2)^2 = 3(1+a+a^2),$$

$$(1+ab+a^2b^2)^2 = 3(1+ab+a^2b^2),$$

$$(1+a^2b+ab^2)^2 = 3(1+a^2b+ab^2),$$

$$\begin{aligned}(1+a+a^2)(1+b+b^2)&=(1+b+b^2)(1+a+a^2)=\\ =(1+a^2b+ab^2)(1+ab+a^2b^2)&=(1+ab+a^2b^2)(1+a^2b+ab^2)=\\ =(1+a+a^2)(1+ab+a^2b^2)&=(1+ab+a^2b^2)(1+a+a^2)=\\ =(1+a^2b+ab^2)(1+a+a^2)&=(1+a+a^2)(1+a^2b+ab^2).\end{aligned}$$

И так как, $w_1-1, w_2-1\in I(\langle a\rangle)$, а $w_2-1\in I(\langle b\rangle)$,

$$(w_1-1)(1+a+a^2)=(w_2-1)(1+a+a^2)=(\tilde{w}_3-1)(1+b+b^2)=0.$$

$$\begin{aligned}\upsilon w=&\left(1+\tfrac{\upsilon_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2)+\tfrac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2)+\tfrac{\tilde{\upsilon}_3-1}{3}(1+a+a^2)\right)\times\\ &\times\left(1+\tfrac{w_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2)+\tfrac{w_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2)+\tfrac{\tilde{w}_3-1}{3}(1+a+a^2)\right)=\\ &=1+\tfrac{\upsilon_1w_1-1}{3}(1+ab+a^2b^2)+\tfrac{\upsilon_2w_2-1}{3}(1+a^2b+ab^2)+\tfrac{\tilde{\upsilon}_3\tilde{w}_3-1}{3}(1+a+a^2).\end{aligned}$$

Вообще говоря, $\widetilde{\upsilon_3w_3}\neq\tilde{\upsilon}_3\tilde{w}_3$, но зато легко видеть, что $\widetilde{\upsilon_3w_3}(1+a+a^2)=\tilde{\upsilon}_3\tilde{w}_3(1+a+a^2)$.

Таким образом, мы показали, что отображение φ определено корректно и является гомоморфизмом. А инъективность следует из (1), как единственного решения системы. Теорема доказана.

В следующих разделах мы приведем примеры использования этой теоремы для некоторых абелевых групп.

2. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3)

Пусть $G=\langle a\mid a^9=1\rangle\times\langle b\mid b^3=1\rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$ известно из работы [3]. Для удобства вычислений возьмем базис как в работе [2].

$$V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)=\langle a\rangle\times F,\ \ F=\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle,$$

где

$$u_1=1-(a+a^8)+(a^2+a^7),\ \ u_1^{-1}=-1-(a+a^8)+(a^3+a^6)+(a^4+a^5),$$
$$u_2=1-(a^2+a^7)+(a^4+a^5),\ \ u_2^{-1}=-1-(a^2+a^7)+(a^3+a^6)+(a+a^8).$$

Согласно теореме 1 мы имеем

$$V(\mathbb{Z}G)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle\times K,$$

где для любого $\upsilon\in K$

$$\upsilon=1+\frac{\upsilon_1-1}{3}(1+a^3b+a^6b^2)+\frac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^6b+a^3b^2),$$

$\upsilon_1,\upsilon_2\in(1+I(\langle a^3\rangle))\cap V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$, и так как $V(\mathbb{Z}G/\langle a^3\rangle)$ – тривиальная группа (см. [3]) $\varphi_3(\upsilon)=1$.

Если $\sum_{i=0}^{8}\lambda_ia^i$, $\sum_{i=0}^{8}\mu_ia^i$, то

$$\begin{aligned}\upsilon=1/3\Big(&(1+\lambda_0+\mu_0)\cdot1+(\lambda_1+\mu_1)\cdot a+(\lambda_2+\mu_2)\cdot a^2+(\lambda_3+\mu_3)\cdot a^3+(\lambda_4+\mu_4)\cdot a^4+\\ &+(\lambda_5+\mu_5)\cdot a^5+(\lambda_6+\mu_6)\cdot a^6+(\lambda_7+\mu_7)\cdot a^7+(\lambda_8+\mu_8)\cdot a^8+(\lambda_6+\mu_3)\cdot b+(\lambda_7+\mu_4)\cdot ab+\\ &+(\lambda_8+\mu_5)\cdot a^2b+(\lambda_0+\mu_6-1)\cdot a^3b+(\lambda_1+\mu_7)\cdot a^4b+(\lambda_2+\mu_8)\cdot a^5b+(\lambda_3+\mu_0-1)\cdot a^6b+\\ &+(\lambda_4+\mu_1)\cdot a^7b+(\lambda_5+\mu_2)\cdot a^8b+(\lambda_3+\mu_6)\cdot b^2+(\lambda_4+\mu_7)\cdot ab^2+(\lambda_5+\mu_8)\cdot a^2b^2+\\ &+(\lambda_6+\mu_0-1)\cdot a^3b^2+(\lambda_7+\mu_1)\cdot a^4b^2+(\lambda_8+\mu_2)\cdot a^5b^2+(\lambda_0+\mu_3-1)\cdot a^6b^2+\\ &+(\lambda_1+\mu_4)\cdot a^7b^2+(\lambda_2+\mu_5)\cdot a^8b^2\Big).\end{aligned}\tag{2}$$

Далее заметим, что $u_1,u_2\in(1+I(\langle a^3\rangle))$, так как

$$u_1=1-a^2(a^6-1)+a(a^6-1),\ \ u_2=1-a(a^6-1)+a(a^3-1)+a^2(a^3-1).$$

Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi:K\to F\times F$, действующий по правилу $\varphi(\upsilon)=(\varphi_1(\upsilon),\varphi_2(\upsilon))$.

Составим таблицу произведений элементов u_1, u_2

Таблица 1

	Коэффициенты при				
	1	$a+a^8$	a^2+a^7	a^3+a^6	a^4+a^5
u_1	1	–1	1	0	0
u_1^2	5	–4	3	–2	1
u_1^3	19	–18	15	–9	3
u_2	1	0	–1	0	1
u_2^2	5	1	–4	–2	3
u_2^3	19	3	–18	–9	15
u_1u_2	–1	0	1	1	–1
$u_1u_2^2$	–5	–1	5	3	–4
$u_1^2u_2$	1	1	–2	0	–1
$u_1^2u_2^2$	7	1	–6	–3	5

Из табл. 1 с помощью (2) видно, что

$$(u_1^2,1),(u_2^3,1),(1,u_1^3),(1,u_2^3)\in \varphi(K),$$

и для $0\le i_1,i_2,j_1,j_2\le 2$ $\left(u_1^{i_1}u_2^{i_2},u_1^{j_1}u_2^{j_2}\right)\in\varphi(K)$ тогда и только тогда, когда

$$i_1=1,i_2=2,j_1=2,j_2=1 \text{ или } i_1=2,i_2=1,j_1=1,j_2=2.$$

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. $\varphi(K)=\langle(u_1u_2^2,u_1^2u_2)\rangle\times\langle(u_2^3,1)\rangle\times\langle(1,u_1^3)\rangle\times\langle(1,u_2^3)\rangle$. $F\times F/\varphi(K)\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

Таким образом, мы уже можем записать и порождающие группы $V(\mathbb{Z}G)$, но в следующей теореме, решив вопрос об индексе подгруппы Милнора (см. [1, стр. 45]), мы выберем более удобный базис.

Теорема 3. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G):W(G)|=1$,

$$V(\mathbb{Z}G)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle\times\langle u_3\rangle\times\langle u_4\rangle\times\langle u_5\rangle\times\langle u_6\rangle,$$

где

$$u_1=1-(a+a^8)+(a^2+a^7),\qquad u_2=1-(a^2+a^7)+(a^4+a^5),$$

$$u_3=1-(ab+a^8b^2)+(a^2b^2+a^7b),\qquad u_4=1-(a^2b^2+a^7b)+(a^4b+a^5b^2),$$

$$u_5=1-(ab^2+a^8b)+(a^2b+a^7b^2),\qquad u_6=1-(a^2b+a^7b^2)+(a^4b^2+a^5b).$$

Доказательство. По определению $W(G)$ подгруппа группы $V(\mathbb{Z}G)$, порожденная подгруппами $V(\mathbb{Z}C)$, когда C пробегает все циклические подгруппы группы G. Перечислим все $V(\mathbb{Z}C)$ для нашей группы.

$$V(\mathbb{Z}\langle a^3\rangle)=\langle a^3\rangle,\ V(\mathbb{Z}\langle b\rangle)=\langle b\rangle,\ V(\mathbb{Z}\langle a^3b\rangle)=\langle a^3b\rangle,\ V(\mathbb{Z}\langle a^6b\rangle)=\langle a^6b\rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)=\langle a\rangle\times\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle,\ V(\mathbb{Z}\langle ab\rangle)=\langle ab\rangle\times\langle u_3\rangle\times\langle u_4\rangle,\ V(\mathbb{Z}\langle ab^2\rangle)=\langle ab^2\rangle\times\langle u_5\rangle\times\langle u_6\rangle.$$

Утверждение следует из теоремы 2 и из того, что

$$\varphi(u_1u_2u_5^{-1}u_6^{-1})=(u_1u_2^2,u_1^2u_2),\qquad \varphi(u_2u_3u_5^{-1}u_6^{-1})=(u_2^3,1),$$

$$\varphi(u_1u_4u_5^{-1}u_6^{-1})=(1,u_1^3),\qquad \varphi(u_2u_3^{-1}u_4^{-1}u_5)=(1,u_2^3).$$

Теорема доказана.

3. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (9,3,3)

Пусть $G=\langle a\,|\,a^9=1\rangle\times\langle b\,|\,b^3=1\rangle\times\langle c\,|\,c^3=1\rangle$. Через A обозначим подгруппу $A=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}A)$ возьмем из теоремы 3.

$$V(\mathbb{Z}A)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times F,\ F=\langle u_1\rangle\times\ldots\times\langle u_6\rangle.$$

Согласно теореме 1 мы имеем $V(\mathbb{Z}A)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle c\rangle\times\langle u_1\rangle\times\ldots\times\langle u_6\rangle\times K$,
где для любого $\upsilon\in K$

$$\upsilon=1+\frac{\upsilon_1-1}{3}(1+a^3b+a^6b^2)+\frac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^6b+a^3b^2),$$

$\upsilon_1,\upsilon_2\in(1+I(\langle a^3\rangle))\cap V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$, и так как $V(\mathbb{Z}G/\langle a^3\rangle)$ – тривиальная группа (см. [3]) $\varphi_3(\upsilon)=1$.

Далее заметим, что $u_i\in\left(1+I(\langle a^3\rangle)\right), i=1,\ldots,6$. Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi:K\to F\times F$, действующий по правилу $\varphi(\upsilon)=(\varphi_1(\upsilon),\varphi_2(\upsilon))$.

Из теоремы 2, так как $(ab^i)^3=a^3$, $i=0,1,2$, следует что $(u_i^3,1),(1,u_i^3)\in\varphi(K)$. Так же

$\left(u_1^{i_1}u_2^{i_2},u_1^{j_1}u_2^{j_2}\right),\left(u_3^{i_3}u_4^{i_4},u_3^{j_3}u_4^{j_4}\right),\left(u_5^{i_5}u_6^{i_6},u_5^{j_5}u_6^{j_6}\right)\in\varphi(K), i_i, j_i=0,1,2$

тогда и только тогда, когда

$$i_1=i_3=i_5=1, i_2=i_4=i_6=2, j_1=j_3=j_5=2, j_2=j_4=j_6=1$$

или

$$i_1=i_3=i_5=2, i_2=i_4=i_6=1, j_1=j_3=j_5=1, j_2=j_4=j_6=2.$$

Затем в пакете GAP (см. [4]) было проверено, что

$$\left(u_2^{i_2}u_4^{i_4}u_6^{i_6},u_1^{i_1}u_2^{i_2}u_3^{i_3}u_4^{i_4}u_5^{i_5}u_6^{i_6}\right)\notin\varphi(K),\quad i_i, j_i=0,1,2.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 4. $K=\langle w_1\rangle\times\ldots\times\langle w_{12}\rangle$, где

$$\begin{array}{lll}\varphi(w_1)=(u_1u_2^2,u_1^2u_2), & \varphi(w_2)=(u_3u_4^2,u_3^2u_4), & \varphi(w_3)=(u_5u_6^2,u_5^2u_6),\\ \varphi(w_4)=(u_2^3,1), & \varphi(w_5)=(u_4^3,1), & \varphi(w_6)=(u_6^3,1),\\ \varphi(w_7)=(1,u_1^3), & \varphi(w_8)=(1,u_2^3), & \varphi(w_9)=(1,u_3^3),\\ \varphi(w_{10})=(1,u_4^3), & \varphi(w_{11})=(1,u_5^3), & \varphi(w_{12})=(1,u_6^3).\end{array}$$

$F\times F/\varphi(K)\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

Так же, как и в предыдущем разделе, решается вопрос об индексе подгруппы Милнора.

Теорема 5. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G):W(G)|=1$.

4. Группа единиц целочисленного группового кольца абелевой группы типа (15,3)

Пусть $G=\langle a\mid a^{15}=1\rangle\times\langle b\mid b^3=1\rangle$. Описание группы единиц $V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$ было получено в работе [2]. Для удобства вычислений возьмем другой базис.

$$V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)=\langle a\rangle\times\langle u_0\rangle\times F,\ F=\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle\times\langle u_3\rangle,$$

где

$$u_0=-1+(a^3+a^{12}),\ u_0^{-1}=-1+(a^6+a^9),$$

$$u_1^{-1}=-3-3(a+a^{14})-2(a^2+a^{13})-(a^3+a^{12})+2(a^5+a^{10})+3(a^6+a^9)+3(a^7+a^8),$$

$$u_2=3-2(a^2+a^{13})+(a^3+a^{12})+2(a^4+a^{11})-(a^5+a^{10})-2(a^6+a^9)+(a^7+a^8),$$

$$u_2^{-1}=-3+3(a+a^{14})-3(a^2+a^{13})+3(a^3+a^{12})-2(a^4+a^{11})+2(a^5+a^{10})-(a^6+a^9),$$

$$u_3=3+(a+a^{14})-2(a^3+a^{12})-2(a^4+a^{11})-(a^5+a^{10})+(a^6+a^9)+2(a^7+a^8),$$

$$u_3^{-1}=3+3(a^2+a^{13})-(a^3+a^{12})-3(a^4+a^{11})+2(a^5+a^{10})+3(a^6+a^9)-2(a^7+a^8).$$

Согласно теореме 1 мы имеем $V(\mathbb{Z}G)=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\times\langle u_0\rangle\times\langle u_1\rangle\times\langle u_2\rangle\times\langle u_3\rangle\times K$, где для любого $\upsilon\in K$

$$\upsilon=1+\frac{\upsilon_1-1}{3}(1+a^5b+a^{10}b^2)+\frac{\upsilon_2-1}{3}(1+a^{10}b+a^5b^2)+\frac{\tilde{\upsilon}_3-1}{3}(1+a^5+a^{10}),$$

$\upsilon_1,\upsilon_2\in(1+I(\langle a^5\rangle))\cap V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$, а $\upsilon_3\in(1+I(\langle b\rangle))\cap V(\mathbb{Z}\langle a^5\rangle)$.

Обозначим через ψ изоморфизм групп $V(\mathbb{Z}\langle a\rangle)$ и $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5\rangle)$, действующий по правилу $\psi: a \to ab\langle a^5\rangle$. Тогда $V(\mathbb{Z}G/\langle a^5\rangle) = \langle ab\langle a^5\rangle\rangle \times \langle u_0'\rangle \times F'$, $F' = \langle u_1'\rangle \times \langle u_2'\rangle \times \langle u_3'\rangle$, где $u_i' = \psi(u_i)$, $i = 0,1,2,3$.

Далее заметим, что $u_1, u_2, u_3 \in (1 + I(\langle a^5\rangle))$, а $u_1', u_2', u_3' \in (1 + I(\langle b\rangle))$ так как

$$u_1 = 1 + (a^4 + a - 1)(a^5 - 1) - (2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - a + 1)(a^{10} - 1),$$

$$u_2 = 1 - (2a^4 - a^3 - a^2 + 2a + 1)(a^5 - 1) - (2a^3 - a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1),$$

$$u_3 = 1 + (a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a - 1)(a^5 - 1) - (a^4 - 2a^2 - 2a + 1)(a^{10} - 1),$$

$$u_1' = \langle a^5\rangle + (a^4\langle a^5\rangle + 2a^3\langle a^5\rangle - 2a\langle a^5\rangle - \langle a^5\rangle)(b-1) -$$
$$-(2a^4\langle a^5\rangle - 2a^2\langle a^5\rangle - a\langle a^5\rangle + \langle a^5\rangle)(b^2 - 1),$$

$$u_2' = \langle a^5\rangle + (2a^4\langle a^5\rangle - 2a^3\langle a^5\rangle + a^2\langle a^5\rangle - \langle a^5\rangle)(b-1) +$$
$$+(a^3\langle a^5\rangle - 2a^2\langle a^5\rangle + 2a\langle a^5\rangle - \langle a^5\rangle)(b^2 - 1),$$

$$u_3' = \langle a^5\rangle + (2a^4\langle a^5\rangle - 2a^2\langle a^5\rangle - a\langle a^5\rangle + \langle a^5\rangle)(b-1) +$$
$$+(a^4\langle a^5\rangle + 2a^3\langle a^5\rangle - 2a\langle a^5\rangle - \langle a^5\rangle)(b^2 - 1).$$

Причем $u_0 \notin \left(1 + I(\langle a^5\rangle)\right)$, а $u_0' \notin \left(1 + I(\langle b\rangle)\right)$.

Поэтому рассмотрим гомоморфизм $\varphi: K \to F \times F \times F'$, действующий по правилу

$$\varphi(v) = \left(\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)\right).$$

Аналогично, как в примере для группы $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, мы имеем здесь, что

$$\left(u_i^3, 1, 1\right), \left(1, u_i^3, 1\right), \left(1, 1, u_i'^3\right) \in \varphi(K),\ i = 1,2,3.$$

Далее с помощью GAP (см. [4]) было проверено, что

$$\left(u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3}, u_1^{j_1} u_2^{j_2} u_3^{j_3}, u_1'^{k_1} u_2'^{k_2} u_3'^{k_3}\right) \in \varphi(K),\quad i_\ell, j_\ell, k_\ell = 0,1,2 (\ell = 1,2,3).$$

тогда и только тогда, когда показатели степеней соответствуют значениям из табл. 2.

Таблица 2

i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3
0	0	0	1	0	1	2	0	2
0	0	0	2	0	2	1	0	1
0	0	1	0	0	2	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	2	0	1	2	0	0
0	0	2	0	0	1	2	0	1
0	0	2	1	0	2	1	0	0
0	0	2	2	0	0	0	0	2

i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3	i_1	i_2	i_3	j_1	j_2	j_3	k_1	k_2	k_3
0	1	0	0	2	0	2	1	2	0	2	0	0	1	0	1	2	1
0	1	0	1	2	1	1	1	1	0	2	0	1	1	1	0	2	0
0	1	0	2	2	2	0	1	0	0	2	0	2	1	2	2	2	2
0	1	1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	0	1	2	2	2	0
0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	2	1	1	1	0	1	2	2
0	1	1	2	2	1	1	1	2	0	2	1	2	1	1	0	2	1
0	1	2	0	2	1	1	1	0	0	2	2	0	1	1	0	2	2
0	1	2	1	2	2	0	1	2	0	2	2	1	1	2	2	2	1
0	1	2	2	2	0	2	1	1	0	2	2	2	1	0	1	2	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	2	1	0	1	2
1	0	0	1	0	2	0	0	2	1	1	0	1	2	2	2	1	1

1	0	0	2	0	0	2	0	1	1	1	0	2	2	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	2	0	2	1	1	1	0	2	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	2	1	0	1	0
1	0	1	2	0	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	1	2
1	0	2	0	0	2	0	0	1	1	1	2	0	2	2	2	1	0
1	0	2	1	0	0	2	0	0	1	1	2	1	2	0	1	1	2
1	0	2	2	0	1	1	0	2	1	1	2	2	2	1	0	1	1
1	2	0	0	1	1	2	2	1	2	0	0	0	0	2	2	0	0
1	2	0	1	1	2	1	2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	2
1	2	0	2	1	0	0	2	2	2	0	0	2	0	1	0	0	1
1	2	1	0	1	0	0	2	0	2	0	1	0	0	1	0	0	2
1	2	1	1	1	1	2	2	2	2	0	1	1	0	2	2	0	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0	1	2	0	0	1	0	0
1	2	2	0	1	2	1	2	2	2	0	2	0	0	0	1	0	1
1	2	2	1	1	0	0	2	1	2	0	2	1	0	1	0	0	0
1	2	2	2	1	1	2	2	0	2	0	2	2	0	2	2	0	2
2	1	0	0	2	2	1	1	2	2	2	0	0	1	2	0	2	1
2	1	0	1	2	0	0	1	1	2	2	0	1	1	0	2	2	0
2	1	0	2	2	1	2	1	0	2	2	0	2	1	1	1	2	2
2	1	1	0	2	1	2	1	1	2	2	1	0	1	1	1	2	0
2	1	1	1	2	2	1	1	0	2	2	1	1	1	2	0	2	2
2	1	1	2	2	0	0	1	2	2	2	1	2	1	0	2	2	1
2	1	2	0	2	0	0	1	0	2	2	2	0	1	0	2	2	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1
2	1	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	1	2	0	2	0

Выбрав из них порождающие, мы получаем следующий результат.

Теорема 6. $K = \langle w_1 \rangle \times \ldots \times \langle w_9 \rangle$, где

$$\varphi(w_1) = (u_1, u_3, u_1'), \quad \varphi(w_2) = \left(u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2\right), \quad \varphi(w_3) = \left(u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2\right),$$

$$\varphi(w_4) = \left(1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2\right), \quad \varphi(w_5) = (1, u_2^3, 1), \quad \varphi(w_6) = (1, u_3^3, 1),$$

$$\varphi(w_7) = (1, 1, u_1'^3), \quad \varphi_3(w_8) = \left(1, 1, u_2'^3\right), \quad \varphi(w_9) = \left(1, 1, u_3'^3\right),$$

$$F \times F / \varphi(K) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 .$$

Так же, как и в предыдущих примерах, решим вопрос об индексе подгруппы Милнора и выберем более удобный базис.

Теорема 7. Пусть $W(G)$ – подгруппа Милнора, тогда $|V(\mathbb{Z}G) : W(G)| = 1$,

$$V(\mathbb{Z}G) = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \ldots \times \langle u_{12} \rangle,$$

где

$$u_0 = -1 + (a^3 + a^{12}), \; u(x) = 3 - 2(x + x^{14}) + 2(x^2 + x^{13}) - 2(x^3 + x^{12}) + (x^4 + x^{11}) - (x^5 + x^{10}) + (x^6 + x^9),$$

$$u_1 = u(a), \; u_2 = u(a^2), \; u_3 = u(a^2), \; u_4 = u(ab), \; u_5 = u(a^2 b^2), \; u_6 = u(a^4 b), \; u_7(a^2 b),$$

$$u_8 = u(a^4 b^2), \; u_9 = u(a^8 b), \; u_{10} = u(a^3 b), \; u_{11} = u(a^6 b^2), \; u_{12} = u(a^{12} b).$$

Доказательство. Перечислим все $V(\mathbb{Z}C)$, порождающие $W(G)$, когда C пробегает все циклические подгруппы группы G.

$$V(\mathbb{Z}\langle a^5 \rangle) = \langle a^5 \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle b \rangle) = \langle b \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle a^5 b \rangle) = \langle a^5 b \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle a^{10} b \rangle) = \langle a^{10} b \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle a^3 \rangle) = \langle a^3 \rangle \times \langle u_0 \rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a \rangle) = \langle a \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_1 \rangle \times \langle u_2 \rangle \times \langle u_3 \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle ab \rangle) = \langle ab \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_4 \rangle \times \langle u_5 \rangle \times \langle u_6 \rangle,$$

$$V(\mathbb{Z}\langle a^2 b \rangle) = \langle a^2 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_7 \rangle \times \langle u_8 \rangle \times \langle u_9 \rangle, \; V(\mathbb{Z}\langle a^3 b \rangle) = \langle a^3 b \rangle \times \langle u_0 \rangle \times \langle u_{10} \rangle \times \langle u_{11} \rangle \times \langle u_{12} \rangle .$$

Утверждение следует из теоремы 6 и из того, что

$$\varphi(u_{10}^{-1} u_{11}^{-1} u_{12}^{-1}) = (u_1, u_3, u_1'), \qquad \varphi(u_1^{-1} u_2 u_3^{-1} u_4 u_6 u_7^{-1}) = \left(u_2, u_2^2, u_1'^2 u_2' u_3'^2\right),$$

$$\varphi(u_1^{-1} u_7^{-1} u_8^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) = \left(u_3, u_3^2, u_1' u_3'^2\right), \qquad \varphi(u_1^{-1} u_3^{-1} u_7^{-1} u_9^{-1} u_{10}^{-1} u_{12}^{-1}) = \left(1, u_1 u_3, u_1'^2 u_3'^2\right),$$

$$\varphi(u_2u_4u_6u_9u_{12}) = (1, u_2^3, 1),$$

$$\varphi(u_3u_4^{-1}u_6^{-1}u_7^{-1}u_8^{-1}u_9^{-1}u_{10}^{-1}u_{12}^{-1}) = \left(1, u_3^3, 1\right),$$

$$\varphi(u_1^{-1}u_3^{-1}u_4u_8u_{10}^{-1}u_{11}^{-1}u_{12}^{-1}) = \left(1, 1, u_1'^3\right)$$

$$\varphi(u_1u_3u_5u_9u_{10}) = \left(1, 1, u_2'^3\right),$$

$$\varphi(u_1^{-1}u_3^{-1}u_6u_7^{-1}u_8^{-1}u_9^{-1}u_{11}) = \left(1, 1, u_3'^3\right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Бовди, А.А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца / А.А. Бовди. – Ужгород: Ужг.гос.ун., 1987. – 210 с. (Деп. УкрНИИНТИ 24.09.87, №2712–Ук87).
2. Колясников, С.А. О группе единиц целочисленного группового кольца конечных групп разложимых в прямое произведение / С.А. Колясников. – Новосибирск, Ред. Сиб. мат. журн., 2000. – 45 с. (Деп. В ВИНИТИ 30.03.00, №860–В00).
3. Алеев, Р.Ж. Единицы циклических групп порядков 7 и 9 / Р.Ж. Алеев, Г.А. Панина // Известия вузов, Математика. – 1999. –№ 11(450). – С. 81–84.
4. Martin Schönert *et al.* GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

UNITS OF INTEGRAL GROUP RINGS OF FINITE GROUPS WITH A DIRECT MULTIPLIER OF ORDER 3

***S.A. Kolyasnikov*[1]**

The description of units of integral group rings of finite groups of type $A \times Z_3$ was obtained, where A contains a central subgroup of order 3. For example, the unit groups of integral group rings of Abelian groups of the types (9,3), (9,3,3) and (15,3) were found.

Keywords: Abelian group, group ring, unit group of group ring.

References

1. Bovdi A.A. *Mul'tiplikativnaya gruppa tselochislennogo gruppovogo kol'tsa* (Multiplicative group of integral group ring). Uzhgorod: Uzhgorodskiy gosudarstvennyy universitet, 1987. 210 p. (in Russ.).
2. Kolyasnikov S.A. *O gruppe edinits tselochislennogo gruppovogo kol'tsa konechnykh grupp razlozhimykh v pryamoe proizvedenie* (About group of units of integral group ring of finite groups factorable into direct composition). Novosibirsk, Red. Sibirskogo Matematicheskogo Zhurnala, 2000. 45 p. (in Russ.).
3. Alev R.Zh., Panina G.A. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* 1999. Vol. 43, no. 11. pp. 80–83.
4. Martin Schönert *et al. GAP – Groups, Algorithms, and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik. Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, sixth edition, 1997.

Поступила в редакцию 6 марта 2013 г.

[1] Kolyasnikov Sergey Andreevich is Senior Lecturer, General Mathematics Department, South Ural State University
E-mail koliasnikovsa@susu.ac.ru